TECHNISCHE MECHANIK 11(1990)Heft 2
Manuskripteingang: 29.11.1989

# Zu einigen Aspekten der klassischen Kontinuumsmechanik und ihrer Erweiterungen[1)]

Holm Altenbach

## 0. Einleitung und Zielstellung

In den letzten Jahren hat die Bedeutung der Kontinuumsmechanik für Forschung und Lehre zugenommen. Dabei diskutieren Theoretiker mit Praktikern, Festkörper- mit Fluidmechanikern, Mathematiker mit Physikern usw. um die notwendigen Inhalte und Formen. Ungeachtet der unterschiedlichen (und teilweise gegensätzlichen Meinungen) ist generell eine Zunahme an Interesse zu verzeichnen, von dem auch die Mechanikforschungsstellen in der DDR nicht ausgenommen sind. Eine wichtige Etappe für die gezielte Entwicklung eines eigenen Forschungspotentials auf dem Gebiet der Kontinuumsmechanik bestand in der Neukonzepierung des Lehrgebietes „Mechanik der Kontinua" in den Ausbildungsdokumenten für Studenten der Fachrichtung „Angewandte Mechanik". Das Rahmenlehrprogramm ist sehr weit gefaßt, so daß die entsprechenden Ausbildungseinrichtungen der TU „Otto von Guericke" Magdeburg, der TU Dresden und der TU Karl-Marx-Stadt ihr eigenes Profil entwickeln können. Daneben wurde auch die Weiterbildung auf dem Gebiet „Kontinuumsmechanik und Materialtheorie" verbessert. Besonderer Ausdruck dieser Bemühungen waren u. a. Vorträge und Diskussionsveranstaltungen am „Interdisziplinären Seminar für den wissenschaftlichen Nachwuchs" an der Karl-Marx-Universität zu Leipzig in den Jahren 1986 und 1989.

Im nachfolgenden Beitrag werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik (klassische Kontinuumsmechanik und Erweiterungen) einschließlich einiger geschichtlicher Aspekte diskutiert. Der Schwerpunkt der Ausführungen liegt in der Herausarbeitung der Systematik und der Einheitlichkeit der Darstellung sowie in ausführlichen weiterführenden Literaturangaben und nicht in der Darlegung neuer Erkenntnisse. Das Gesamtgebiet wird dabei stark eingeschränkt: der überwiegende Teil der Ausführungen läßt sich in der hier angegebenen Form nur auf die Festkörpermechanik direkt anwenden. Eine Reihe von Ausführungen können jedoch leicht auch auf andere Probleme bezogen werden.

1) Der Beitrag stellt eine überarbeitete und teilweise erweiterte Fassung der Vorlesungen des Autors „Grundlagen der klassischen Kontinuumsmechanik" und „Erweiterungen der klassischen Kontinuumsmechanik/Nichtklassische Kontinuumsmechanik", gehalten im April 1989 am INTSEM im Rahmen des 2. Kurses „Festkörpermechanik", dar.

## 1. Ausgewählte Entwicklungsetappen der Kontinuumsmechanik

Die Mechanik gehört zu den ältesten Wissenschaftsdisziplinen, deren Wurzeln bis in das Altertum zurückgehen. Die Kontinuumsmechanik bildete sich im Rahmen der Mechanik verstärkt ab dem 18. Jahrhundert heraus, wobei Leonhard Euler (1707 – 1783) entscheidend die Diskussion beeinflußt hat. Zu dieser Zeit wurde versucht, die Mechanik als einheitliches Ganzes zu betrachten, obwohl die Wurzeln für die spätere, bis in die heutige Zeit reichende Trennung von Punktmechanik (Mechanik starrer Körper), Festkörper- und Fluidmechanik bereits vorhanden waren. Die Arbeiten Eulers zeigen jedoch, daß er zwar Aufgaben der Mechanik elastisch deformierbarer Kontinua (elastische Linie) und Aufgaben der Mechanik reibungsfreier Flüssigkeiten mit unterschiedlichen Sätzen der Mechanik löste, jedoch dabei seine Analyse auch auf einheitliche Methoden stützte. Als Beispiel dafür kann man das Schnittprinzip der Kontinuumsmechanik anführen, welches die Wirkung innerer Kräfte „sichtbar", modellierbar und mit einer Bewegungsgröße bilanzierbar macht. Außerdem war für Euler die Mechanik ein „offenes System", d. h., die von ihm postulierten Größen (z. B. in der Hydromechanik ordnete er den Oberflächenkräften nur Druckwirkung zu) wurden nicht als die einzig möglichen angenommen [1].

Die weitere Entwicklung der Mechanik wurde wesentlich durch J. L. Lagrange (1736 – 1813) beeinflußt. In seinem Hauptwerk „Mécanique analytique" (1788) faßte er die wichtigsten Entwicklungen in der Mechanik bis zu diesem Zeitpunkt zusammen. Gleichzeitig bekräftigte er die „mathematische Ausrichtung" der Mechanik (z. B. in der nach [2] zitierten Aussage, daß alle, die die Analysis mögen, sehen werden, daß die Mechanik eines ihrer Teilgebiete geworden ist), womit er Leonardo da Vinci folgte: Die Mechanik ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften, weil man mit ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt (aus dem Tagebuch da Vincis, zitiert nach [3]).

In der Zeit nach Lagrange kam es zum Zerfall der Mechanikforschung in Einzelrichtungen [3]:

- analytische Methode (insbesondere Arbeiten zur Punktmechanik),
- geometrische Richtung,
- Technische Mechanik (ausgelöst durch die Vertreter der École Polytechnique und u. a. in Deutschland an den Technischen Hochschulen weiterentwickelt),
- Kontinuumsmechanik (insbesondere durch führende Mathematiker und Physiker getragen),
- . . .

Dabei war zunehmend zu beobachten, daß nicht alle dieser Einzelrichtungen erfolgreich praxisbezogene Ingenieuraufgaben analysieren konnten, da es eine Reihe von mathematischen Schwierigkeiten gab.

Der Stand der Kontinuumsmechanik zu Beginn des 20. Jahrhunderts war bezüglich ihrer Bedeutung für die Praxis völlig unbefriedigend. Der Charakter einer Teildisziplin der Mathematik nahm zu, da viele Forschungsergebnisse der Mathematik (z. B. Funktionsanalysis, Differentialgeometrie) ihre meist „akademischen Anwendungen" in der Mechanik der Kontinua fanden. Man konnte in der Mechanik der Kontinua mit wenigen Axiomen und Sätzen arbeiten, so daß der für den Mathematiker typische Arbeitsstil erhalten blieb. Beispiele für diese Vorgehensweise sind u. a. die Vorlesungen von G. Herglotz [4] und die Arbeiten der Gebrüder Cosserat (z. B. [5]). Letztere stellen einen wesentlichen Beitrag zur Erweiterung der klassischen Kontinuumsvorstellungen dar, waren jedoch in ihrer Darstellung rein mathematisch, und es fehlten teilweise die mechanischen Interpretationen (z. B. bleibt in den Arbeiten der Gebrüder Cosserat die Frage nach den Konstitutivgleichungen offen). Diskussionen der Mathematiker um die Jahrhundertwende gaben jedoch entscheidende Impulse für die Weiterentwicklungen in der Kontinuumsmechanik in den letzten 30 Jahren. Bestes Beispiel ist das 6. Hilbert-Problem (formuliert von D. Hilbert 1900 auf dem 2. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris): Entwicklung der axiomatischen Struktur der Physik, insbesondere der Mechanik.

Um die Lösung dieses Problems bemühte sich in der Folgezeit nur G. Hamel (1908) (die Ergebnisse dieser Bemühungen sind u. a. in [3] nachzulesen), insgesamt blieb es jedoch bis Ende der 50er Jahre unbeachtet. Ab 1957 wurde es von W. Noll und Mitarbeitern verstärkt einer Lösung zugeführt [6].

Parallel zur Kontinuumsmechanik entwickelten sich die anderen Einzelrichtungen. Insbesondere die „Ingenieurmechanik" bzw. „Technische Mechanik" besaß breite Anwendungen in der Praxis, und durch Spezialisierung bildeten sich weitere Teildisziplinen heraus. Auf das Gesamtgebiet der Mechanik bezogen sind hier hauptsächlich die Analytische Mechanik, die Festigkeitslehre, die Strömungslehre, die Elastizitäts-, die Plastizitätstheorie usw. zu nennen. Diese Teilgebiete haben heute ein beachtliches theoretisches Niveau erreicht. Gleichzeitig besitzen die entwickelten Modelle große Praxisrelevanz. Wesentliche Beiträge zu den verschiedenen Teildisziplinen stammen u. a. von S. P. Timoshenko, L. Prandtl, R. v. Mises und Th. v. Kàrman.

Die Aufspaltung der Mechanik brachte jedoch neben Erkenntnisfortschritten auch Nachteile. Insbesondere wurden einige Methoden und Lösungsverfahren „doppelt" entwickelt. Als Beispiel seien hier nur Analogien in der Strömungsmechanik und in der Plastizitätstheorie genannt. Ebenso ließen sich komplexe Probleme für gekoppelte Felder schlecht analysieren, da sich teilweise die Grundpostulate in den verschiedenen Teildisziplinen ausschließen. Negativ beeinflußte auch der Stand der Lösungsverfahren eine kontinuumsmechanische Vorgehensweise bei vielen Praxisproblemen. Trotzdem wurde die fundamentale Bedeutung der Kontinuumsmechanik von einer Reihe von Wissenschaftlern erkannt. So führte R. v. Mises auf dem III. IUTAM-Kongreß in Stockholm 1930 aus [7]: „Die zweite Bemerkung kehrt an den Ausgangspunkt meines Berichtes zurück, das Verhältnis der Technik zu den Bestrebungen der rationellen Mechanik nach Aufklärung des mechanischen Verhaltens der wirklich beobachtbaren Körper. Kein Zweifel: Die Aufgaben der Materialprüfung drängen nach wenigstens vorläufigen praktischen Lösungen, und sie sucht sie in Ansätzen der hier beschriebenen Art, aber ohne rationelle Grundlage, meist ohne Kenntnis des Vorhandenen, unter ständig zunehmender Verwirrung der Begriffe und Bezeichnungen. Zahllose Aufsätze, die an neue experimentelle Feststellungen anknüpfen, suchen immer von neuem die Grundbegriffe zu definieren, Meßverfahren, ja Maßeinheiten für die Stoffeigenschaften einzuführen – es gibt wenigstens ein halbes Dutzend verschiedene Plastizitätsmesser – ohne jede vernünftige theoretische Grundlegung. Von amerikanischer Seite ist schon der Vorschlag gemacht worden, zur Klärung der Verhältnisse einen Ausschuß von Fachleuten einzusetzen. Ich glaube, daß wir den Fortschritt zunächst auf andere Weise suchen müssen: durch sorgfältige Beachtung der logischen Grundlagen der Theorie und der bisherigen mathematischen Ansätze, deren Ausgestaltung allein dazu führen kann, die experimentelle Forschung in geordnete und fruchtbare Bahnen zu leiten."

Nach dem 2. Weltkrieg setzte in vielen Ländern eine stürmische Entwicklung der Kontinuumsmechanik bei gleichzeitiger Herausbildung von wissenschaftlichen Schulen ein. Diese Entwicklung stand im Zusammenhang mit Forderungen der Praxis (Lösung von komplexen Feldproblemen bei gegenseitiger Wechselwirkung verschiedener Feldgrößen). Im Zusammenhang mit der Schaffung des ersten Rechenautomaten durch K. Zuse (1941) und der nachfolgenden Entwicklung bis zum heutigen massenhaften Einsatz von elektronischen Informationsverarbeitungsanlagen trat auch die Frage nach der Lösung des 6. Hilbert-Problems erneut auf. Einerseits können heute Aufgaben mit Hilfe von Computern gelöst werden, die bereits einen hohen Grad einer wirklichkeitsnahen Modellierung von Geometrie und Randbedingungen zulassen. Gleichzeitig fordert der Einsatz von Computern eine Algorithmierung und Formalisierung der Aufgaben. Dies läßt sich besser im Rahmen von axiomatisch aufgebauten Theorien realisieren.

Die wichtigsten wissenschaftlichen Schulen zur Kontinu- [12]), in der VR Polen (1 Schule, begründet von N. Nowacki [13]), in Frankreich (1 Schule, begründet von P. Germain [14]), in der Schweiz (1 Schule, begründet von H. Ziegler [15]), in der BRD bzw. Berlin (West) (3 Schulen, begründet von E. Becker [16], I. Müller [17], R. Trostel) und den USA (mindestens 2 Schulen, begründet von W. Prager [18], C. Truesdell/W. Noll [19]), wobei diese Aufzählung keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt und in Klammern nur jeweils ein repräsentatives Buch der Schule angegeben ist. In der DDR wurden kontinuumsmechanische Forschungen hauptsächlich durch H. Günther, G. Naue, H. Bergander und C. Reißmann angeregt, wobei aufgrund der geringen eingesetzten Kapazitäten bisher noch keine Schulenbildung erfolgen konnte. Die Bedeutung der Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet wird jedoch zunehmend erkannt, und es gibt auch Ansätze für eine gemeinsame wissenschaftliche Diskussion zwischen Festkörper- und Fluidmechanikern (vgl. dazu auch [20], [21]).

## 2. Zur Kontinuumsdefinition

Aus der Literatur kann man schnell erkennen, daß es mehrere Kontinuumsdefinitionen gibt. An dieser Stelle soll nicht über die Qualität der unterschiedlichen Definitionen gestritten werden. Eine Bewertung sollte jedoch immer unter dem Aspekt erfolgen, unter welche Kontinuumsdefinition fallen möglichst viele Erscheinungsformen des Kontinuums.

Aus der Physik ist bekannt, daß man sich die Materie diskret aufgebaut vorstellen kann. Dieses diskrete Modell kann unter Berücksichtigung des Größenmaßstabes durch ein hypothetisches Modell ersetzt werden: das Kontinuum. Dabei wird die diskrete Struktur ignoriert und es erfolgt eine Mittelung der Eigenschaften. Diese Mittelung kann im Raum und/oder über die Zeit erfolgen.

*Definition:*

Als Kontinuum kann die abzählbare oder nichtabzählbare Menge von Punkten bezeichnet werden, die den Raum oder einen Teil des Raumes zu jedem Zeitpunkt stetig ausfüllt, es darf zu keinen Überlappungen bzw. Fehlstellen kommen.

Die hier angeführte Definition ist durch eine relative Universalität gekennzeichnet:

- sie schließt Mehrkörpersysteme [22] nicht aus, auch wenn diese vielfach anders modelliert werden,
- die Punkte des Kontinuums müssen nicht trägheitsbehaftet sein, so daß auch thermische und andere Felder behandelt werden können [12],
- es wird kein bestimmter Aggregatzustand gefordert, womit beispielsweise Festkörper und Fluide gleichartig behandelt werden können [23],
- es werden keine Festlegungen bezüglich des Größenmaßstabes getroffen, damit können sogenannte makroskopische, mesoskopische und mikroskopische Kontinuumstheorien formuliert werden, wobei für die erste Gruppe die klassischen Kontinuumstheorien stehen und mit der zweiten und dritten Gruppe der Weg für neuere Entwicklungen frei ist (z. B. Kontinuumsschädigungsmechanik [24] bzw. Mikrokontinuumsmechanik [25]),
- die Dimension des Raumes ist nicht festgelegt (neben den von der Anschauung her offensichtlichen dreidimensionalen Theorien – Euklidscher Raum – gibt es die Möglichkeit der ein- und zweidimensionalen Modellkontinua [26] bzw. der Betrachtung n-dimensionaler Räume mit $n = 4$ [27] – Minkowskischer Raum – bzw. $n > 4$),
- es gibt keine Einschränkungen bezüglich des Freiheitsgrades der Punkte des Kontinuums, so daß neben dem klassischen Kontinuum mit 3 Translationen auch Modellkontinua für Flächen- und Linientragwerke sowie dreidimensionale Körper mit einem Freiheitsgrad je materiellen Punkt des Kontinuums von 6 (3 Translationen, 3 Rotationen) [28] und einem Freiheitsgrad von $f > 6$ [29] betrachtet werden können.

Der Übergang von diskreten Modellen zum Kontinuumsmodell gestattet meist erst eine vom Aufwand her vernünftige Problemanalyse (eine Analyse realer Bauteile, die auf festkörperphysikalischen Betrachtungen basiert, scheint trotz leistungsfähiger Rechentechnik auf absehbare Zeit unrealistisch). Mit diesem Übergang ist auch ein Übergang zu den Methoden der Funktionalanalysis für stetige Funktionen möglich. Daneben scheint jedoch der Ausschluß von Starrkörpersystemen aus Kontinuumsbetrachtungen heute nicht mehr gerechtfertigt. Sobald kontinuumsmechanische Betrachtungen bis zur Lösung konkreter Aufgaben gehen, steht die Frage nach leistungsfähigen Lösungsverfahren. Diese beruhen heute fast immer auf einer Diskretisierung der Struktur. Damit erhält man eine Lösung für eine endliche Anzahl von Modellpunkten. Die Analogie zu Starrkörpersystemen ist damit offensichtlich, so daß die Diskussionen um die Grundlagen der Kontinuumsmechanik zukünftig mehr die Gemeinsamkeiten mit den Starrkörpersystemen herausheben sollten.

Die Frage der Anwendungsgrenzen von Kontinuumsmodellen wird derzeit stark diskutiert. Alle diesbezüglichen Aussagen (Kriterien, Abschätzungen usw.) sind mit Vorsicht zu behandeln. Sie hängen stark vom Maßstab der betreffenden Effekte, von den konkreten Eigenschaften, von der Geschwindigkeit der ablaufenden Prozesse, von entsprechenden Gradienten usw. ab.

Vier Beispiele belegen diese Aussage:

- Als Kriterium für die Anwendung von makroskopischen Kontinuumstheorien (im klassischen Sinn) wird in [23] die Knudsen-Zahl Kn (Verhältnis der freien Weglänge eines Atoms oder Moleküls zwischen 2 Zusammenstößen $\lambda$ und charakteristischer Länge des Kontinuums L) angegeben:
  $Kn = \lambda/L < 1$ – makroskopische Theorie,
  $Kn = \lambda/L \geqslant 1$ – mikroskopische Theorie,
  wobei für Festkörper und Flüssigkeiten $\lambda = 10^{-7}$ cm sowie für Gase $\lambda = 10^{-6}$ cm ist.
- Die Anwendungsgrenzen für das klassische elastische Kontinuum (Cauchy- oder Boltzmann-Kontinuum) sind noch verschwommener [30]: hohe Spannungsgradienten, erzwungene hochfrequente Schwingungen, Kontinua mit ausgeprägter Mikrostruktur (granulare Stoffe, Kristallstrukturen usw.) werden als „Einsatzgebiete" für das Cosserat-Kontinuum (Kontinuum mit einem um 3 erhöhten Freiheitsgrad) angegeben, ohne jedoch diese Aussage zu quantifizieren.
- Für die Anwendung der Kontinuumsschädigungsmechanik (Teilgebiet der Kontinuumsmechanik, das nicht auf dem Postulat vom ungeschädigten Werkstoff basiert) ist die Definition des repräsentativen Volumens (Volumen, das eine „Verschmierung" von im Werkstoff enthaltenen Heterogenitäten und Mikroschädigungen

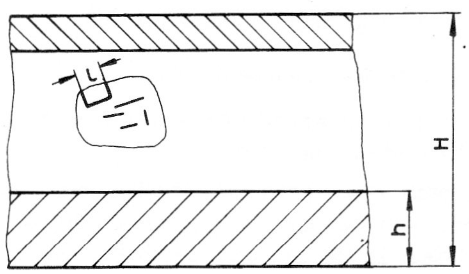


**Bild 1:**
Größenverhältnisse beim Mehrschichtflächentragwerk (mittlere Schicht – Kurzfaser-Matrix-Verbund)

**Tabelle 1:**
**Abhängigkeit der Größe des charakteristischen Volumens vom Werkstoff (bzw. der typischen Inhomogenität)**

| MATERIAL | INHOMOGENITÄT | GRÖSSE DER INHOMOGENITÄT | CHARAKTERISTISCHES VOLUMEN |
|---|---|---|---|
| Metalle, Legierungen | Kristalle, Körner | 1 µm – 0,1 mm | 0,5 x 0,5 x 0,5 mm |
| Polymere | Moleküle | 10 µm – 0,05 mm | 1 x 1 x 1 mm |
| Holz | Fasern | 0,1 mm – 1 mm | 1 x 1 x 1 cm |
| Beton | Kies | ~ 1 cm | 10 x 10 x 10 cm |
| faserverstärkte Komposite | Fasern: Glas Kohlenstoff | 8 – 10 µm | |
| | Bor | 100 – 150 µm | |

gestattet) von Bedeutung. In Tabelle 1 sind Werte für unterschiedliche Werkstoffe angegeben (nach [31], [32]).

- In der Mechanik der Kompositwerkstoffe ist die Angabe des repräsentativen Volumens bei vielen Modifikationen ebenfalls von Bedeutung, da hier auch die Frage nach der Möglichkeit des Ersetzens der heterogenen Struktur durch eine quasihomogene Modellstruktur beantwortet werden muß. Für das auf Bild 1 gezeigte Beispiel ist l eine charakteristische Größe eines Füllstoffpartikels, h eine charakteristische Größe der quasihomogenen Struktur und H eine charakteristische Bauteilabmessung. Gilt dann $l << h << H$, kann zuerst der l-Bereich analysiert werden, danach erfolgt eine Mittelung im h-Bereich, und anschließend kann die Strukturanalyse im H-Bereich realisiert werden [33].

Offensichtlich müssen die Anwendungsgrenzen in jedem konkreten Fall durch den Anwender überdacht werden. Diese Entscheidung wird durch die Modelläquivalenz sowie das Aufwand-Nutzen-Verhältnis beeinflußt.

# 3. Klassische Kontinuumsmechanik

## *3.1. Grundbegriffe*

Die nachfolgenden Ausführungen stellen Sachverhalte in der Kontinuumsmechanik zur Diskussion, wobei zunächst einige Grundbegriffe geklärt werden sollen.

a) Klassische Kontinuumsmechanik

Unter klassischer Kontinuumsmechanik wird an dieser Stelle folgendes verstanden:

- bezüglich des Kontinuumsmodells: jeder materielle Punkt des Kontinuums habe den Freiheitsgrad 3,
- bezüglich der Belastungen: Beschränkung auf thermomechanische Einflüsse,
- hinreichende Glattheit aller Felder bezüglich Zeit und Ort sowie
- ausschließlich phänomenologische Betrachtungsweise.

b) Bezugssysteme

Bei der Darstellung der Grundlagen der Kontinuumsmechanik verwenden die meisten Autoren 2 Betrachtungsweisen:

- die Lagrangesche (körperbezogene, materielle, substantielle) Betrachtungsweise und
- die Eulersche (raumbezogene, räumliche, lokale) Betrachtungsweise.

Auf Bild 2 sind aktuelle und Bezugskonfiguration angegeben. Dabei bedeuten

P – materieller Punkt,
$t, t_o$ – aktueller bzw. Ausgangszeitpunkt (meist $t_o = 0$ – der unbelastete und verzerrungsfreie Zustand),
$V, V_o$ – die entsprechenden Volumina,
$A, A_o$ – die entsprechenden umhüllenden Oberflächen,
$\underline{x}, \underline{a}$ – aktuelle bzw. Ausgangskoordinaten

Damit ergeben sich 2 Darstellungsweisen für die Bewegung

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{a}, t), \tag{3.1}$$

$$\underline{a} = \underline{a}(\underline{x}, t). \tag{3.2}$$

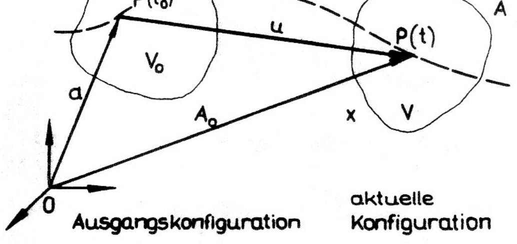


**Bild 2:**
**Bezugssysteme in der Kontinuumsmechanik**

Als Konfiguration eines Körpers wird die stetige und umkehrbar eindeutige Zuordnung (3.1) bzw. (3.2) bezeichnet. Damit sind Überlappung von Teilchen bzw. Fehlstellen ausgeschlossen (Axiom der Kontinuität). Aus den 2 Betrachtungsweisen folgen auch unterschiedliche Zeitableitungen:

– substantielle oder materielle Ableitung bei Lagrangescher Betrachtungsweise

$$\dot{T} = dT/dt = DT/Dt = [\,\partial T(\underline{a}, t)/\,\partial t]_{\underline{a}=\text{konst}}, \qquad (3.3)$$

– materielle Ableitung bei Eulerscher Betrachtungsweise

$$\dot{d}T/dt = \partial T(\underline{x}, t)/\partial t + \dot{\underline{x}} \cdot \partial T(\underline{x}, t)/\partial \underline{x} \qquad (3.4)$$

$\dot{\underline{x}}$ Geschwindigkeitsvektor

Der erste Term in (3.4) stellt die lokale Ableitung dar, der zweite Term die konvektive Änderung.

**Anmerkung 1:**

Die Gln. (3.3) und (3.4) lassen sich auf beliebige Tensoren erweitern.

**Anmerkung 2:**

Entsprechend einem Hinweis von C. Truesdell hat Euler die Lagrangesche Betrachtungsweise und d'Alembert die Eulersche Betrachtungsweise verwendet. Folglich sind die Bezeichnungen historisch nicht gerechtfertigt.

**Anmerkung 3:**

Die materielle Beschreibung stellt das Verfolgen eines fixierten Teilchens dar, bei der räumlichen wird der Prozeß an einer fixierten Stelle beobachtet. Für Strömungen wird daher die räumliche Betrachtung bevorzugt, für die Darstellung der Prinzipien der Mechanik ist jedoch das Geschehen im Raum nicht so wichtig wie das Geschehen im Kontinuum (C. Truesdell [2]).

**Anmerkung 4:**

Neben den hier angeführten Betrachtungsweisen sind in der Literatur weitere angegeben. So findet man z. B. in [2] insgesamt 4 Betrachtungsweisen.

c) Kinematik des Kontinuums

Die Differenz aus $\underline{x}$ und $\underline{a}$ bildet den Verschiebungsvektor $\underline{u}$. Dabei gilt

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{a} = \underline{x}(\underline{a}, t) - \underline{a} = \underline{x} - \underline{a}(\underline{x}, t) = \underline{u}(\underline{a}, t) = \underline{u}(\underline{x}, t) \qquad (3.5)$$

Da auch die Ableitungen nach dem Ort in beiden Systemen realisiert werden können, ergeben sich folgende Beziehungen für die Gradienten des Ortes

$$\nabla_{\underline{a}}\underline{x},\ \nabla_{\underline{x}}\underline{a},\ \nabla_{\underline{a}}\underline{a} = \nabla_{\underline{x}}\underline{x} = \underline{1} \qquad (3.6)$$

Die Gradienten des Ortes sind Tensoren 2. Stufe und zueinander invers. Sie werden auch als Deformationsgradienten bezeichnet. Die geometrische Interpretation läßt sich folgendermaßen angeben: Mit Hilfe der Gradienten des Ortes kann man den Vektor $d\underline{a}$ auf den Vektor $d\underline{x}$ abbilden. Dabei kann es im allgemeinen Fall zu einer Translation, einer Rotation und einer Streckung (Stauchung) kom-

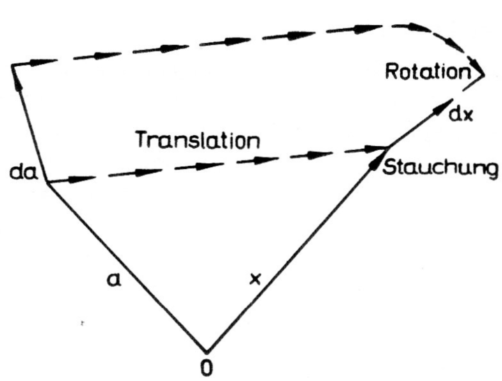


**Bild 3:**
Geometrische Interpretation des Gradienten des Ortes (Reihenfolge Translation – Rotation – Stauchung kann vertauscht werden)

men (Bild 3). Folglich enthält die bisher analysierte Bewegung neben den Verzerrungen auch Starrkörperbewegungen.

Aus den bisherigen Darlegungen ist zu erkennen, daß es mindestens zwei Deformationsmaße (auch Verzerrungsmaße) gibt

$$d\underline{x} \cdot d\underline{x} = d\underline{a} \cdot \nabla_{\underline{a}}\underline{x} \cdot (\nabla_{\underline{a}}\underline{x})^T \cdot d\underline{a} = d\underline{a} \cdot \underline{G} \cdot d\underline{a}, \qquad (3.7)$$

$$d\underline{a} \cdot d\underline{a} = d\underline{x} \cdot \nabla_{\underline{x}}\underline{a} \cdot (\nabla_{\underline{x}}\underline{a})^T \cdot d\underline{x} = d\underline{x} \cdot \underline{g} \cdot d\underline{x} \qquad (3.8)$$

$\underline{G}$ – Cauchy-Greensches Verzerrungsmaß
$\underline{g}$ – Almansisches Verzerrungsmaß

**Anmerkung 1:**

Für Starrkörperbewegungen gilt

$\underline{x} = \underline{x}_0 + (\underline{a} - \underline{a}_0) \cdot \underline{0}$ mit $\underline{0} \cdot \underline{0}^T = \underline{1}$

Damit erhält man $\underline{G} = \underline{g} = \underline{1}$.

**Anmerkung 2:**

Die zu $\underline{G}$ und $\underline{g}$ inversen Tensoren ($\underline{G}^{-1}$, $\underline{g}^{-1}$ – Fingersches Maß) sind ebenfalls Deformationsmaße.

**Anmerkung 3:**

Unter Anwendung des polaren Zerlegungssatzes gilt

$\nabla_{\underline{a}}\underline{x} = \underline{U} \cdot \underline{0} = \underline{0} \cdot \underline{V}$

$\underline{U}$, $\underline{V}$ – positiv-definite symmetrische Tensoren (Links-Streck- bzw. Rechts-Streck-Tensor)

Damit lassen sich $\underline{G}$ und $\underline{g}$ wie folgt darstellen

$\underline{G} = \underline{U}^2$, $\underline{U} = \underline{G}^{1/2}$, $\underline{g}^{-1} = \underline{V}^2$, $\underline{U} = (\underline{g}^{-1})^{1/2}$

**Anmerkung 4:**

Auf der Grundlage des Rechts-Streck-Tensors kann man das Henckysche Deformationsmaß darstellen

$\underline{H} = \ln \underline{V}$

**Anmerkung 5:**

Weitere Deformationsmaße lassen sich ohne Schwierigkeiten konstruieren. Dies ist vielfach für spezielle dynamische Größen notwendig. Da diese Fragen hier nicht weiter behandelt werden, sei an dieser Stelle auf [34] verwiesen.

**Anmerkung 6:**

**Im Zusammenhang mit der Darlegung der Grundlagen der Kontinuumsmechanik tritt oft die Frage auf, ob der polare Zerlegungssatz oder der Weg über die Deformationsmaße günstiger ist. Dazu wird in [9] ausgeführt, daß die Deformationsmaße unmittelbar aus den Gradienten des Ortes ermittelbar sind, während die Bestimmung der Streck-Tensoren die Berechnung der Quadratwurzel erfordert. Letzteres stellt bei der numerischen Realisierung kein großes Problem dar.**

Unter Beachtung der Gln. (3.5), (3.7) sowie (3.8) erhält man für den Cauchy-Greenschen bzw. Almansischen Verzerrungstensor

$$\underline{C} = 1/2(\underline{G} - 1) = 1/2[\underline{\nabla}_{\underline{a}}\underline{u}\,(\underline{\nabla}_{\underline{a}}\underline{u})^T + \underline{\nabla}_{\underline{a}}\underline{u}\cdot(\underline{\nabla}_{\underline{a}}\underline{u})^T] \quad (3.9)$$

$$\underline{A} = 1/2(\underline{1} - \underline{g}) = 1/2[\underline{\nabla}_{\underline{x}}\underline{u} + (\underline{\nabla}_{\underline{x}}\underline{u})^T + \underline{\nabla}_{\underline{x}}\underline{u}\cdot(\underline{\nabla}_{\underline{x}}\underline{u})^T] \quad (3.10)$$

**Anmerkung:**

Ausgehend von den weiteren Darstellungsformen für die Deformationsmaße lassen sich auch weitere Verzerrungstensoren konstruieren (vgl. [34]).

d) dynamische Größen

In der Kontinuumsmechanik gibt es 2 Klassen von Kräften: Massenkräfte (Wechselwirkungen ohne Kontakt) und Kontaktkräfte (Wechselwirkungen über eine Kontaktfläche). Die Massenkräfte werden auf die Masse bzw. das Volumen, die Kontaktkräfte auf eine Kontaktfläche bezogen. Wichtigste Beispiele für Massenkräfte sind Gewichtskraft, Fliehkraft sowie weitere Potentialkräfte, Beispiele für Kontaktkräfte sind Druck, flächenbezogene Reaktionskräfte sowie Spannungen (entsprechend dem Euler-Cauchyschen Schnittprinzip).

### *3.2. Bilanzgleichungen*

a) allgemeine Bilanzgleichung

Eine der Möglichkeiten der Ableitung der materialunabhängigen Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik besteht in der Formulierung bestimmter Bilanzen. Allgemein heißt das, daß die zeitliche Änderung der Bilanzgröße im Kontinuum mit dem Zuwachs im Kontinuum und dem Fluß über die umhüllende Oberfläche in Verbindung gebracht wird (Bild 4). Die Bilanzgleichung kann global (integral) und lokal (differentiell) angegeben werden.

Die integrale Form lautet [2]

$$\frac{D}{Dt}\int_{(V)} \rho^{(n)}\underline{\Psi}\,dV = \int_{(A)} \underline{N}\cdot{}^{(n+1)}\underline{\Phi}\,dA + \int_{(V)} \rho^{(n)}\underline{\Sigma}\,dV \quad (3.11)$$

${}^{(n)}\underline{\Psi}$, ${}^{(n)}\underline{\Sigma}$ – Tensorfelder der Stufe n, ${}^{(n+1)}\underline{\Phi}$ – Tensorfeld der Stufe n+1, $\varrho$ – Dichte, $\underline{N}$ – äußere Normale

Der Übergang zur lokalen Bilanzgleichung ist mit Hilfe des Satzes von Gauß und Ostrogradskij unter den hier gültigen Annahmen leicht realisierbar

$$\frac{D}{Dt}\rho^{(n)}\underline{\Psi} = \underline{\nabla}_{\underline{x}}\cdot{}^{(n+1)}\underline{\Phi} + \rho^{(n)}\underline{\Sigma} \quad (3.12)$$

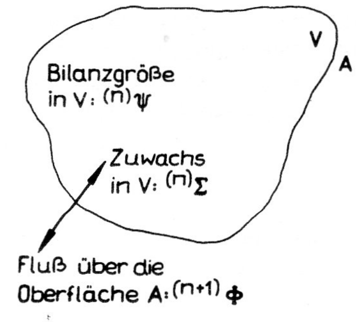


**Bild 4:**
**Zur allgemeinen Bilanzgleichung**

**Anmerkung:**

Die Bilanzgleichungen stehen im engen Zusammenhang mit den Erhaltungssätzen der Mechanik. Versteht man unter einem Erhaltungssatz, daß die zeitliche Änderung der Erhaltungsgröße Null ist bzw. das entsprechende Integral konstant, so kann man die Erhaltungssätze als Sonderfall der Bilanzgleichungen auffassen.

b) spezielle Bilanzgleichungen

Mit der Formulierung der speziellen Bilanzgleichungen wird im allgemeinen die Darstellung der werkstoffunabhängigen Grundlagen der Kontinuumsmechanik abgeschlossen. Ausgehend von den Gln. (3.11) bzw. (3.12) lassen sich die speziellen Bilanzen der klassischen Kontinuumsmechanik im Rahmen der hier getroffenen Annahmen methodisch gleich aufbauen, wobei lediglich die Bilanzgröße, der Fluß und der Zuwachs zu definieren ist. In Tabelle 2 sind die Zusammenhänge für die Bilanzgrößen Masse, Impuls, Drehimpuls, Energie und Entropie angegeben.

**Anmerkung 1:**

2 Bilanzen, die in Tabelle 2 angegeben sind, werden meistens anders bezeichnet. Bezüglich der Masse gilt die vorhergehende Anmerkung – die Massebilanz reduziert sich in unserem Fall zum Masseerhaltungssatz. Die Entropiebilanz stellt für bestimmte Fälle eine Ungleichung dar, so daß in den Gln. (3.11) und (3.12) statt des Gleichheitszeichens das Symbol "≥" (nicht kleiner) stehen müßte.

**Anmerkung 2:**

Die Entropiebeziehung ist im Gegensatz zu den übrigen Gleichungen nicht unumstritten. Es gibt vermutlich so viele Fassungen des 2. Hauptsatzes wie Autoren [35]. Die hier angegebene Form ist daher nur eine Möglichkeit.

Die Auswertung der Tabelle 2 und der Gl. (3.12) führt im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik auf folgende lokale Beziehungen (unter Anwendung der Reynoldsschen Transporttheorems [36]):

$$\partial\rho/\partial t + \underline{\nabla}_{\underline{x}}\cdot(\underline{v}\rho) = D\rho/Dt + \rho\,\underline{\nabla}_{\underline{x}}\cdot\underline{v} = 0 \quad (3.13)$$

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}}\cdot\underline{\sigma} + \rho\underline{k} = \rho\dot{\underline{v}} \quad (3.14)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T \quad (3.15)$$

$$\rho\dot{\underline{u}} = \underline{\sigma}\,..\,\underline{\nabla}_{\underline{x}}\underline{v} + b - \underline{\nabla}_{\underline{x}}\cdot\underline{h} \quad (3.16)$$

**Tabelle 2:**
**Bilanzen der klassischen Kontinuumsmechanik**

| BILANZGRÖSSE | FLUSS | ZUWACHS | BEZEICHNUNG |
|---|---|---|---|
| ${}^{(n)}\Psi$ | $N \cdot {}^{(n+1)}\phi$ | ${}^{(n)}\Sigma$ | |
| 1 | 0 | 0 | Massebilanz |
| v<br>Geschwindigkeit | $\sigma_N = N \cdot \sigma$<br>Spannungsvektor | k<br>Volumenkräfte | Impuls-<br>bilanz |
| $x \times v$ | $x \times \sigma_N$ | $x \times k$ | Drehimpulsbilanz |
| $\varepsilon = t + u$<br>vollständige Energie<br>– Summe aus kine-<br>tischer und innerer<br>Energie | $\sigma_N \cdot v - N \cdot h$<br>Leistung des Spannungs-<br>vektors und des<br>Wärmestroms | $k \cdot v + b$<br>Leistung der Volumen-<br>kräfte und nicht-<br>mechanische Quellen<br>bzw. Senken b | Energie-<br>bilanz |
| s<br>innere Entropie | $1/\Theta N \cdot h$<br>$\Theta$ Temperatur | $1/\Theta\, b$ | Entropie-<br>bilanz |

$$\rho\dot{\underline{s}} \geqslant 1/\Theta\,(b - \underline{\nabla}_x \cdot \underline{h}) + (1/\Theta^2)\,\underline{h} \cdot \underline{\nabla}_x\Theta \qquad (3.17)$$

Damit stehen alle benötigten werkstoffunabhängigen Gleichungen bereit. Für die weitere Auswertung sind insbesondere von Bedeutung der Übergang zu

- den Koordinaten der Ausgangskonfiguration (unter Verwendung des II. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors statt des Cauchyschen Spannungstensors $\underline{\sigma}$),
- der Rayleighschen Dissipationsfunktion (f – freie Helmholtzsche Energie)

  $$\Pi = \sigma \cdot\cdot\, \underline{\nabla}_x\underline{v} - \varrho\dot{f} - \varrho s\dot{\Theta},$$

  womit $\Pi = 0$ (keine Dissipation) und $\Pi \neq 0$ (Energiedissipation) ein Klassifikationsmerkmal für das System gilt,
- weiteren Potentialdarstellungen (statt f wird beispielsweise die Gibbssche freie Energie eingeführt [37]) und
- Sonderfällen (z. B. rein-mechanische Theorie, ...)

### *3.3. Werkstoffabhängige Gleichungen[2)]*

Die bisherigen Ausführungen waren hauptsächlich werkstoffunabhängig (die wenigen materialabhängigen Annahmen bestehen z. B. in der Voraussetzung, daß kein polares Material betrachtet wird). Für die weitere Analyse soll zunächst das System der Feldgleichungen (3.13) bis (3.17) betrachtet werden. Gl. (3.17), die für dissipative Prozesse zur Ungleichung wird, bildet eine gewisse Ausnahme. Sie soll hier jedoch nicht aus dem System der Feldgleichungen herausgelöst werden. Das System enthält insgesamt 19 unabhängige Felder ($\varrho$ – 1 Feld, $\underline{x}$ bzw. $\underline{v}$ – 3, $\underline{\sigma}$ – 9, $\underline{h}$ – 3, $\Theta$ – 1, u – 1 und s – 1) bei 9 Feldgleichungen [(3.13), (3.16), (3.17) jeweils 1 Gleichung, (3.14), (3.15) jeweils 3 Gleichungen], wobei $\underline{k}$ und b als gegebene Felder angesehen werden. Damit ist das System stark unterbestimmt.

Um das System (3.13) bis (3.17) einer Lösung zuführen zu können, sind weitere Gleichungen notwendig: die sogenannten Konstitutivgleichungen (auch Materialgleichungen, Stoffgleichungen usw.). Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen den zeitlichen Abläufen der phänomenologischen Größen Beanspruchung, Verformung, Temperatur, Wärmeaufnahme, Temperaturgefälle und Wärmefluß [38]. Einfachste Beispiele sind lineare Verknüpfung von Temperaturgradient und Wärmestromvektor (Fouriersches Gesetz), von Spannung und Verzerrung (Hookesches Gesetz) sowie von Spannungen und Verzerrungsgeschwindigkeit (Newtonsches Fluid). Bild 5 stellt Methoden zur Formulierung von Konstitutivgleichungen dar. Für den Mechaniker sind dabei die mathematisch-mechanisch begründeten Konstitutivgleichungen von besonderer Bedeutung, so daß hier nur diese Methoden weiter erläutert werden sollen.

2) Der Abschnitt steht im Zusammenhang mit Problemen der INTSEM-Vorlesung von Prof. Dr. sc. techn. H. Günther (IMECH der AdW der DDR) „Materialtheorie und spezielle Materialgleichungen". Bei der Ausarbeitung wurde das Vorlesungsmaterial teilweise verwendet, wofür der Autor Prof. Günther danken möchte.

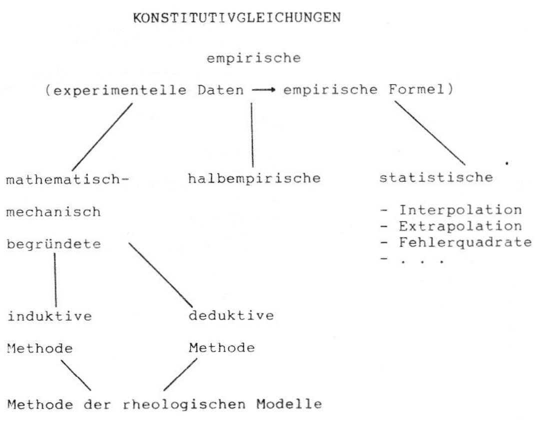


**Bild 5:**
Methoden der Formulierung von Konstitutivgleichungen

Die induktive Methode ist heute die am häufigsten praktizierte mathematisch-mechanische Methodik der Formulierung von Konstitutivgleichungen. Eine mögliche Vorgehensweise ist auf Bild 6 dargestellt. Andere induktive Schlüsse sind denkbar: statt der aufgezeigten Verallgemeinerung sind auf jeder Ebene Übergänge zu nichtelastischen Materialgesetzen möglich. Bei den entsprechenden Verallgemeinerungen ist zu beachten, daß alle auftretenden Werkstoffkonstanten experimentell zu bestimmen sind, so daß hier offensichtlich Grenzen für die Anwendung existieren. Ein Beispiel für die induktive Methode ist in [39] enthalten.

Die deduktive Methode geht den umgekehrten Weg. Ausgehend von physikalischen Prinzipien werden universelle oder wenigstens für große Klassen von Materialien gültige Einschränkungen, die letztlich auch dem Experimentator bei seiner Arbeit helfen können, formuliert [17]. Die wichtigsten Prinzipien sind ([12], [19], [23])

- physikalische Zulässigkeit,
- Kausalität,
- Äquipräsenz,
- Determinismus,
- lokale Wirkung
- materielle Objektivität,
- materielle Invarianz (materielle Symmetrie),
- Gedächtnis.

Hookesches Gesetz (R. Hooke, 1676/78): $\sigma = E\,\varepsilon$

- lineares Gesetz
- elastisches Material

Einachsigkeit → Mehrachsigkeit

- Einachsigkeit
- kleine Verzerrungen
- kleine Verschiebungen
- Isotropie
- 1 Werkstoffkonstante

verallgemeinertes Hookesches Gesetz: $\sigma_x = 1/E\,|\sigma_x - \nu\,(\sigma_y + \sigma_z)|$

...

...

$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$

...

...

Isotropie → Anisotropie

2 Werkstoffkonstanten

anisotropes Elastizitätsgesetz: $\sigma = {}^{(4)}E \cdot\cdot\, \varepsilon$

- ${}^{(4)}E$ Hookescher Tensor mit

lineares Gesetz → nichtlineares Gesetz bei kleinen Verzerrungen

21 Werkstoffkonstanten (Green-Elastizität)

36 Werkstoffkonstanten (Cauchy-Elastizität)

nichtlineares Elastizitätsgesetz: $\varepsilon = \partial U(\sigma)/\partial\sigma$

U Ergänzungsenergie

$$U(\sigma) = U_o + N \cdot\cdot\, \sigma + 1/2\,\sigma \cdot\cdot\, {}^{(4)}N \cdot\cdot\, \sigma + 1/3(\sigma \cdot\cdot\, {}^{(6)}N \cdot\cdot\, \sigma) \cdot\cdot\, \sigma + \dots$$

| Eigen-verzerrungen | lineare Theorie | quadratische Theorie |
|---|---|---|
| 6 Konstanten | 21 Konstanten | 56 Konstanten |

kleine Verzerrungen → große Verzerrungen

**Bild 6:**
Beispiel für die induktive Methode (elastisches Werkstoffverhalten)

Die damit erzeugbaren Materialfunktionale stellen immer noch sehr allgemeine Ausdrücke dar, so daß im allgemeinen weitere Annahmen getroffen werden müssen.

Im Zusammenhang mit den Schwierigkeiten bei der Formulierung von Konstitutivgleichungen haben sich in den letzten Jahren weitere Methoden herausgebildet. Neben der Methode der rheologischen Modelle sind dabei hauptsächlich Innere-Variable-Theorien zu nennen. Die Methode der rheologischen Modelle geht von einfachen Modellkörpern mit grundlegenden Eigenschaften (Elastizität, Plastizität, ...) aus, und die Modellierung komplizierter Materialeigenschaften erfolgt dann durch „Zusammenschaltung" einfacher Modelle (Reihenschaltung, Parallelschaltung, kombinierte Schaltungen). Die Methode der rheologischen Modelle, deren Ausgangspunkt um 1920 liegt (E. C. Bingham, 1919 Modellierung von Ölfarbe), ist in ihrer klassischen Form in [40] zusammengefaßt. Für thermomechanische Größen wurde sie von Palmow (1984) [41] erweitert. Eine monografische Zusammenfassung mit starker Hinwendung zu mathematischen Aspekten erfolgte in [38].

Ausgangspunkt der Innere-Variable-Theorien ist ein Aufsatz von B. Coleman und M. Gurtin aus dem Jahre 1967 [42]. Bis heute wird um die Interpretation der inneren Variablen gestritten: sie sind offensichtlich zur Beschreibung rheologischer Effekte bzw. innerer Zustandsänderungen [43], d. h. dissipativer Prozesse, geeignet. Bekanntestes Beispiel für die Anwendung innerer Variabler ist die Plastizitätstheorie. Dabei wird bei kleinen Verzerrungen von einer Aufspaltung der Verzerrungen $\varepsilon$ in thermoelastische und plastische Verzerrungen in der Form

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{thermoelastisch}} + \varepsilon^{\text{plastisch}}$$

ausgegangen. Während $\varepsilon$ eine makroskopische (direkt meßbare) Variable darstellt, sind die beiden Anteile innere Variable. Weitere innere Variable werden z. B. zur Kennzeichnung der Verfestigung eingesetzt [44]

- skalare Variable zur Beschreibung der isotropen Verfestigung (gleichmäßiges Aufweiten der Fließfläche),
- Tensor 2. Stufe zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung (Translation der Fließfläche im Spannungsraum),
- weitere Größen für die anisotrope Verfestigung.

Die Verwendung von inneren Variablen sollte jedoch nicht als „Rettungsanker" der Materialtheorie angesehen werden, da erstens die Zuordnung von Variablen zur Gruppe der inneren Variablen eine willkürliche Angelegenheit ist (sie hängt stark vom Beobachtungsmaßstab ab) und zweitens neben der Gruppe der Konstitutivgleichungen noch eine Gleichung bzw. Gleichungsgruppe zu bestimmen ist – die kinetischen Gleichungen (Evolutionsgleichungen) für die inneren Variablen.

Die Formulierung von werkstoffabhängigen Gleichungen ist eine anspruchsvolle Aufgabe für Mechaniker und Werkstofftechniker, da im Zusammenhang mit dem Abgehen von empirischen Materialgleichungen und der Notwendigkeit einer zunehmenden Einbeziehung der Kontinuumsmechanik in die Strukturanalyse eine Reihe von Lücken noch zu schließen sind. Letztere treten insbesondere bei der Modellierung neuer Werkstoffe auf (z. B. neue Konstruktionsstähle, biologische Materialien, Komposite, ...).

# 4. Erweiterungen der klassischen Kontinuumsmechanik

**Erweiterungen der klassischen Kontinuumsmechanik sind insbesondere mit dem Abgehen von den Grundannahmen des Abschnittes 3.1. a) verbunden:**

- **Anzahl der Freiheitsgrade**
  - **Cosserat-Modell (Freiheitsgrad 6),**
  - **mikropolares Modell,**
  - **multipolares Modell,**
  - **...,**
- **Einbeziehung nichtthermomechanischer Belastungen**
  - **elektromagnetische,**
  - **Strahlungen,**
  - **chemische,**
  - **...,**
- **keine hinreichend glatten Felder**
  - **Bruchmechanik,**
  - **Stoßwellen,**
  - **...,**
- **Verlassen des makroskopischen Bereichs**
  - **Mesotheorien,**
  - **Mikrotheorien,**
  - **...,**

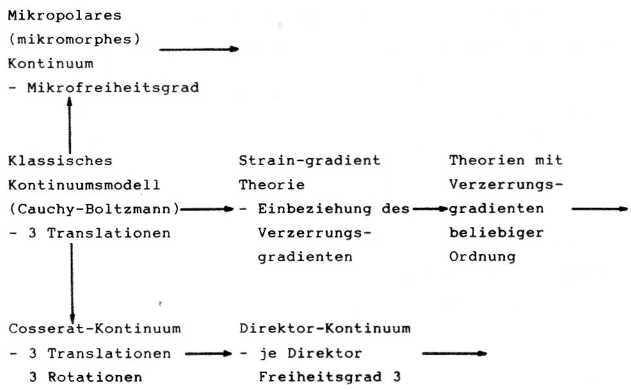


**Bild 7a:**
**Kinematische Erweiterungen des klassischen Kontinuumsmodells (bezogen auf dreidimensionale Räume)**

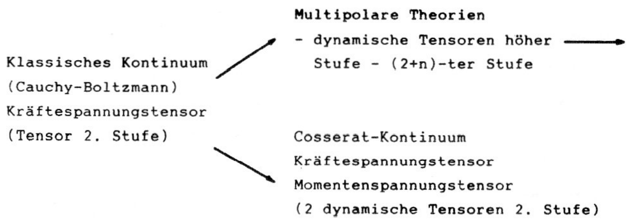


**Bild 7b:**
**Dynamische Erweiterungen**

| Strukturebene | atomar | mikroskopisch (Gefüge) | makroskopisch |
|---|---|---|---|
| Charakteristische Länge | $10^{-10}$ | $10^{-7}$ $10^{-4}$ | $10^{-1}$m |
| Schädigung | Gitterdefekte | Mikrorisse, Poren | Makrorisse |
| Wissenschafts-disziplin | Festkörper-physik | Werkstoff-wissenschaft | Kontinuums-mechanik |
| Ziel | Deformations-mechanismen | Struktur-Eigenschafts-Beziehungen | phänomenologische Betrachtung (Grundlage der ingenieurmäßigen Strukturanalyse) |
| Erweiterung der Grundannahmen | | → Makroriß<br>→ Schädigungsfeld | |
| Neue Wissenschafts-schaftsdisziplin | | → Bruchmechanik<br>→ Schädigungsmechanik | |
| Beispiele für Grenzkonzepte | Rabotnowsche Schädigungsfunktion $D_c$, Kachanovsche Kontinuitätsfunktion $\Psi_c$ | Bruchkriterien<br>– Irwin: $K_{I_c}$...<br>– COD<br>– J-Integral: Cherepanov Rice | Fließbedingungen:<br>Tresca, v. Mises<br>Malmeister,<br>Wu-Tsai |

**Bild 8:**
**Erweiterung des Analysebereichs der Kontinuumsmechanik**

Zu diesen Erweiterungen gab es in den letzten Jahren zahlreiche Publikationen. Eine große Gruppe war u. a. den Anwendungen des Cosserat-Kontinuums gewidmet (monografische Zusammenfassung in [13]). Für eine breite ingenieurmäßige Anwendung fehlten jedoch vielfach die Materialkennwerte (im isotropen Fall sind bei vorausgesetzter linearer Elastizität statt der beiden Laméschen Koeffizienten 6 Kennwerte zu ermitteln). Andererseits werden in den letzten Jahren insbesondere auch granulare Kontinua [45] bzw. regelmäßig strukturierte Kontinua bei ihrer quasihomogenen Modellierung [46] erfolgreich mit Hilfe der Cosseratschen Modellvorstellungen analysiert. Weitere Theorien, die auf einer Erweiterung der Kinematik (Erhöhung des Freiheitsgrads, Einführung eines Mikrofreiheitsgrads, Einbeziehung von Deformationsgradienten höherer Ordnung) bzw. der Beschreibung mit weiteren Spannungstensoren beruhen, sind auf Bild 7 dargestellt (vgl. auch [29], [47]).

Im Zusammenhang mit der Berücksichtigung nichtthermomechanischer Effekte ist es notwendig, die Anzahl der Bilanzen zu erhöhen bzw. die bestehenden Bilanzen zu erweitern. Z. B. sind bei der Überlagerung von thermomechanischen und elektromagnetischen Feldern die Maxwellschen Gln. einzubeziehen [12]. Wenn alle möglichen Feldkopplungen beachtet werden, nehmen die Lösungsschwierigkeiten zu. In diesem Zusammenhang sind eine Reihe von Näherungen erarbeitet worden (vgl. u. a. [48], [49]).

Bezüglich der Glattheit der Felder ist neben „Stoßwellen" die Bruchmechanik am meisten in der Diskussion. Dies hängt mit der großen Praxisrelevanz entsprechender Aufgaben zusammen. Einschätzungen zum heutigen Stand der Bruchmechanik sind u.a. in [50], [51] zu finden. Aufgrund einiger Probleme (schlechte Modellierungsmöglichkeiten von Rißfeldern usw.) werden zunehmend Versuche unternommen, den Analysebereich der Kontinuumsmechanik zu erweitern (Bild 8). In diesem Zusammenhang kommt es u. a. zur Herausbildung der Kontinuumsschädigungsmechanik [52], [53].

## 5. Ausblick

Die Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Kontinuumsmechanik werden zukünftig eher noch zu- als abnehmen, was durch zahlreiche Trendstudien der letzten Jahre belegt wird (vgl. dazu u. a. [54] bis [57]). Dabei gibt es folgende Schwerpunkte

- Grundlagen der Kontinuumsmechanik
- Modellierung von unterschiedlichen Werkstoffen
- Strukturanalyse,
- Numerische Mechanik,
- Experimentelle Mechanik.

Dabei wird immer wieder unterstrichen, daß die Forschungen durch Anwendungen stimuliert werden bzw. in Anbetracht der Computerisierung erstmals mit Erfolg angegangen werden können. Gleichzeitig wird darauf verwiesen, daß es zunehmend zu einer interdisziplinären Zusammenarbeit (z. B. von Festkörpermechanikern, Werkstofftechnikern und Festkörperphysikern) kommt, da der Forschungsgegenstand immer mehr in Zwischengebieten angesiedelt wird (vgl. dazu u. a. Ausführungen zur Mikromechanik in [58], zur Mesomechanik in [59]). Die Aufgaben der Modellierung von Werkstoffen sind keineswegs nur im Bereich der Hochtechnologie angesiedelt. Auch klassische Werkstoffe sollen zunehmend „echt" beschrieben werden, so daß u. a. die Mikrostruktur besser einbezogen wird ([55], [60]). Ein Ausdruck für die neuen Trends ist weltweit die Herausbildung eines Forschungsgebietes „Werkstoffmechanik", welches insbesondere durch Bedürfnisse der Industrie angeregt wird [57]. Damit verbunden ist sicher auch eine zukünftige Einordnung in die Aus- und Weiterbildung. Das Gebiet „Werkstoffmechanik" könnte auch dazu beitragen, daß die derzeitige Lücke zwischen Mikro- und Makromodellierung geschlossen werden kann (entsprechende Voraussetzungen von Seiten der Numerik existieren teilweise schon).

### LITERATUR


[1] Naue, G.: Kontinuumsbegriff und Erhaltungssätze in der Mechanik seit Leonhard Euler. – In: Technische Mechanik. – Magdeburg 5 (1984) 4. – S. 62 – 66.

[2] Truesdell, C.: A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: The John Hopkins University, 1972.

[3] Hamel, G.: Theoretische Mechanik – Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. – Berlin (West) u. a.: Springer, 1949.

[4] Herglotz, G.: Vorlesungen über Mechanik der Kontinua. – Leipzig: B. G. Teubner, 1985 (Teubner-Archiv zur Mathematik, Band 3).

[5] Cosserat, E. et F.: Theorie des corps deformables. – Paris: Herman, 1909.

[6] Analysis and Thermomechanics – A Collection of Papers Dedicated to W. Noll (Editors: B. D. Coleman, M. Feinberg and J. Serrin). – Berlin (West) u. .a.: Springer, 1987.

[7] v. Mises, R.: Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua. – Proc. III. Int. Congr. Appl. Mech., Stockholm, 1930.

[8] Ильюшин, А. А.: Механика сплошной среды. – Москва: Изд. МГУ, 1978.

[9] Лурье, А. И.: Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980.

[10] Новожилов, В. В.: Основы нелинейной теории упругости. – Ленинград, Москва: Гостехиздат, 1948.

[11] Работнов, Ю. Н.: Механика деформируемого твердого тела. – Москва: Наука, 1979.

[12] Седов, Л. И.: Механика сплошной среды. – Москва: Наука, 1973 (том 1), 1976 (том 2).

[13] Nowacki, W.: Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford u. a.: Pergamon, 1985.

[14] Germain, P.: Cours de mècanique des milieux continus. – Paris: Masson, 1973.

[15] Ziegler, H.: An introduction to thermomechanics. – Amsterdam u. a.: North-Holland, 1983.

[16] Becker, E., Bürger, W.: Kontinuumsmechanik. – Stuttgart: B. G. Teubner, 1975.

[17] Müller, I.: Thermodynamik. – Düsseldorf: Bertelsmann, 1973.

[18] Prager, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. – Basel: Birkhäuser, 1961.

[19] Truesdell, C., Noll, W.: Non-linear Theories of Mechanics. – In: S. Flügge's Handbuch der Physik. Berlin (West) u. a.: Springer, 1965. – Bd. III/3.

[20] Interdisziplinäre Probleme der Festkörper- und Fluidmechanik (Hrsg.: TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens). – Studientexte. – Dresden: TU Dresden. – Heft 3/86.

[21] Altenbach, J.; Fischer, U.; Göldner, H.; Holzweißig, F.; Kosmowski, I. (Herausgeber): Fachlexikon Technische Mechanik. – Leipzig: VEB Fachbuchverlag (in Vorbereitung).

[22] Schielen, W.: Technische Dynamik. – Stuttgart: B. G. Teubner, 1986.

[23] Chung, T. J.: Continuum Mechanics. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall International, 1988.

[24] Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L.: Mécanique des matériaux solides. – Paris: Dunod, 1985.

[25] Michel, B. u. a.: Über das Wechselverhältnis von Kontinuumsmechanik und Strukturphysik fester Kontinuität. – Berlin u. a.: AdW der DDR, 1984. – FMC – Series No. 7.

[26] Ericksen, J. L., Truesdell, C.: Exact Theorie of Rods and Shells. – In: Arch. Rat. Mech. Anal. – Berlin (West) 1 (1958). – p. 295 – 323.

[27] Sedov, L. I.: A Thermodynamic Approach to the Basic Variational Equation for Building Models of Continous Media. – In: Macroscopic Theories of Matter and Fields (ed. by L. I. Sedov). – Moscow: Mir, 1983.

[28] Schäfer, H.: Das Cosserat-Kontinuum. – In: ZAMM. – Berlin 47 (1967) 8. – S. 485 – 498.

[29] Rothert, H., Zastrau, B.: Herleitung einer Direktortheorie für Kontinua mit lokalen Krümmungseigenschaften. – In: ZAMM. – Berlin 61 (1981). – S. 567 – 581.

[30] Новацкий, В.: Теория упругости. – Москва: Мир, 1975.

[31] Lemaitre, J., Duffailly, J.: Damage measurements. – In: Engineering Fracture Mechanics. – New York 28 (1987) 5/6. – p. 643 – 661.

[32] Баничук, Н. В., Кобелев, В. В., Рикардс, Р. Б.: Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1988.

[33] Болотин, В. В., Новичков, Ю. Н.: Механика многослойных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1980.

[34] Macvean, D. B.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. – In: ZAMP. – Zürich 19 (1968). – S. 157 – 184.

[35] Muschik, W.: Thermodynamische Theorien, Überblick und Vergleich. – In: ZAMM. – Berlin 61 (1981). – S. T 213 – T 219.

[36] Schneider, M.: Satellitengeodäsie. – Mannheim u. a.: B. I. Wissenschaftsverlag, 1988.

[37] Burke, K., Cozzarelli, F. A.: On the Thermodynamic Foundations of strain-dependent Creep Damage and Rupture in Three Dimensions. – In: Int. J. Solids Structures. – New York 20 (1984) 5. – p. 487 – 497.

[38] Krawietz, A.: Materialtheorie – Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens. – Berlin (West) u. a.: Springer, 1986.

[39] Zoločevskij, A., Konkin, V., Moračkovskij, O., Koczyk, S.: Eine Theorie zur nichtlinearen Verformung anisotroper Körper und ihre Anwendung auf die Berechnung des Kriechverhaltens dünner Schalen. – In: Technische Mechanik. – Magdeburg 6 (1985) 4. – S. 27 – 36.

[40] Reiner, M.: Rheologie in elementarer Darstellung. – Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1968.

[41] Palmow, W. A.: Rheologische Modelle für Materialien bei endlichen Deformationen. – In: Technische Mechanik. – Magdeburg 5 (1984) 4. – S. 20 – 31.

[42] Coleman, B. D., Gurtin, M. E.: Thermodynamics with internal state variables. – In: J. Chem. Phys. – New York 47 (1967) 2. – p. 597 – 613.

[43] Perzyna, P.: Internal variable description of plasticity. – In: Problems of Plasticity (ed. by. A. Sawczuk). – Leyden: Noordhoff, 1974. – p. 145 – 176.

[44] Chen, W. F., Han, D. J.: Plasticity for Structural Engineers. – New York u. a.: Springer, 1988.

[45] Becker, M., Hauger, W.: Granular Material – An Experimental Realization of a Plastic Cosserat Continuum? – In: Mechanics of inelastic media und Structures (ed. by O. Mahrenholtz, A. Sawczuk). – Warszawa, Poznan: PWN, 1982. – p. 24 – 39.

[46] von Broock, U.: Zur Anwendung des elastischen Cosserat-Kontinuums bei regelmäßig strukturierten Scheiben. – Düsseldorf: VDI-Verlag, 1982. – Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 1 (Konstruktionstechnik, Maschinenelemente), Nr. 92.

[47] Kröner, E.: Interrelations between various Branches of Continuum Mechanics. – In: Mechanics of Generalized Continua. – Berlin (West) u. a.: Springer, 1967. – S. 330 – 340.

[48] Schmidt, R.: Magnetoelastodynamik – Aspekte der Theorienentwicklung. – Vortrag im Rahmen des INTSEM-Kurses „Festkörpermechanik", April 1989 (unveröffentlicht) [vgl. auch Schmidt, R., Diss B, TU Dresden, 1989].

[49] Nowacki, W.: Elektry elektromagnetiyczne w stałych ciałach odksztalcalnych. – Warszawa: PWN, 1983.

[50] Blumenauer, H., Pusch, G.: Technische Bruchmechanik. – Leipzig: VEB Dt. Verlag für Grundstoffindustrie, 1987.

[51] Hahn, H.-G.: Wege und Ziele der Konzepte der Bruchmechanik. – In: Technische Mechanik. – Magdeburg 8 (1987) 1. – S. 10 – 21.

[52] Continuum Damage Mechanics – Theory and Applications (ed. by D. Krajcinovic, J. Lemaitre). – Wien, New York: Springer, 1987 (CISM – Courses and Lectures No. 295).

[53] Altenbach, H., Blumenauer, H.: Anwendung der Schädigungsmechanik. – In: Neue Hütte. – Leipzig 34 (1989) 6. – S. 214 – 219.

[54] Solid Mechanics Research Trends and Opportunities (Report Editor: J. R. Rice). – In: Applied Mechanics Reviews. – New York 38 (1985) 10. – p. 1247 – 1308.

[55] Kitawaga, H.: Micro- and Macroaspects in Computational Mechanics. – In: JSME International Journal. – Tokyo 30 (1987) 267. – p. 1361 – 1368.

[56] Ashby, M. F.: Technology of the 1990's: Advanced materials and predictive design. – In: Phil. Trans. R. Soc. Lond. – London A322 (1987). – p. 393 – 407.

[57] Sayir, M.: Mechanik im Jahre 2000. – In: Technische Rundschau. – Bern (1989) 2. – S. 26 – 31.

[58] Michel, B.: Die Kontinuitätsgleichung als wichtige Bilanzgleichung in Festkörpermechanik und Fluidmechanik. – In: [20].

[59] Haritos, G. K. u. a.: Mesomechanis: Microstructure – Mechanics Connection. – In: Int. J. Solids Structures. – New York 24 (1988) 11. – p. 1081 – 1096.

[60] Sarfarazi, M.: An Overview of the Constitutive Behavior of Crystalline Solids. – In: Engineering Fracture Mechanics. – New York 31 (1988) 6. – p. 1035 – 1046.

**Anschrift des Verfassers:**

Dr. sc. techn. H. Altenbach
Technische Universität „Otto von Guericke"
Sektion Technologie der metallverarbeitenden Industrie
Wissenschaftsbereich Werkstofftechnik
PSF 124
Universitätsplatz 2
Magdeburg
3010 – DDR