

# Konzepte der Schädigungsmechanik und ihre Anwendung bei der werkstoffmechanischen Bauteilanalyse<sup>1)</sup>

Holm Altenbach, Johannes Altenbach, Peer Schießle

## 0. Einleitung

Die Aufgabe der Festkörpermechanik ist es, ausgehend von den auf das Bauteil oder die Konstruktion wirkenden äußeren Belastungen die Spannungen und die Verschiebungen in den betrachteten Objekten zu ermitteln. Dabei ist auch zu klären, ob es zum Versagen kommen kann. Insbesondere sollen die Fragen, wo, wann und bei welcher kritischen Belastung in einem Bauteil das Versagen beginnt, möglichst genau beantwortet werden. Oft genügen dabei konventionelle Berechnungs- und Prüfmethode auf der Basis spezieller Konzepte über Grenzzustände in Werkstoffen.

Traditionell wird vorausgesetzt, daß der Werkstoff ungeschädigt und strukturlos ist. Im Rahmen dieser Annahmen wurden Hypothesen zur Beurteilung des Bauteilversagens aufgestellt, die insbesondere von den Werkstoffeigenschaften und von der Art der Belastung abhängen und die durch relativ einfache Methoden der Werkstoffprüfung gestützt werden können.

Diese auch heute noch vorherrschende traditionelle Beurteilung der Bauteilfestigkeit versagt bei Bauteilen mit definierten Makrorissen. In diesem Fall ist es notwendig, die traditionellen Beurteilungsmethoden zu modifizieren. Dabei ist insbesondere die Bruchmechanik von Bedeutung.

Das Ziel der Bruchmechanik ist es, die Bedingungen für den Bruch (analog können andere Versagensfälle analysiert werden) realer Konstruktionen unter vorgegebenen äußeren Belastungen und Bedingungen zu ermitteln [1]. Die Konzepte der Bruchmechanik beruhen auf globalen Parametern wie dem Spannungsintensitätsfaktor  $K$ , der Energiefreisetzungsrate  $G$ , der Rißöffnungsverschiebung  $\delta$  und wegunabhängigen Integralen (z. B.  $J$ ). Damit lassen sich Spannungs-Verzerrungszustände in der Umgebung der Spitze eines Makrorisses (Mindestlänge  $> 10^{-4}$ m) ermitteln.

In bestimmten Situationen führen diese globalen Näherungen zu starken Abweichungen von experimentellen Ergebnissen. Die hierbei stark vom realen Materialverhalten abweichenden Ergebnisse können oftmals durch Korrekturfaktoren, die auf Erfahrungen einer jahrelangen Anwendung des Werkstoffs oder Bauteils beruhen, und/oder durch Sicherheitsfaktoren (besser „Unsicherheitsfaktoren“) bei der Bauteildimensionierung korrigiert werden. Die Ursachen für die Abweichungen des Modellverhaltens von der Realität sind verschiedenartig und werden in der wissenschaftlichen Fachliteratur ausführlich diskutiert. Eine Variante dabei sind verteilte Defekte im Werkstoff, die nicht nur zur Rißbildung und zum anschließenden Bruch führen, sondern auch eine progressive Materialschädigung, welche durch Abnahme der Festigkeit, der Steifig-

keit, der Zähigkeit, der Stabilität bzw. der Restlebensdauer gekennzeichnet ist, hervorrufen.

Ein ökonomischer und rationeller Werkstoffeinsatz ist u. a. mit einer möglichst vollständigen Ausnutzung aller mechanischer Eigenschaften der Werkstoffe verbunden. Daher ist es erforderlich, bei der Dimensionierung solche Berechnungs- und Prüfmethode anzuwenden, die dem Werkstoffverhalten unter Betriebsbeanspruchungen weitestgehend angepaßt sind und eine ausreichende Sicherheit gegenüber den verschiedenen Möglichkeiten des Versagens gewährleisten. In dieser Richtung hat die Bruchmechanik in den letzten Jahrzehnten bedeutende Beiträge geleistet. Zunehmend scheint es jedoch erforderlich zu sein, Fragen, die im Rahmen der Bruchmechanik nicht oder nur unzureichend analysiert werden können (z. B. Rißinitiierung, Mikrorißfelder, Rißfortschritt), einer Klärung zuzuführen.

In den letzten Jahren ist eine wesentliche Intensivierung der Forschungsarbeiten zum Werkstoffverhalten und entsprechenden technischen Umsetzungen zu beobachten. Ursachen sind u. a.

- a) erhöhte Sicherheitsanforderungen in der Kernenergie-technik
- b) verstärkter Leichtbau in immer mehr Bereichen,
- c) zunehmende Werkstoffsubstitution durch neue bzw. eigenschaftsoptimierte Werkstoffe u. a. m.

Diese Forschungsarbeiten sind möglich geworden, da einerseits die Rechen- und Versuchstechnik stark verbessert wurde, aber auch eine zunehmende interdisziplinäre Zusammenarbeit zwischen Festkörpermechanikern, -physikern und Werkstofftechnikern realisiert wird. Internationale Trendstudien bestätigen diese Einschätzungen ([2] bis [6]).

Um eine verbesserte Beschreibung von Werkstoffen unter Überwindung der Grenzen konventioneller Berechnungsmethoden zu realisieren, ist es notwendig, eine realistischere Modellierung der Werkstoffe zu finden. Mit solchen Modellen lassen sich auch Aussagen über den Gültigkeitsbereich konventioneller Berechnungsmethoden hinaus treffen.

Bei der Analyse des Bruchs müßte das Materialverhalten und somit auch ein allgemeines Bruchkriterium z. B. aus den Kohäsionskräften herleitbar sein. Ein solches Vorgehen ist aber sehr schwierig und hat bisher nur in Sonderfällen zu befriedigenden Ergebnissen geführt. Dagegen

1) Im Artikel werden teilweise Materialien der INTSEM-Vorlesung über „Schädigungsmechanik“ von Prof. J. Hult (TH Göteborg, Schweden) verwendet. Die Autoren möchten dafür Prof. Hult danken.

scheidet heute (und wahrscheinlich auch noch in vielen Jahren) eine Modellierung von Werkstoffen als diskrete Struktur mit einzelnen Körnern und Zwischenräumen für die Beanspruchungsanalyse in der Ingenieurpraxis als wenig geeignet aus. Für den Ingenieur brauchbare Lösungen können derzeit nur mit Hilfe von empirischen oder kontinuumsmechanisch begründeten Formeln zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens vom makroskopischen (phänomenologischen) Standpunkt aus gewonnen werden.

Die Beschreibung von Prozessen, die auch die Energiedissipation durch Poren, Mikrorisse oder andere Schädigungen erfassen, sollte daher ähnlich erfolgen, wobei sich mit der Schädigungsmechanik (auch Kontinuumschädigungsmechanik, Continuum Damage Mechanics, CDM) eine neue Forschungsrichtung in den letzten Jahren herausgebildet hat, die dieses Ziel verfolgt. Dabei wird insbesondere versucht, die bei zunehmender Beanspruchung eintretende Werkstoffdegradation in die werkstoffmechanische Modellierung einzubeziehen und die kontinuumsmechanische Materialbeschreibung so zu adaptieren, daß der Schädigungsprozeß (Beginn, Fortschritt, Erreichen eines kritischen Stadiums) erfaßt wird, um so zu verbesserten Ansätzen für eine Lebensdauerprognose von Bauteilen zu gelangen.

## 1. Grundlagen der Schädigungsmechanik

### 1.1. Entwicklung der Schädigungsmechanik

Die Schädigungsmechanik entwickelt sich seit ca. 30 Jahren im Grenzbereich von Kontinuumsmechanik und Werkstoffwissenschaft als Bestandteil einer allgemeinen Werkstoffmechanik. Aufgrund des komplizierten Charakters des Forschungsgegenstandes macht sich ein abgestimmtes Vorgehen und eine enge interdisziplinäre Zusammenarbeit der Festkörperphysik, der Festkörpermechanik, der Werkstofftechnik und -prüfung, aber auch der Technologie und der Konstruktion erforderlich.

Das CDM-Konzept geht auf die Arbeiten von L. M. Kachanov [7] und Yu. N. Rabotnov [8] Ende der 50er Jahre zurück. Wegen der zu dieser Zeit nicht lösbaren Probleme der experimentellen Erfassung von Schädigungen sowie deren rechentechnischer Verarbeitung wurden diese grundlegenden Arbeiten zunächst nur wenig genutzt. In den 70er Jahren änderte sich diese Situation. Ursache dafür waren vor allem neue numerische und experimentelle Möglichkeiten durch die Entwicklungen der Rechentechnik und der Werkstoffdiagnostik.

Der Begriff Schädigungsmechanik (im englischen Original Continuum Damage Mechanics) tauchte vermutlich erstmals in einer Arbeit von Janson und Hult 1977 auf [9]. In der Nachfolgezeit wurden Fragen der Schädigungsmechanik umfassend in der Literatur (vgl. dazu eine in [10] enthaltene Zusammenstellung, die auszugsweise auch in [11] angegeben ist), aber auch auf Konferenzen und anderen wissenschaftlichen Veranstaltungen diskutiert. Stellvertretend für die letzteren seien hier genannt:

- International Conference on Fracture (ICF 5, Cannes, Frankreich, 1981; ICF 6, New Dehli, Indien, 1984; ICF 7, Houston, USA, 1989)
- International Conference on Theoretical and Applied Mechanics (XVI. ICTAM Lingby, Dänemark, 1984; XVII. ICTAM, Grenoble, Frankreich, 1988)

- European Conference on Fracture (ECF 6, Amsterdam, Niederlande, 1986; ECF 7, Budapest, UVR 1988)
- International Conference Mechanical Behaviour of Materials (ICM 4, Stockholm, Schweden, 1983)
- Numerical Methods in Fracture Mechanics (4th International Conference, San Antonio, USA, 1987)
- IUTAM-Symposium: Mechanics and Damage of Fatigue (Haifa, Israel, 1985)
- EUROMECH-Colloquium 147: Damage Mechanics (Cachan, Frankreich, 1981)
- EUROMECH-Colloquium 251: Applications of Continuum Damage Mechanics (Krakow, VR Polen, 1989)
- International Seminar on local approach of fracture (Morret-sur-Loing, Frankreich, 1986)
- CISM-Cours Nr. 295 „Continuum Damage Mechanics – Theory and Applications“ (Udine, Italien, 1986)

Ausgehend von den vorgelegten Ergebnissen kann man feststellen, daß die führenden Forschungsgruppen zur Schädigungsmechanik derzeit in Schweden (J. Hult), Frankreich (J.-L. Chaboche, J. Lemaitre), Großbritannien (D. Hayhurst), USA (D. Krajcinovic, F. A. Leckie, Z. Bazant), Japan (S. Murakami), BRD (J. Betten), Österreich (F. D. Fischer) sowie VR Polen (M. Chrzanowski) arbeiten. Außerdem gibt es in den letzten Jahren verstärkte Anstrengungen zur numerischen Realisierung sowie experimentellen Verifizierung von schädigungsmechanischen Aufgaben am Institut für Werkstoffmechanik der Fraunhofer-Gesellschaft. Im Zusammenhang mit der volkswirtschaftlichen Bedeutung der Bruch- und Versagensforschung und ihrer Wechselwirkung mit den Erkenntnissen der Schädigungsmechanik gibt es derzeit eine weltweite Zunahme des Interesses an diesem Gebiet.

### 1.2. Modellierung von Schädigungen

Bei der Schädigung handelt es sich um eine während des Herstellungsprozesses und/oder der Belastungs-, Beanspruchungs- oder Deformationsgeschichte eines Festkörpers entstandene Veränderung der Werkstoffstruktur (Bildung und Wachstum von Hohlräumen, Werkstoffdegradation, teilweise oder vollständige Zerstörung). Die Entstehungsmechanismen, die Eigenschaften und die Größenordnung der entsprechenden charakteristischen Längen der internen Mikrodefekte können sehr unterschiedlich sein. Die makroskopischen Auswirkungen der Schädigung sind ebenfalls in Abhängigkeit vom Werkstoff und der Beanspruchung verschieden: nachlassende Steifigkeit, verminderte Festigkeit, irreversible Porosität bzw. quasiplastische Restdehnungen, kürzere Laststandzeiten beim Kriechen, verminderte Lastzyklenlebensdauer usw. Die Beschreibung der durch Schädigung veränderten Materialeigenschaften sowie die Vorhersage der weiteren Schädigungsentwicklung ist u. a. die Aufgabe der Schädigungsmechanik und setzt entsprechende Modelle voraus. Dabei sind bei der Modellierung der Schädigung zwei sich prinzipiell unterscheidende Vorgehensweisen möglich [12]: die mikrostrukturell (mikromechanisch) orientierte und die phänomenologische (thermodynamische) Betrachtung, wobei die Zuordnung nicht immer ganz eindeutig ist. Eine grundsätzliche Überlegenheit einer dieser beiden Vorgehensweisen konnte bisher nicht gefunden werden, und somit wird die Wahl vom Materialverhalten und den Belastungsbedingungen beeinflusst.

Bei den makroskopisch-phänomenologischen Schädigungsmodellen wird im Hinblick auf das makroskopische Materialverhalten vielfach bewußt auf ein genaueres quantitatives Studium der Entwicklung (Bildung und Wachstum) der Mikrodefekte verzichtet. Nach der Wahl eines geeigneten Schädigungsmaßes beschreibt man die Phänomene der Schädigung sowie deren Entwicklung durch mehr oder weniger empirisch aufgestellte mathematische Beziehungen. Häufig werden die phänomenologischen Schädigungsmodelle im Gegensatz zu den mikromechanischen Modellen in thermodynamische Betrachtungen eingebunden.

Im Rahmen mikromechanischer Schädigungsmodelle ist man um einen eher als „genetisch“ zu bezeichnenden Zugang zum Phänomen Schädigung bemüht. Ausgangspunkt ist hier das konkrete Studium der die Schädigung verursachenden, in der Regel idealisierten, mikroskopischen Elementardefekte, deren Eigenschaften, mikromechanisches Verhalten und eventuellen Weiterentwicklung im Volumenelement. Der Übergang von der Betrachtung

der Mikrodefekte zum aus ihrem Vorhandensein resultierenden makroskopischen Materialverhalten erfolgt durch eine geeignete Mittelungsprozedur bzw. „Homogenisierung“.

### 1.3. Schädigungsvariable

In den Arbeiten von Kachanov [7] und Rabotnov [8] wurden zunächst nur skalare, stetig veränderliche Zustandsvariablen, die Kontinuität (сплошность, continuity)  $\Psi$  bzw. die Schädigung (повреждение, damage)  $D$ , eingeführt. Eine skalare Schädigungsvariable kann in Theorien, in denen das Werkstoffverhalten und die Schädigung als isotrop angesehen werden können, Verwendung finden. Experimente zeigen oft aber eine Richtungsabhängigkeit der Schädigung. Dabei können z. B. bei Metallen zwei Fälle unterschieden werden [13]:

- a) Metalle, die sich wie Kupfer verhalten, d. h., die Mikro-schädigungen dehnen sich senkrecht zur maximalen Hauptspannungsrichtung aus.

**Tabelle 1:**  
Beispiele für Schädigungsvariablen

mathematischer Typ der Schädigungsvariablen	Beispiele	Bemerkungen Autoren, Quelle, Jahr
Skalar (Tensor 0. Stufe)	Kontinuität $\Psi$ $\Psi = A_0/A$ $A_0$ aktuelles Flächenelement $A$ ursprüngliches Flächenelement $d\Psi/dt < 0$	isotrope Schädigung; isotropes Werkstoffverhalten; L. Kachanov [7] 1958
	Schädigung $D = 1 - \Psi$ $dD/dt > 0$	isotrope Schädigung; isotropes Werkstoffverhalten; Rabotnov [8], 1959
	Ermüdungsschädigung $D_i = n_i/N_i$ ( $N_i$ Grenzyklenzahl, $n_i$ aktuelle Zyklenzahl, $i$ Beanspruchungsniveau)	lineare Akkumulation der Ermüdung; Palmgren [14], 1924 Miner [15], 1945
	Kriechschädigung $D_i = t_i/T_i$ ( $T_i$ Lebensdauer, $t_i$ aktuelle Zeit, $i$ Beanspruchungsniveau)	lineare Akkumulation der Kriechschädigung; Robinson [16], 1952
	belastungsabhängige Schädigung $D(\sigma \geq 0)$ , $hD(\sigma < 0)$ , $0 \leq h \leq 1$ ( $h$ Rißschließungskoeffizient)	unterschiedliches Zug-/Druckverhalten; Ladeveze, Lemaitre [17], 1984
	3 Kontinuitäten $\Psi_i$	Hauptachsen der Anisotropie und des Spannungszustandes fallen zusammen; Kachanov [1], 1974

Vektor (Tensor 1. Stufe)	Kontinuitätsvektor $\underline{\Psi}_v$	nichtproportionale Belastung, orthotropes Werkstoffverhalten, Bruch orthogonal zur Zugrichtung; Kachanov [1], 1974
	Schädigungsvektor	viele ebene Mikrorisse Krajcinovic [18], 1983
	Schädigungsvektor	viele ebene Mikrorisse Davison, Stevens [19], 1973
Tensor 2. Stufe	nichtsymmetrischer Schädigungstensor	orthotropes Werkstoffverhalten; Murakami, Ohno [20], 1981
	symmetrischer Schädigungstensor	orthotrope Schädigung Codebois, Sidoroff [21], 1982
	symmetrischer Schädigungstensor	äquivalente Langzeitschädigung; Pavlov [22], 1988
	symmetrischer Schädigungstensor	orthotrope Schädigung; Litewka [23], 1985
	Schädigungstensor	Kondaurov [24], 1988
	Rißdichtentensor	Rißfeld; Vakulenko, M. Kachanov [25], 1971
Tensor 4. Stufe	nichtsymmetrischer Schädigungstensor	orthotrope Schädigung; Chaboche [26], 1982
	Schädigungseffektentensor	anisotropes Werkstoff- und Schädigungsverhalten; Chow, Wang [27], 1987

b) Metalle, die sich wie Aluminiumlegierungen verhalten, d.h. die Mikroschädigungen verteilen sich mehr isotrop.

Eine Konsequenz ist, daß auch nichtskalare Größen als Schädigungsvariable benötigt werden. Verschiedene theoretische Konzepte wurden hierzu entwickelt, und entsprechend der Definition der Stufe einer tensoriellen Größe werden Schädigungsvariable als Tensoren 0.-, 1.-, 2.-, 4.- und höherer gerader Stufen angegeben. Beispiele sind in Tabelle 1 angegeben.

Mit diesen Schädigungsvariablen läßt sich das aus dem Vorhandensein der Mikrodefekte resultierende makroskopische Werkstoffverhalten beschreiben. Aussagen über die verursachenden Mikrodefekte (Art, Größe usw.) lassen sich allerdings nur bei Verwendung von mikromechanischen Modellen machen. Entscheidend bei der Auswahl von entsprechenden Schädigungsmodellen und Schädigungsvariablen sollte jedoch nicht ein maximaler Kompliziertheitsgrad unter Berücksichtigung möglichst aller Effekte des Werkstoffverhaltens im beschreibenden Modell sein, sondern die versuchstechnische Verifizierbarkeit und Reproduzierbarkeit der in den Gleichungen enthaltenen Werkstoffkennwerte. Hierbei ist zu beachten, ob der Informationsgewinn den versuchstechnischen Aufwand rechtfertigt.

#### 1.4. Messungen von Schädigungen

Für die praktische Anwendung der CDM ist es unbedingt erforderlich, daß die Schädigungen quantifizierbar sind, d.h., alle in eventuellen Schädigungsfunktionen enthalte-

nen Kennwerte meßbar bzw. postulierte Funktionsverläufe bestätigbar sein. Eine reproduzierbare Messung von Schädigungen ist kompliziert, da bei unterschiedlichen Werkstoffen und Schädigungsmodellen verschiedenartige Meßverfahren eingesetzt werden müssen (vgl. u. a. [28], [29], [30]) und auch die Schädigungsmessung selbst stark verfahrensabhängig ist. In Tabelle 2 [11] sind einige Möglichkeiten des experimentellen Nachweises von Werkstoffschädigungen angeführt. Weitere Probleme bestehen u. a. in den hohen Anforderungen an die Probenvorbereitung (z. B. bei den metallographischen Verfahren), in bestimmten Modellrestriktionen bezüglich der Schädigungsgeometrie (z. B. Annahme von kugelförmigen Hohlräumen, unverzweigten Rissen) und in der Meßempfindlichkeit bzw. in Ungenauigkeiten bei der Beschreibung des Zusammenhanges zwischen der gemessenen physikalischen Eigenschaft und der Schädigung. Aufgrund der starken Abhängigkeit der Messungen vom Meßverfahren und Schädigungsmodell wäre es günstig, wenn mehrere Meßverfahren eingesetzt und die Ergebnisse „gemittelt“ würden. Zu beachten ist bei der Auswahl eines bestimmten Meßverfahrens, daß dieses dem Werkstoff und der Schädigungsart entsprechen muß. Verfahren, die für einen Werkstoff und ein Schädigungsmodell gute Ergebnisse liefern, müssen in anderen Fällen nicht unbedingt geeignet sein.

In letzter Zeit wird zunehmend versucht, die Meßverfahren zu systematisieren: man unterscheidet u. a. direkte und indirekte Methoden. Die direkten Methoden bestehen z. B. in der Beobachtung und Quantifizierung irreversibler Defekte

**Tabelle 2:**  
Kenngrößen und Meßverfahren zur Erfassung von Schädigungen in metallischen Werkstoffen

Kenngröße	Meßverfahren	geeignet für Untersuchungen am Bauteil
Volumen- bzw. Flächenanteil von Rissen und Poren; Abmessungen charakteristischer Gefügeparameter	Mikroskopie bzw. Rasterelektronenmikroskopie in Verbindung mit rechnergestützter Bildauswertung	begrenzt (Replica-Technik)
Dimensionsänderungen	holografische Interferometrie	ja
elastische Konstanten	Zug-, Biege-, Torsionsversuch Ultraschallgeschwindigkeitsmessung	nein ja
anelastische Eigenschaften	zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve Ultraschallschwächungsmessung	nein ja
elektrische Leitfähigkeit; magnetische Eigenschaften; Positronenannihilation	physikalische Meßverfahren	z. T.
Schallemission	Schallemissionsanalyse	ja, unter Beanspruchung
Eigenspannungen erster und höherer Art	röntgenografische Spannungsmessung bzw. Linienprofilanalyse	begrenzt
Dichte	hydrostatische Waage	nein
Mikrohärte	Härtemessung	ja



wie intergranulare Poren beim Kriechen, Oberflächenmikrorisse bei Ermüdung und Poren während des duktilen Bruches. Die Interpretation der Schädigung erfolgt dann z. B. als Reduktion des Nettoquerschnitts. Bei den indirekten Meßmethoden werden Änderungen physikalischer Kennwerte infolge der Werkstoffschädigung gemessen. Nach Definition eines Schädigungsmaßes kann somit eine Quantifizierung erfolgen.

Eine weitere Unterteilung in zerstörende und zerstörungsfreie Meßverfahren kann ebenfalls vorgenommen werden. Mit den zerstörungsfreien Meßmethoden werden die Verfahren charakterisiert, bei denen sich während des Meßvorgangs keine Eigenschaftsänderungen des Werkstoffs, aus dem das zu untersuchende Bauteil besteht, einstellen. Als Beispiel sei hier die Ultraschall- und die Dichtemessung angegeben, wobei bezüglich der Ultraschallmessung auch die Aussage getroffen wird [30], daß dies ein zerstörendes Verfahren ist. Die zerstörungsfreien Meßmethoden ermöglichen es, Funktionsverläufe an einer einzigen Probe zu ermitteln. Die zerstörenden Meßmethoden sind mit einer irreversiblen Veränderung der Eigenschaften des jeweiligen Bauteils verbunden. Aus diesem Grund ist es notwendig, für jeden Meßvorgang eine gesonderte Probe zu verwenden, was den meßtechnischen Aufwand stark erhöht.

### 1.5. Grundgleichungen der Schädigungsmechanik

Die Herleitung der Grundgleichungen kann in verschiedener Weise erfolgen. Neben dem mikrostrukturellen Weg wurden in den letzten Jahren verstärkte Anstrengungen unternommen, um ausgehend von den Konzepten der Kontinuumsmechanik unter Einbeziehung der Thermodynamik mit inneren Zustandsvariablen entsprechende Systeme von Grundgleichungen zu begründen. Ausgangspunkt ist dabei die Annahme, daß man die Gleichungen der Kontinuumsmechanik in werkstoffunabhängige und -abhängige Gleichungen unterteilen kann. Die erste Gruppe umfaßt die geometrischen Gleichungen (z. B. Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen) und die Bilanzen (lokal oder global) für das Kontinuum. Ein gesicherter Erkenntnisstand liegt heute hauptsächlich für thermomechanische Analysen vor. Für die Betrachtung komplexerer Situationen (z. B. Modellierung metallischer Werkstoffe bei Phasenumwandlungen, Einwirkungen elektromagnetischer Felder) sind neben den für thermomechanische Bilanzen typischen Feldgrößen weitere Variable und möglicherweise Bilanzen erforderlich [11].

Die Bilanzen liefern nicht unmittelbar die werkstoffabhängigen Gleichungen, sondern stecken nur den Gesamtrahmen ab bzw. definieren die Prozeßrichtung. So kann mit Hilfe des ersten und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik oder der alternativen Form, der dissipativen Ungleichung, u. a. die thermodynamische Zulässigkeit der werkstoffabhängigen Gleichungen überprüft werden. Da es eine universelle Werkstoffgleichung nicht gibt (und sie auch nicht gefunden werden kann), ist die Formulierung von Werkstoffgleichungen für spezielle Fälle notwendig. Die Werkstoffgleichungen werden im allgemeinen in Konstitutivgleichungen und Evolutionsgleichungen unterteilt. Die Konstitutivgleichungen beschreiben den zeitlichen Zusammenhang zwischen den phänomenologischen Feldgrößen Spannungs- und Verzerrungstensor, Wärme-

stromvektor usw. Zur Beschreibung dissipativer, rheologischer bzw. anderer (mit inneren Strukturänderungen verbundener) Effekte reicht dies nicht immer aus. Eine Möglichkeit ist dann mit der Definition innerer Variablen gegeben, wobei diese in alle bzw. einen Teil der Konstitutivgleichungen eingehen. Zusätzlich sind für diese Variablen Evolutionsgleichungen zu formulieren. Eine derartige Vorgehensweise ist auch für kontinuumsmechanisch orientierte Arbeiten zur Schädigungsmechanik typisch.

Allgemein lassen sich im Rahmen der Thermomechanik mit inneren Variablen die Konstitutivgleichungen als Funktionale der Zeit angeben:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\underline{x}, t) &= \underline{\sigma} \left\{ \underline{\varepsilon}^T, T^T, \underline{\nabla} T^T, \alpha_k^T \mid \underline{x} \right\}, \\ \underline{h}(\underline{x}, t) &= \underline{h} \left\{ \underline{\varepsilon}^T, T^T, \underline{\nabla} T^T, \alpha_k^T \mid \underline{x} \right\}, \quad 0 \leq \tau \leq t \\ F(\underline{x}, t) &= F \left\{ \underline{\varepsilon}^T, T^T, \underline{\nabla} T^T, \alpha_k^T \mid \underline{x} \right\}, \\ S(\underline{x}, t) &= S \left\{ \underline{\varepsilon}^T, T^T, \underline{\nabla} T^T, \alpha_k^T \mid \underline{x} \right\}, \end{aligned}$$

$\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\varepsilon}$  – Spannungs- bzw. Verzerrungstensor,  $T$  – Temperatur,  $\underline{h}$  – Wärmestromvektor,  $\underline{\nabla}$  – Nabla-Vektor,  $F$  – freie Energie,  $S$  – innere Entropie,  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) – innere Variable (Tensoren unterschiedlicher Stufe),  $\underline{x}$  – Ortsvektor.

In dieser Form gelten die Konstitutivgleichungen für heterogene Werkstoffe. Das Werkstoffgesetz reflektiert auch die „Geschichte“ des Werkstoffs. Die Verwendung des angegebenen Verzerrungstensors ist an kleine Verzerrungen gebunden, womit eine wesentliche Einschränkung getroffen wurde. Für die werkstoffmechanische Modellierung von Bruchvorgängen, die mit großen plastischen Verformungen verbunden sind, genügt dies im allgemeinen nicht, so daß statt  $\underline{\varepsilon}$  andere deformationskennzeichnende Größen herangezogen werden müssen. Wesentliche Vereinfachungen der Konstitutivgleichungen erhält man, wenn der Werkstoff quasihomogen ist, in diesem Fall geht  $\underline{x}$  nicht explizit ein. Tritt auch kein rheonomes Verhalten auf, sind die Zeitfunktionale durch Funktionen zu ersetzen. Diese Vereinfachungen lassen auch die Lösung einer Reihe von Problemen der linear-elastischen bzw. elastisch-plastischen Bruchmechanik zu. Ungeachtet der allgemeinen Darstellungsformen und ihren Einschränkungen unter bestimmten Annahmen bleibt die Hauptaufgabe, die Konkretisierung und Verifizierung von Konstitutivgleichungen für bestimmte Werkstoffe vorzunehmen, kompliziert.

Bei der Formulierung von Evolutionsgleichungen kann ähnlich wie bei den Konstitutivgleichungen vorgegangen werden. Zunächst kann man die inneren Variablen  $\alpha_k$  aufgespalten in die Variablen  $D_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) – Variable, die die Schädigung kennzeichnen sowie die Variablen  $\alpha_k$  ( $k = m + 1, \dots, n$ ). Nach den Ursachen der Schädigung kann man folgende Varianten von Schädigungsevolutionsgleichungen unterscheiden:

$$dD_1 = f_1(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}, \alpha_k, T, \dots, D_1, \dots) d\underline{\sigma}$$

(statistische Kurzzeitbeanspruchung),

$$dD_2 = f_2(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}, \alpha_k, T, \dots, D_1, \dots) dt$$

(Kriechen),

$$dD_3 = f_3(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}, \alpha_k, T, \dots, D_1, \dots) dN$$

(Ermüdung).

Die entsprechende Konkretisierung der Evolutions- bzw. Schädigungsgleichung wird wesentlich davon bestimmt, ob das Modell der Realität entspricht und die notwendigen Werkstoffkennwerte ermittelbar sind. Oft werden daher Vereinfachungen durch Reduzierung der Argumentenanzahl vorgenommen. Daneben können auch Superpositionen von Evolutionsgleichungen auftreten.

### 1.6. Beispiele für Schädigungsgleichungen

Der Prozeß der unter Belastung fortschreitenden Schädigungsentwicklung kann u. a. durch Evolutionsgleichungen beschrieben werden. Mathematisch werden Evolutionsgleichungen vielfach durch Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der unabhängigen Variablen „Zeit“ (Pseudo- oder Echtzeit) beschrieben. Es hat sich gezeigt, daß sich nicht alle Schädigungsprozesse gleichermaßen gut durch eine einzige Evolutionsgleichung, die mittels temperaturabhängiger Materialkonstanten angepaßt wird, beschreiben lassen.

Schädigungsprozesse lassen sich wie folgt einteilen:

- a) Kriechschädigung,
- b) Ermüdungsschädigung
- c) duktile Schädigung
- d) chemomechanische Schädigung
- e) spröde-elastische Schädigung
- f) Überlagerung verschiedener Prozesse (gemischte Schädigung).

Diese Einteilung ist nur eine Möglichkeit. Eine genaue Zuordnung zu konkreten Prozessen ist nicht immer eindeutig. Eine weitere Aufspaltung dieser Prozesse ist möglich und abhängig von Belastungszustand, Verformungszustand, verwendetem Material, Bauteilgeometrie u. a. Somit läßt sich der zeitliche Schädigungsverlauf durch die den jeweiligen Bedingungen angepaßte Evolutionsgleichung beschreiben.

Nachfolgend werden einige dieser Gleichungen, die ein skalares Schädigungsmaß verwenden, angeführt. Eine Erweiterung auf anisotropes Schädigungsverhalten soll an dieser Stelle nicht erfolgen, ist aber prinzipiell möglich. Zum besseren Verständnis der Vorgehensweise in der Schädigungsmechanik und der Einteilung der Schädigungsprozesse ist es notwendig, etwas näher auf die Beschreibung des Materialverhaltens einzugehen. Bild 1 zeigt eine mögliche Einteilung verschiedener Arten des Materialverhaltens, die in der Festkörpermechanik gebräuchlich ist [31].

Die Annahme eines speziellen Materialtyps ist in vielen Fällen nur als Näherung aufzufassen. Für Konstruktionswerkstoffe ist es typisch, daß bei ihnen alle Verhaltenswei-

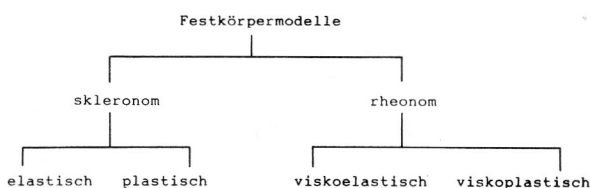


Bild 1  
Werkstoffverhalten

sen kombiniert auftreten, wobei aber ein Teil der Verhaltensweisen in guter Näherung jeweils vernachlässigt werden kann. Ob ein Phänomen vernachlässigbar ist oder nicht, hängt u. a. von der Belastung, der Belastungsgeschwindigkeit und der Umgebungstemperatur, aber auch vom Beobachtermaßstab ab.

Die Beschreibung des Werkstoffverhaltens in Konstitutivgleichungen erfolgt häufig durch Superposition der Verzerrungsanteile zu einer Gesamtverzerrung. Der Einfachheit halber sollen hier die grundlegenden Beziehungen am einfachsten Fall, dem der einachsigen zeitlich konstanten Belastung, erläutert werden:

$$\epsilon(\sigma, T, t) = \epsilon^e(\sigma, T) + \epsilon^p(\sigma, T) + \epsilon^v(\sigma, T, t) + \epsilon^{th}(\sigma, T, t) \quad (1.1)$$

( $\epsilon$  – Gesamtverzerrung,  $\epsilon^e$  – elastischer Verzerrungsanteil,  $\epsilon^p$  – plastischer Verzerrungsanteil,  $\epsilon^v$  – viskoser Verzerrungsanteil,  $\epsilon^{th}$  – thermischer Verzerrungsanteil)

Diese Schreibweise setzt voraus, daß die einzelnen Anteile getrennt voneinander wirken und sich nicht gegenseitig beeinflussen. An dieser Stelle soll nicht auf die thermischen Effekte eingegangen werden. Das skleronome Materialverhalten  $\epsilon^s$  ( $\epsilon^s = \epsilon^e + \epsilon^p$ ) entspricht einer Verformungsänderung gleichzeitig mit der Laständerung. Das viskose Verhalten  $\epsilon^v$  ist durch die Abhängigkeit der Verzerrungsgeschwindigkeit vom Spannungszustand charakterisiert. Aus diesem Grund wird als Konstitutivgleichung häufig die nach der Zeit differenzierte Gleichung (1.1) verwendet.

Da die Schädigungsmechanik zuerst für den Fall der Schädigung durch Kriechen metallischer Proben entwickelt wurde [7], [8], soll auf diesen Schädigungsprozeß ausführlicher eingegangen werden. Es existiert heute noch keine vollständig physikalisch begründete Theorie des Kriechens. Die charakteristischen Erscheinungen und Funktionsverläufe entsprechend dem Werkstoffverhalten, den Temperatur- und Belastungsverhältnissen (einachsig, mehrachsig, zeitlich veränderliche Last, Be- und Entlastung) werden durch separate phänomenologische Theorien und Konstitutivgleichungen beschrieben. Hier erfolgt im wesentlichen eine Beschränkung auf das einachsige Kriechen unter konstanter Spannung und Temperatur. Für weitergehende Betrachtungen sei u. a. auf [32] verwiesen. Das typische Verhalten des Übergangsbereiches Viskoelastizität-Viskoplastizität wird mit der Theorie des Metallkriechens erfaßt. Für diesen Typ wird in der Literatur oft nur von „Kriechen“ gesprochen. Da aber die Erscheinung des Kriechens allen rheonomen Stoffen eigen ist, reicht diese Bezeichnung nicht zur genaueren Einordnung in eine bestimmte Gruppe von Materialgesetzen aus [31].

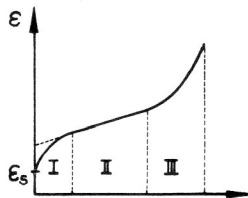
Metalle zeigen bei Belastung und hohen Temperaturen ein Kriechverhalten, welches im Erscheinungsbild der  $\epsilon(t)$ -Kurve geringe Unterschiede zu dem viskoelastischen Stoffe aufweist. Diese Unterschiede bestehen hauptsächlich in einer ausgeprägteren Nichtlinearität und daß bei kleinen Spannungen fast kein Kriechen beobachtet werden kann. Deutlich wird der Unterschied beim Entlasten. Das charakteristische Merkmal viskoelastischer Werkstoffe (z. B. Hochpolymere) ist die Umkehrung des typischen Verlaufes der Kriechkurven nach der Entlastung. Die Erscheinung des Rückkriechens ist bei Metallen vernachlässigbar klein. Dies ist die Ursache für das Phäno-

men der Relaxation und berechtigt zur Klassifikation als plastisches Verhalten rheonomen Typs [31].

Auch bei Raumtemperatur beobachtet man bei duktilen Metallen unter sehr hoher Belastungsgeschwindigkeit ein viskoses, zeitabhängiges Verhalten oberhalb der Fließgrenze. Dieses Phänomen ist aber von anderer Größenordnung. Dabei beruht die mathematische Beschreibung auf den gleichen Gesetzen, jedoch sind andere Werkstoffparameter zu verwenden [31].

Das viskoplastische Werkstoffverhalten kann als natürliche Verallgemeinerung des skleronom-plastischen betrachtet werden. Die Verallgemeinerung soll darin bestehen, daß im Gegensatz zum skleronom-plastischen Material die Fließgrenze überschritten werden darf. Abhängig von der Intensität der Überschreitung stellt sich dann eine durch das Werkstoffverhalten determinierte Verzerrungsgeschwindigkeit ein [31].

Der typische Verlauf  $\epsilon(t)$  im einachsigen Kriechversuch mit konstanter Spannung und Temperatur ist in Bild 2 dargestellt. Die Tertiärperiode endet mit dem Kriechbruch [32].



**Bild 2**

Kriechkurve bei einachsigen Kriechversuch

$\epsilon_s$  – elastisch-plastische Verzerrung

- I – Primärkriechen (Verfestigung, Verzerrungsgeschwindigkeit sinkt)
- II – Sekundärkriechen (Verzerrungsgeschwindigkeit annähernd konstant)
- III – Tertiärkriechen (Entfestigung, Verzerrungsgeschwindigkeit steigt)

Die Beschreibung des Werkstoffverhaltens im Primär-, Sekundär- und Tertiärbereich erfolgt durch gesonderte und meist empirisch aufgestellte Ansätze der Form

$$d\epsilon^{VP}/dt = f(\sigma, T) \quad (1.2)$$

Diese Ansätze entsprechen dem viskosen Verzerrungsanteil in der Konstitutivgleichung. Eine einheitliche Beschreibung aller Kriecherscheinungen (vgl. Bild 2) ist meist sehr aufwendig. Da die Ausprägung der einzelnen Bereiche je nach Werkstoff, Belastung und Temperaturverhältnissen stark unterschiedlich ist, kann vielfach der gesamte Kriechprozeß durch einen einzigen Kriechbereich beschrieben werden. Dabei vernachlässigt man die anderen Bereiche.

Unter physikalischem Primärkriechen verstehen wir den Zustand von abnehmender Verzerrungsgeschwindigkeit, der im Anfang eines Kriechvorganges bei zeitlich konstanter Spannung und Temperatur stattfindet. Das statische Primärkriechen (Abnehmen der Verzerrungsgeschwindigkeit infolge einer Spannungumlagerung) soll nicht betrachtet werden [32]. Die Tatsache der abnehmenden Verzerrungsgeschwindigkeit  $d\epsilon^{VP}/dt$  (d.h. der Werkstoff wird verfestigt) kann auf zwei verschiedene Arten ausgedrückt

werden:  $d\epsilon^{VP}/dt$  nimmt mit wachsender Zeit  $t$  oder mit wachsender Dehnung  $\epsilon^{VP}$  ab. Man spricht dann von einer Zeitverfestigungstheorie oder einer Dehnungsverfestigungstheorie. Odqvist gibt z. B. in [32] folgenden Ansatz für das Primärkriechen nach der Dehnungsverfestigungstheorie an:

$$\frac{d\epsilon^{VP}}{dt} = B \sigma^m (\epsilon^{VP})^{-\mu} \quad (1.3)$$

( $B, m, \mu$  – temperaturabhängige Werkstoffparameter).

Bei den sogenannten Gesamtdehnungstheorie wird das Primärkriechen durch eine augenblicklich sich einstellende plastische Gesamtdehnung ersetzt. Dies bedeutet, daß das dem Primärkriechen entsprechende Glied [32]

$$\frac{d\epsilon^{VP}}{dt} = k_0 n \sigma^{n-1} \quad (1.4)$$

( $k_0, n$  – temperaturabhängige Werkstoffparameter) bei Entlastung verschwinden muß.

Bei einer Anzahl von Werkstoffen in bestimmten Temperatur- und Spannungsgebieten umfaßt der Sekundärzustand den größten Teil der Lebensdauer im Kriechen. Unter der Berücksichtigung, daß bei technisch wichtigen Metallen die konstante Verzerrungsgeschwindigkeit von der wirkenden Spannung sehr stark abhängig ist, existieren verschiedene Ansätze der Funktion nach Gleichung (1.2). Die von Norton aufgestellte Gleichung

$$d\epsilon^{VP}/dt = k \sigma^n \quad (1.5)$$

( $k, n$  – temperaturabhängige Werkstoffparameter) besitzt gegenüber anderen Ansätzen die wichtige Eigenschaft, daß sie die Grenzfälle von linear elastischer und starrplastischer Verformung wiedergeben kann. Das Nortonsche Gesetz bildet bis heute die grundlegende Gleichung der angewandten Kriechmechanik.

Das Tertiärkriechen hat zwei Ursachen, und man unterscheidet physikalisches und statisches Tertiärkriechen. Das physikalische Tertiärkriechen, d.h. die Zunahme der Kriechgeschwindigkeit unter zeitlich konstanter Spannung, ist durch eine Schwächung des Werkstoffs selbst gekennzeichnet. Eine Beschreibung dieses Vorganges erfolgt später mit Hilfe der Schädigungsmechanik. Die Ursache des statischen Tertiärkriechens ist in der Veränderung der Bauteilgeometrie während des Belastungszeitraums zu sehen. Als Beispiel sei hier die Verminderung des Stabquerschnitts bei einem Zugversuch mit konstanter Zugkraft genannt. Da das statische Tertiärkriechen mit der Theorie großer Verformungen verbunden ist, soll hierauf nicht eingegangen werden.

Auch in der Schädigungsmechanik unterscheidet man die verschiedenen Kriecherscheinungen, ein- und mehrachsig Zustände sowie „short-time-creep“ (große Dehnungen mit ausgeprägtem Tertiärbereich) und „long-time-creep“ (kleine Dehnungen mit vernachlässigbarem Tertiärbereich) [33]. Entsprechend dieser Klassifizierungen wurden unterschiedliche Evolutionsgleichungen entwickelt.

Als Zustandsvariable, die den Materialzustand kennzeichnet, kann beispielsweise die durch Kachanov [7] einge-



fürte Kontinuität  $\Psi$  oder die durch Rabotnov [8] eingeführte Schädigung  $D$  verwendet werden. Während die Variable  $\Psi$  für ungeschädigtes Material den Wert 1 hat und im Verlauf der Schädigung abnimmt (bei Kachanov monotonen Abnehmen), so daß der Endzustand durch  $\Psi = 0$  gekennzeichnet ist, wird  $D$  als komplementäre Größe definiert:  $D = 1 - \Psi$ .

Die Einführung des Effektivspannungskonzeptes in das Nortonsche Kriechgesetz (1.5), das das sekundäre Kriechen beschreibt, erlaubt nun die Beschreibung des Tertiärkriechens, welches durch ein deutliches Wachstum der Verzerrungsgeschwindigkeit gekennzeichnet ist [34], [35]. Damit gilt nun

$$\frac{d\epsilon^p}{dt} = \left( \frac{\sigma}{k(1-D)} \right)^N \quad (1.6)$$

mit  $N$  als Norton-Kriechexponent und  $k$  als eine Materialkonstante. Kachanov und Rabotnov setzen nun für  $D(t)$  in Relation zum modifizierten Kriechratengesetz die Beziehung

$$\frac{dD}{dt} = A \left( \frac{\sigma}{1-D} \right)^N \quad (1.7)$$

wobei im allgemeinen  $n \neq N$  ist [34]. Andere Ansätze sind aus der Literatur bekannt. So wird durch Hult in [36] ein Modell für statisches Tertiärkriechen mit Schädigung angegeben.

In [35] gibt Chaboche eine Evolutionsgleichung für den Sekundärbereich an

$$\frac{dD}{dt} = \left( \frac{\sigma}{A} \right)^r (1-D)^{-k}, \quad (1.8)$$

wobei  $r$ ,  $k$  und  $A$  material- und temperaturabhängige Koeffizienten sind. Dies ist eine von der klassischen Rabotnov-Kachanov-Gleichung (hier  $r = -k$ ) abgeleitete Form und ermöglicht geringere Schädigungsgeschwindigkeiten gegenüber der Evolutionsgleichung (1.7). Da die Kriechgeschwindigkeit während des Sekundärkriechens annähernd konstant ist, muß man eine geringe Schädigungsentwicklung voraussetzen.

Ausgangspunkt für viele Evolutionsgleichungen bei mehrachsiger Belastung ist die Bildung einer effektiven Ersatzspannung. Zur Ermittlung des Schädigungsverlaufes wird bei einem konstanten Spannungszustand die Spannung  $\sigma$  in der Beziehung (1.7) und (1.8) durch die effektive Ersatzspannung ersetzt. So gibt Fischer in [34] die Differentialgleichung

$$\frac{dD}{dt} = \frac{A \sigma_v^n R_v}{(1-D)^\alpha} \quad (1.9)$$

für Schädigung im Tertiärkriechbereich an. Hierbei sind  $A$ ,  $n$  und  $\alpha$  temperaturabhängige Werkstoffparameter,  $\sigma_v$  eine Vergleichsspannung und  $R_v$  der Triaxialitätsfaktor. Für  $\sigma_v$  und  $R_v$  gilt, daß der einachsige Spannungszustand  $\sigma^* = \sigma_v R_v^{0.5}$  die gleiche durch Schädigung dissipierte Leistung wie der aktuelle Spannungszustand  $\underline{\sigma}$  besitzt.

Für mehrachsige Belastung mit kleinen Dehnungen wird von Hayhurst und Leckie die effektive Ersatzspannung mit

$$\chi(\underline{\sigma}) = \alpha \sigma_1 + \beta \text{Sp}(\underline{\sigma}) + (1 - \alpha - \beta) \sigma_0 \quad (1.10)$$

( $\alpha$ ,  $\beta$  material- und temperaturabhängig,  $\sigma_1$  maximale Hauptspannung,  $\sigma_0$  Oktaederschubspannung) angegeben [37]. Die Bildung dieser effektiven Ersatzspannung geht von der bereits oben erwähnten Annahme aus, daß man Theorien der Kriecherscheinungen analog zu den Theorien der klassischen mathematischen Plastizitätstheorie aufstellen kann. Der erste Term in (1.10) geht auf die Hypothese vom Maximum der Hauptspannung nach Rankine zurück. Der Einfluß einer eventuellen Kompressibilität des Werkstoffs wird durch den zweiten Term, der dem hydrostatischen Spannungszustand entspricht, berücksichtigt. Die Abhängigkeit der Kriechdeformation von der Gestaltänderungshypothese (nach Huber, von Mises und Hencky) wird durch die Oktaederschubspannung charakterisiert. Die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  lassen sich somit als Wichtungsfaktoren für die entsprechenden Plastizitätshypothesen deuten.

Eine besonders für Kriechschädigung unter Druck geeignete effektive Ersatzspannung wird durch Chaboche in [35] angegeben (keine Schädigung unter allseitigem Druck)

$$\chi(\underline{\sigma}) = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^{\alpha-1} \sigma_1 \quad (1.11)$$

Mit Gleichung (1.11) kontrolliert das Kriechen (bzw. auch das Fließen) die maximale Hauptspannung in Abhängigkeit vom Einfluß der Triaxialität.

Es ist zu beachten, daß es für einige Anwendungsfälle günstig ist, statt der Zeit die Kriechdehnung zu verwenden (große Dehnungen). So wird in [35] von Chaboche die Evolutionsgleichung

$$dD = A \sigma_1^\alpha \epsilon_v^\beta d\epsilon_v \quad (1.12)$$

verwendet.

Im Falle der Schädigung durch Ermüdung ist ebenfalls eine differenzierte Betrachtungsweise notwendig. So müssen bei der Behandlung dieses Schädigungsprozesses folgende Aspekte berücksichtigt werden [35]:

- die Existenz mehrerer Phasen,
- nichtlineare Schädigungswachstumseffekte,
- die Existenz einer Ermüdungsgrenze, die bei einer Vorschädigung sinkt,
- der Einfluß der Mittelspannung,
- Zyklusanzahl,
- Amplitude der Belastung.

Schwierigkeiten bereitet die Abschätzung der Schädigungsakkumulation in den einzelnen Phasen und die Festlegung des Zeitpunktes der Makrorißbildung. Der Einfachheit halber wird das Ermüdungsproblem als einheitlicher Bruchprozeß betrachtet. Allgemein wird zwischen „low-cycle-fatigue“ (LCF) und „high-cycle-fatigue“ (HCF) unterschieden. LCF ist durch hohe Spannungsamplituden und



geringer Lastzyklenanzahl bzw. durch plastische Dehnungen in der Größenordnung der elastischen Dehnungen charakterisiert. HCF ist dagegen durch kleine Spannungsamplituden und sehr großer Lastzyklenanzahl gekennzeichnet. Im Falle LCF sollte die Evolutionsgleichung in Abhängigkeit von den Dehnungsausschlägen beschrieben werden. So gibt Fischer in [34] in Erweiterung des Verfestigungsgesetzes nach Ludwik-Ramberg/Osgood und unter der Annahme, daß pro Belastungszyklus der Triaxialitätsfaktor  $R_v$  (siehe [34]) sowie  $D$  annähernd konstant bleiben, folgende Evolutionsgleichung als Schädigung pro Zyklus für LCF an:

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \frac{R_v \sigma^2}{2s_0 E (1 + 2/M)} \frac{1}{(1 - D)^\alpha} (\Delta \varepsilon_p^v)^{1 + 2/M} \quad (1.13)$$

( $\sigma$ ,  $s_0$ ,  $E$ ,  $M$  temperaturabhängige Werkstoffkonstanten;  $\varepsilon_p^v$  akkumulierte plastische Vergleichsdehnung). Die bei HCF pro Zyklus auftretende Schädigung ist sehr klein und besitzt mikroplastischen Charakter. Die Evolutionsgleichung muß daher in Abhängigkeit vom Spannungsverlauf beschrieben werden. Analog zur Vorgehensweise bei LCF und unter Verwendung einer mittleren Vergleichsspannung  $\sigma_{VM}$  und der Vergleichsspannung  $\sigma_v$  beschreibt Fischer in [34] den Schädigungsverlauf wie folgt:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{R_v \sigma_v^2 (\sigma_v - \sigma_{VM})^{M-1}}{B (1 - D)^{M + \alpha}} \frac{d\sigma_v}{dt} \quad \text{für } \sigma_v \geq \frac{\sigma_v^*}{R_v}$$

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad \text{für } \sigma_v \leq \frac{\sigma_v^*}{R_v}$$

(1.14)

( $\sigma_v^*$  Dauerfestigkeit). In Übereinstimmung mit den Wöhlerversuchen tritt keine Schädigung auf, wenn die Belastungen unterhalb der Dauerfestigkeit liegen.

## 2. Lösungsmethoden in der Schädigungsmechanik

Die in Abschnitt 1 beschriebenen Vorgehensweisen und Modelle der Schädigungsmechanik sollen hier unter dem Gesichtspunkt der Lösungsmethoden analysiert werden. Der Einfluß der Schädigung auf die Werkstoffeigenschaften und das mechanische Verhalten wird durch ein entsprechendes Schädigungsmodell beschrieben. Dieses Modell koppelt den Schädigungsprozeß mit den Konstitutivgleichungen. Als Beispiel sei das Effektivspannungskonzept genannt, das in relativ einfacher Weise den Einfluß der Schädigung auf die aktuellen Spannungen und Dehnungen beschreibt.

In einigen Fällen ist es möglich, eine direkte Integration der vorhandenen Gleichungen durchzuführen. Die Sonderfälle sind durch bestimmte Belastungsverhältnisse (z. B. konstante Spannung bei Zugversuchen mit konstanter Kraft oder konstanter Triaxialitätsfaktor bei Ermüdung) oder durch vereinfachende Annahmen (z. B. Schädigung annähernd konstant pro Belastungszyklus bei HCF) gekennzeichnet.

Für den allgemeinen Fall ist das Gleichungssystem der Schädigungsmechanik (geometrische Gleichungen, Be-

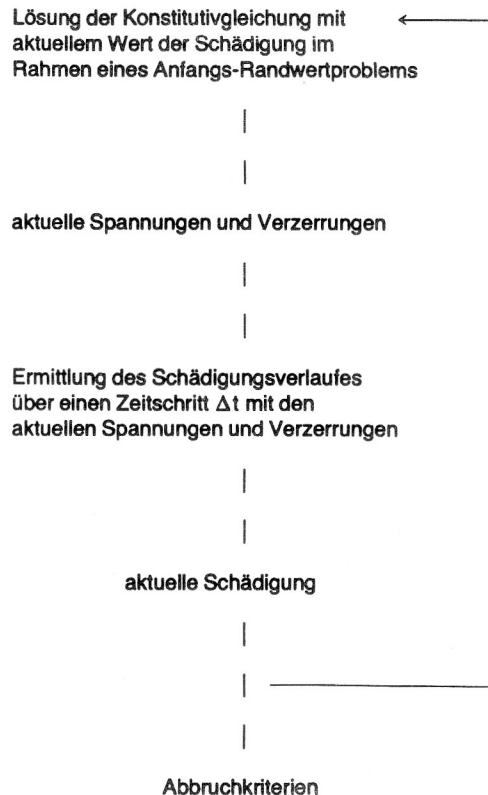
wegungsgleichungen, Evolutions- und konstruktive Gleichungen) nicht geschlossen lösbar. Daher ist man auf numerische Lösungsverfahren angewiesen. Da der Spannungszustand in einem Bauteil allgemein ortsabhängig ist, müßte der Schädigungsverlauf für jeden Punkt des Kontinuums gesondert ermittelt werden. Zur Ermittlung der Spannungs- und Dehnungsverteilung in einem Bauteil hat sich insbesondere die Finite-Element-Methode (FEM) als vorteilhaft erwiesen. Es gibt leistungsfähige FE-Software für unterschiedliches Werkstoffverhalten. Somit bietet es sich an, die Schädigungsmodelle in vorhandene FEM-Software zu integrieren.

Zur numerischen Behandlung gekoppelter Feldprobleme bestehen prinzipiell zwei Möglichkeiten [38].

- Die „ungekoppelte“, sukzessive Iteration, die auf der aufeinanderfolgenden Lösung der entsprechenden Gleichungen basiert, wobei die Koppelgrößen nur noch als Parameter fungieren.
- Die simultane Iteration der gekoppelten Feldgrößen.

Aus Untersuchungen über numerische Eigenschaften der iterativen Lösungsvarianten in [39] folgt, daß für eine schwache Kopplung die sukzessive Vorgehensweise den Vorteil der algorithmischen Einfachheit mit der schnelleren Konvergenz gegenüber den simultanen Lösung verbindet. Dagegen ist bei stärkeren Wechselwirkungen die simultane Iteration numerisch vorteilhaft [38].

Die Lösung instationärer Vorgänge (z. B. Wärmeleitung, dynamische Probleme) führt nach der räumlichen Diskretisierung (mittels FEM) auf ein System von Differentialgleichungen.



**Bild 3**  
Berücksichtigung des Einflusses der Schädigung auf die Spannungen und Dehnungen

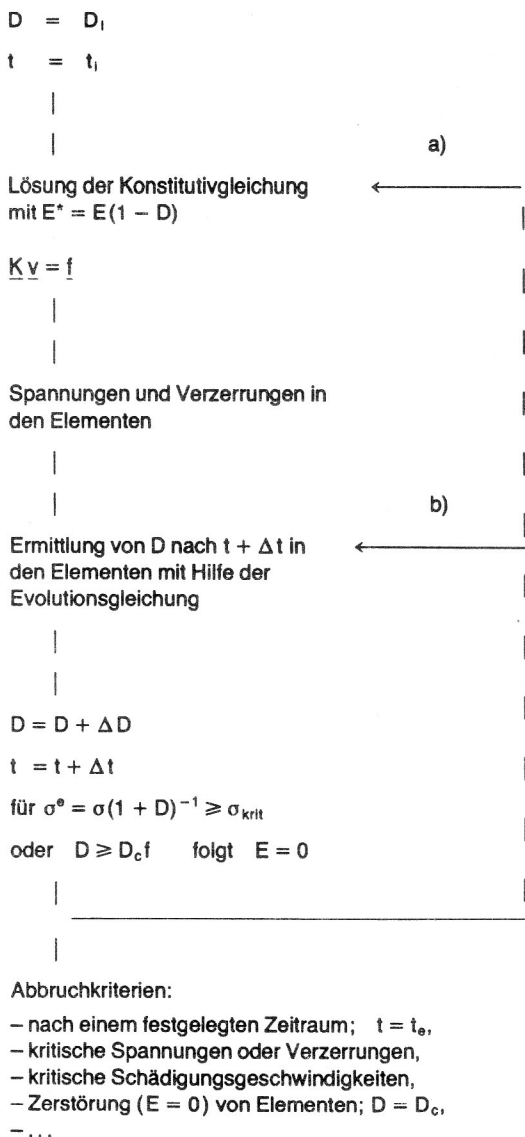
chungen, für dessen Lösung leistungsfähige numerische Verfahren zur Ermittlung des Zeitverlaufs zur Verfügung stehen. Es sind dies vor allem die

- Methode der modalen Superposition,
- Methode der direkten Zeitintegration.

Eine Einschätzung der Verfahren findet sich mit entsprechenden Literaturangaben in [40]. Die Methode der direkten Zeitintegration hat als universelles Verfahren zur Lösung linearer und nichtlinearer Aufgaben eine weite Verbreitung für die Lösung transienter Probleme gefunden [38]. Die Methode der modalen Superposition ist durch die notwendige zusätzliche Lösung des Eigenwertproblems oft numerisch aufwendiger.

Das Vorgehen bei der Verwendung einer sukzessiven Iteration und der Methode der direkten Zeitintegration ist in Bild 3 dargestellt.

Als Beispiel für einen Lösungsalgorithmus bei linear-elastischem Materialverhalten dient das Bild 4. Hierbei nimmt man in der Iteration über a) an, daß die Schädigungsentwicklung eine Umverteilung der Belastungen im Bauteil hervorruft. In der Iteration über b) nimmt man an, daß es



**Bild 4**  
Beispiel eines Schädigungsalgorithmus in der CDM

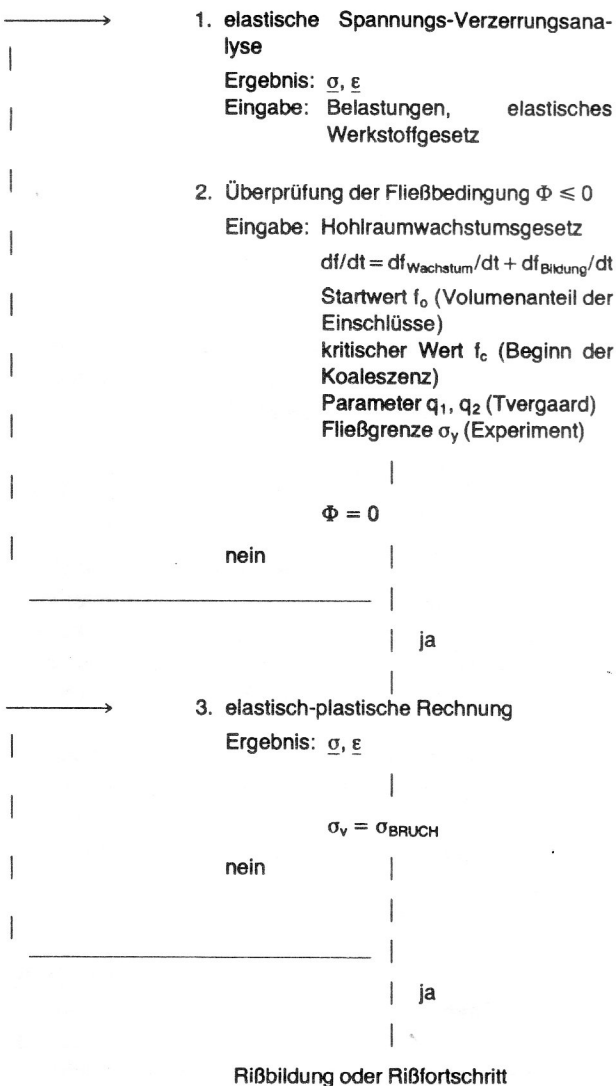
aufgrund der Schädigung am Mikroelement zu keinen makroskopischen Veränderungen kommt; das heißt, daß die Schädigung zu keiner Umverteilung der Spannungen im Bauteil führt. Diese Annahme vereinfacht den Lösungsprozeß (einmalige Lösung des mechanischen Problems) und senkt den numerischen Aufwand teilweise erheblich. Dies ist aber nicht in jedem Fall zulässig, da der mit dieser Annahme verbundene Fehler bei der Ermittlung des Schädigungsverlaufs von der Bauteilgeometrie und den Belastungen abhängig ist und somit nicht notwendigerweise klein bleibt.

Ein Berechnungsalgorithmus zur Modellierung des duktilen Bruches ist in Bild 5 vorgestellt.

Zur Ermittlung des Schädigungsverlaufes durch numerische Integration der Evolutionsgleichung der Form

$$\frac{dD}{dt} = f(D, t) \quad (2.1)$$

existieren schon eine Anzahl von Verfahren, für die Software zur Verfügung steht. Hierzu zählen u. a.:



**Bild 5**  
Berechnungsalgorithmus zur Modellierung des duktilen Bruchs

- a) einfache Integrationsverfahren
  - Euler-(Cauchy'scher)-Strecken zug,
  - verbessertes Polygonzugverfahren,
  - Verfahren von Heun (Prädiktor-Korrektor-Verfahren),
  - Einschnitt-Theta-Verfahren
- b) Runge-Kutta-Verfahren.

Die hier diskutierten Modellsimulationen können in der Ingenieurpraxis bereits heute genutzt werden. Da der numerische Aufwand gegenüber klassischen Bauteilanalysen jedoch sehr stark ansteigt, setzt dies eine Nutzung einer leistungsfähigen Hardware voraus.

### 3. Anwendungen der Schädigungsmechanik

In den letzten Jahren hatten sich in Erweiterung konventioneller Methoden zwei neue Konzepte, die Bruchmechanik und die Schädigungsmechanik, zur Beurteilung des Schädigungs- und Bruchverhaltens entwickelt, die Aussagen zur Lebensdauer von Bauteilen liefern. Beide Konzepte verwenden ein kontinuumsmechanisches Materialmodell, gehen aber von verschiedenen Idealisierungen und Vereinfachungen aus.

Im Rahmen der Annahmen der Bruchmechanik und deren globalen Näherungen treten Probleme bei der Beschreibung des Werkstoffverhaltens z. B. in folgenden Fällen auf:

- bei großen plastischen Zonen,
- bei zeitabhängigen Effekten, wie bei Kriechrißwachstum oder ein Zusammenwirken von Kriechen und Ermüdung,
- bei 3-dimensionalen Effekten, wie Risse in „Mixed-Mode-Beanspruchung“ oder das Rißwachstum bei nichtproportionaler Belastung,
- bei Mikrorissen in der Nähe der Rißspitze des Makrorisses,
- beim Wachstum und der Verschmelzung von Poren, Hohlräumen, usw.,
- bei thermischen Belastungen und Vorbeanspruchungseffekten,
- bei einer großen Anzahl von kleinen Rissen mit ungenauer Lagedefinition in einem heterogenen Medium,
- bei Verfestigungseffekten,
- ...

Die Schädigungsmechanik verfolgt das Ziel, kontinuumsmechanische Modelle und Berechnungsmethoden auch auf das der Bruchmechanik nicht mehr zugängliche, für die Lebensdauer eines Bauteils aber oftmals bestimmende Stadium vor der Entwicklung des Makrorisses auszudehnen. Somit stellt die Schädigungsmechanik eine komplementäre Näherung zur Bruchmechanik dar. Der Übergang von der Schädigungs- zur Bruchmechanik ist dann gegeben, wenn ein zur stabilen bzw. instabilen Rißausbreitung führender kritischer Schädigungszustand vorliegt. In solch einem Fall wird der makroskopische Hauptriß in Geometrie und Größe idealisiert, um eine hinreichende makroskopische Homogenität in Größe, Geometrie und Richtung zu erzeugen, was eine anschließende Beurteilung durch die Bruchmechanik ermöglicht.

Die Beurteilung des Werkstoffverhaltens mit Hilfe der Schädigungsmechanik ist auch über die Makrorißbildung hinaus möglich. So führt die Verwendung der CDM bei der Beurteilung von Makrorissen im Rahmen der „Local Approaches of Fracture“ (alle Methoden, die die Versagenskriterien der Schädigungsmechanik anwenden, um ein Rißinkrement und eventuell auch die Rißinstabilität vorherzusagen) zu ersten praktischen Ergebnissen.

Drei verschiedene Ebenen des Local Approaches of Fracture können bei wachsender Komplexität unterschieden werden [41]:

- a) die Berechnung von Spannungs- und plastischen Dehnungsfeldern an der Rißspitze mit analytischen Methoden (z. B. die Hutchinson-Rice-Riedel-Beziehung) und die Verwendung eines lokalen physikalischen Bruchkriteriums (über eine spezifische Entfernung von der Rißspitze),
- b) numerische Methoden, die diskrete Rißinkremente verwenden: Methoden, die die Technik des Knotenlösen verwenden, um Rißwachstum zu produzieren, wenn kritische Werte einer Größe über eine kritische Entfernung vor der Rißspitze erreicht sind. Diese physikalische Größe kann eine äquivalente Spannung oder Dehnung, eine Energie oder ein lokales Schädigungsmaß sein.
- c) die Berechnung der Spannung, der plastischen Dehnung und der Schädigung im ganzen Bauteil, speziell an der Rißspitze. Es wird das CDM-Konzept, einschließlich der progressiven Schädigung und der korrespondierenden Steifigkeitsreduktion, angewendet. Der Riß ist hier der Ort der Materialpunkte ohne Steifigkeit, wo die Schädigung einen kritischen Wert besitzt. Hier ist die Einführung kritischer Entfernungen oder Knotenlösungstechniken nicht erforderlich.

Die Local Approaches of Fracture stellen durch die Möglichkeit der Realisierung eines mehr physikalischen Bruchkriteriums und der Erfassung des Schädigungsprozesses eine Erweiterung gegenüber der klassischen Bruchmechanik dar.

### 4. Zusammenfassung und Ausblick

In den meisten Fällen besitzen die konventionellen Berechnungs- und Prüfmethode (vgl. auch Bild 1) eine ausreichende Sicherheit gegenüber dem Versagensfall, was deren langjährige erfolgreiche Anwendung bestätigt. Die aus der Berücksichtigung der Werkstoffdegradation in der werkstoffmechanischen Modellierung resultierenden Vorteile der Schädigungsmechanik sind mit erhöhtem Aufwand verbunden.

Der numerische und rechentechnische Aufwand wird durch mindestens eine zusätzlich zu integrierende Gleichung und dem ständigen Vorhandensein der unabhängigen Variablen „Zeit“ gesteigert. Ferner gibt es Anforderungen an den versuchstechnischen Aufwand bei der Messung der Werkstoffkennwerte und der Schädigung.

Aus diesen Gründen muß eingeschätzt werden, daß sich die Anwendung der Schädigungsmechanik auf ausgewählte Industriezweige beschränken wird. Zu diesen Industriezweigen zählen solche mit hohen Sicherheitsanforderungen und/oder Anforderungen an den Leichtbau (z. B. Kernkraftwerke, Luft- und Raumfahrt). Weiterhin muß fest-

gestellt werden, daß auch die Schädigungsmechanik auf dem idealisierten Modell „Kontinuum“ beruht und somit einen begrenzten Gültigkeitsbereich besitzt, dessen Grenze aber noch nicht befriedigend geklärt ist.

Als Vorteile der Schädigungsmechanik sind vor allem folgende Fakten zu nennen [34]:

- a) die unmittelbare Berücksichtigung des Schädigungseinflusses auf die aktuellen Dehnungen und Spannungen in einer Konstruktion,
- b) die Berücksichtigung von Mikroschädigungen (Poren, Risse u.a.) in der kontinuumsmechanischen Materialbeschreibung und somit auch die Möglichkeit der vereinfachten und physikalisch relevanten Berechnung des Rißfortschrittes im Rahmen der Local Approaches of Fracture,
- c) die Berücksichtigung der Poren- bzw. Rißschließung bei Druckhauptspannungen bei Verwendung anisotroper Schädigungsmodelle,
- d) die Möglichkeit der Anpassung der Schädigungsfunktionen an die Schädigungsmechanismen durch Experimente,
- e) die Berücksichtigung mehrerer simultaner Schädigungsmechanismen,
- f) die direkte Anwendbarkeit auf den dreidimensionalen Beanspruchungszustand und auf beliebige Beanspruchungsverläufe,
- g) die qualitativ richtige Wiedergabe der nichtlinearen Schadensakkumulation.

Nicht alle Schädigungsmechanismen können schon in gleicher Weise gut beschrieben werden. So ist die Entwicklung der Schädigungsmechanik für die Schädigungsprozesse duktile Schädigung, Kriechen und Ermüdung auf einem Stand, der bereits eine erste ingenieurtechnische Anwendung erlaubt. Für andere Schädigungsmechanismen sind u.a. noch folgende Entwicklungen notwendig, die aber bereits bearbeitet werden:

- a) die Modifizierung der Schädigungsfunktion bei Druckhauptspannungen,
- b) die Einführung und experimentelle Verifikation von dreidimensionalen Schädigungsformulierungen,
- c) die Berücksichtigung der Fehlerentstehung getrennt von der Fehlerausbreitung in der Schädigungsfunktion,
- d) die Berücksichtigung von Umgebungseffekten, wie Oxydation, Korrosion, Strahlung usw.,
- e) die bessere Berücksichtigung der „mikroskopischen“ Theorien bei der Festlegung der beschreibenden Gleichungen und der Interaktion von Schädigungsmechanismen,
- f) die verbesserte Anpassung der beschreibenden Gleichungen an experimentelle Beobachtungen, z. B. durch Einführung einer zusätzlichen Zustandsvariable,
- g) die Entwicklung eines verbesserten Ansatzes für das thermodynamische Potential bzw. für die freie Energie,
- h) die Entwicklung einer Variationsformulierung für die mit Schädigung verbundenen Prozesse.

Die Anwendung der Konzepte der Schädigungsmechanik in der Ingenieurpraxis wird vor allem durch folgende Faktoren bestimmt werden:

- höhere Zuverlässigkeit bei der Beurteilung der Lebensdauer bzw. von Versagenszuständen für Konstruktionen und Anlagen mit hohem Sicherheitsrisiko,

- Schaffung der Hard- und Softwarevoraussetzungen und des erforderlichen Kenntnissniveaus für eine effektive und korrekte Anwendung der Schädigungsmechanik durch Entwurfs- und Berechnungsingenieure.

## LITERATUR

- [1] Качанов, Л. М.: Основы механики разрушения. – Москва: Наука, 1974.
- [2] Solid Mechanics Research Trends and Opportunities (Report Editor: J. R. Rice). – In: Applied Mechanics Reviews. – New York 38(1985)10. – p. 1247 – 1308.
- [3] Panel Report on Micromechanics and Physics of Fracture. – In: Material Science and Engineering. – Amsterdam 94(1987), p. 1 – 69.
- [4] Kitagawa, H.: Micro- and Macroaspects in Computational Mechanics. – In: JSME International Journal. – Tokyo 30(1987)267 – p. 1361 – 1368.
- [5] Ashby, M. F.: Technology of the 1990's: advanced materials and predictive design. – In: Phil. Trans. R. Soc. Lond. – London A322(1987). – p. 393 – 407.
- [6] Sayir, M.: Mechanik im Jahr 2000. – In: Technische Rundschau. – Bern(1989)2. – S. 26 – 31.
- [7] Качанов, Л. М.: О времени разрушения в условиях ползучести. – В: Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – Москва (1958) 8. – С. 26 – 31.
- [8] Работнов, Ю. Н.: О механизме длительного разрушения. – В: Вопросы прочности материалов и конструкции. – Москва: Изд. АН СССР, 1959. – С. 5 – 7.
- [9] Janson, J.; Hult, J.: Fracture mechanics and damage mechanics – a combined approach. – In: Journal de mecanique theor. appl. – Paris 1(1977)1. – S. 69 – 84.
- [10] Altenbach, H. u.a.: Literaturzusammenstellung Schädigungsmechanik. – Magdeburg: TU „Otto von Guericke“, 1989., – 59 S.
- [11] Altenbach, H.; Blumenauer, H.: Grundlagen und Anwendungen der Schädigungsmechanik. – In: Neue Hütte. – Leipzig 34(1989)6. – S. 214 – 219.
- [12] Chaboche, J. L.: Phenomenological Aspects of Continuum Damage Mechanics. – In: Proceedings of XVII. ICTAM. – Grenoble, 1988.
- [13] Leckie, F. A.; Hayhurst, D. R.: Creep Rupture of Structures. – In: Proceedings of Royal Society London A340. – p. 323 – 347.
- [14] Palmgren, A.: Die Lebensdauer von Kugellagern. – VDI-Zeitschrift 68(1924). – S. 339 – 341.
- [15] Miner, M. A.: Cumulative Damage in Fatigue. – Journal of Applied Mechanics 12(1945). – p. A159 – A164.
- [16] Robinson, E. L.: Effect of Temperature Variation on the Long-Time Rupture Strength of Steels. – Transactions of ASME 74(1952). – p. 777 – 780.
- [17] Ledezveze, P.; Lemaitre, J.: Damage effective stress in quasi-unilateral condition. – Proceedings XVI. ICTAM (Lingby, Dänemark), 1984.
- [18] Krajcinovic, D.: Constitutive equations for damaging materials. – In: Transactions of ASME: Journal of Applied Mechanics. – New York 50(1983)2. – p. 355 – 360.
- [19] Davison, L.; Stevens, A. L.: Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies. – In: Journal of Applied Physics. – New York 44(1973)2. – p. 668 – 674.
- [20] Murakami, S.; Ohno, N.: A Continuum Theory of Creep and Creep Damage. – In: Creep in Structures (Ed. A. R. S. Pontter, D. R. Hayhurst). – Berlin (West): Springer-Verlag, 1981. – p. 422 – 444.
- [21] Cordebois, J. P.; Sidoroff, F.: Damage induced elastic anisotropy. – In: Mechanical Behavior of anisotropic solids (Ed. J.-P. Boehler). – Den Haag: M. Nijhoff, 1982. – p. 761 – 774.



- [22] Павлов, П. А.: Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. – Ленинград: Машиностроение, 1988. – 252 с.
- [23] Litewka, A.: Effective material constants for orthotropically damaged elastic solids. – In: Arch. Mech. Stos. – Warszawa 37(1985). – S. 631 – 642.
- [24] Кондауров, В. И.: Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел. – В. Прикл. Мат. Мех. – Москва 52(1988)2. – с. 302 – 310.
- [25] Вакуленко, А. А.; Качанов, М. Л.: Континуальная теория среды с трещинами. – Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. – Москва (1971)4. – с. 159 – 166.
- [26] Chaboche, J. L.: The concept of effective stress applied to elasticity and viscoplasticity in the presence of anisotropic damage. – In' Mechanical Behavior of anisotropic solids (Ed. J.-P. Boehler). – Den Haag: M. Nijhoff, 1982. – p. 737 – 760.
- [27] Chow, C. L.; Wang, J.: An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. – In: International Journal of Fracture. – Leyden 33(1987). – p. 3 : 16.
- [28] Lemaitre, J.; Chaboche, J. L.: Mecanique des materiaux solides. – Paris: Dunod, 1985. – 534 p.
- [29] Chaboche, J. L.: Continuum damage mechanics: Part I – General concepts. – In: Transactions of ASME: Journal of Applied Mechanics. – New York 55(1988)1. – S. 59 – 64.
- [30] Lemaitre, J.; Dufailly, J.: Damage measurements. – In: Engineering Fracture Mechanics. – New York 28(1987)5/6. – S. 643 – 661.
- [31] Gödner, H.; u. a.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre – Band 2. – Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1984.
- [32] Odqvist, F. K. G.; Hult, J.: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. – Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag, 1962.
- [33] Kachanov, L. M.: Introduction to continuum damage mechanics. – Dordrecht: M. Nijhoff, 1986. – 135 p.
- [34] Fischer, F. D.: Schädigungsmechanik – Ein modernes Konzept zur Beurteilung des Bruchverhaltens. – In: Hüttenmännische Monatshefte. – Wien 132 (1987) 11. – S. 524 – 534.
- [35] Chaboche, J. L.: Continuum damage mechanics: Present state and future trends. – In: Nuclear Engineering and Design. – Amsterdam 105(1987). – S. 19 – 33.
- [36] Hult, J.: CDM-Capabilities, Limitations and Promises. – In: Mechanisms of deformations and fracture (editor: K. E. Easterling). – Oxford, New York, Toronto, Sidney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1979. – p. 233 – 248.
- [37] Läckie, F. A.; Hayhurst, D. R.: Constitutive Equations for Creep Rupture. – In: Acta Metallurgica. – Oxford 25(1977). – p. 1059 – 1070.
- [38] Münch, C.-J.: Die Analyse thermomechanischer Vorgänge mit der Finite-Element-Methode. – Diss. A. TU Magdeburg, 1989.
- [39] Argyris, J. H.; Doltsinis, J. St.; Wüstenberg, H.; Kneese, F.: Numerik thermomechanischer Vorgänge. VDI – Forschungsheft 635/1986, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1286.
- [40] Gabbert, U.: Die Finite-Element-Methode in den Ingenieurwissenschaften unter dem Aspekt der rechentechnischen Realisierung im Rahmen universeller Programmsysteme. – Diss. B, TU Magdeburg, 1987.
- [41] Chaboche, J. L.: Fracture mechanics and damage mechanics: Complementarity of Approaches. – In: Numerical Methods in Fracture Mechanics, Proceedings of the fourth International Conference, San Antonio, (ed. by A. R. Luxmoore, D. R. J. Owen, Y. P. S. Rajapakse, M. F. Kanninen). – Swansea: Pineridge, 1987. – S. 309 – 324.

**Anschrift der Verfasser:**

Prof. Dr. sc. techn. J. Altenbach  
 Sektion Maschinenbau  
 WB Festkörpermechanik  
 Dr. sc. techn. H. Altenbach  
 Dipl.-Ing. P. Schießle  
 Sektion Technologie der metallverarbeitenden Industrie  
 WB Werkstofftechnik  
 Technische Universität „Otto von Guericke“  
 Magdeburg  
 PSF 124  
 Magdeburg  
 3010