Manuskripteingang: 29.11.1989

Grundlagen und Anwendungen der Bruchmechanik

H. A. Richard

1. Risse – Ursache von Schäden

Bis vor wenigen Jahrzehnten wurden Konstruktionen und Bauteile allein mit Hilfe der klassischen Festigkeitsberechnung ausgelegt. Trotz sorgfältiger Berechnung traten wiederholt an Brücken, Schiffen, Flugzeugen, Behältern, Reaktorkomponenten und Pipelines Schäden mit teilweise katastrophalen Folgen auf. Konkrete Beispiele für Schadensfälle in der Praxis sind: der Traversenbruch einer hydraulischen Presse [1], der Torsionsbruch einer Antriebswelle [2], der Bruch eines Kurbelzapfens [3] sowie eine geborstene Druckgasflasche [4].

Ursache von Schäden, die durch mechanische Beanspruchungen hervorgerufen werden, sind i. a. kleine Fehlstellen und Risse, die sich infolge Betriebsbelastung vergrößern. Erreichen diese Risse eine kritische Größe, so breiten sie sich instabil mit großer Geschwindigkeit aus. Die Rißbildung bzw. Rißentstehung ist dabei ein lokales Ereignis in der Mikrostruktur, das z. B. durch Kristallbaufehler verursacht wird. Bei der Rißausbreitung handelt es sich dagegen um einen makroskopischen Vorgang. Ursachen sind insbesondere schwingende bzw. statische Bauteilbelastung.

Für den Rißausbreitungsvorgang, der zu einem plötzlichen Restbruch führen kann, sind die Gegebenheiten an der Rißspitze wesentlich. Die Bruchmechanik [5] bis [7], die als fachübergreifende selbständige Disziplin verstanden werden kann, hat, ausgehend von den Spannungs- und Verschiebungsfeldern an der Rißspitze, Konzepte zur Vorhersage von Ermüdungsrißwachstum bzw. zur Vermeidung bzw. Vorhersage von spröden und duktilen Brüchen entwickelt. In diesem Beitrag werden insbesondere Konzepte behandelt, die sich in den Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik einordnen lassen, d. h., es werden Rißprobleme betrachtet, bei denen die plastische Zone am Riß klein gegenüber der Rißlänge bzw. den Bauteilabmessungen ist.

2. Spannungen und Spannungsintensitätsfaktoren

2.1. *Spannungsverteilung an Rissen*

Ausgangspunkt bruchmechanischer Betrachtungen ist das elastische Spannungsfeld in der Umgebung der Rißspitze. Die exakte Ermittlung der Spannungsverteilung an Rissen ist für einige Rißkonfigurationen unter Zugrundelegung von Idealisierungen (Riß = mathematischer Schnitt) und geeigneter Rißmodelle mit den Verfahren der Kontinuumsmechanik möglich (siehe z. B. [5], [8]). Aus derartigen Lösungen können Näherungsausdrücke gefunden werden, die nur in der unmittelbaren Umgebung der Rißspitze gelten. Durch Einführung von Polarkoordinaten r, φ an der Rißspitze (Bild 1) ergeben sich Reihenentwicklungen

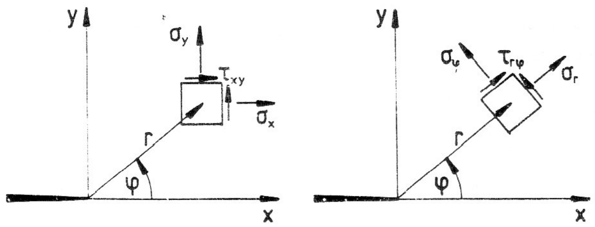


Bild 1
Koordinatensysteme und Spannungskomponenten an einer Rißspitze

für die Rißspitzenspannungsfelder, die von dem Faktor $r^{(n/2)-1}$ mit n = 1, 2, 3 ... abhängig sind. Berücksichtigt man nur das erste Reihenglied (mit $r^{-1/2}$), so ergibt sich

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I f^I_{ij}(\varphi) + K_{II} f^{II}_{ij}(\varphi) + K_{III} f^{III}_{ij}(\varphi) \right] \quad (1)$$

wobei i, j = x, y, z. Diese Näherungsgleichungen gelten für alle linear-elastischen Lösungen von Rißproblemen in homogenen isotropen Körpern. f^I_{ij}, f^{II}_{ij} und f^{III}_{ij} sind dimensionslose Funktionen, die nur den Winkel φ enthalten.

Die Parameter K_I, K_{II} und K_{III} sind die sogenannten Spannungsintensitätsfaktoren, die jeweils mit einer der drei grundlegenden Rißbeanspruchungsarten (Moden) verknüpft sind (Bild 2):

- Mode I: umfaßt alle Normalbeanspruchungen, die ein Öffnen des Risses, d. h. ein symmetrisches Entfernen der Rißufer bezüglich der Rißebene bewirken, Spannungsintensitätsfaktor K_I;
- Mode II: gilt für alle Schubbeanspruchungen, die ein entgegengesetztes Gleiten der Rißoberfläche in der Rißebene hervorrufen, Spannungsintensitätsfaktor K_{II};
- Mode III: entspricht dem nichtebenen Schubspannungszustand, der ein Gleiten der Rißoberflächen quer zur Rißrichtung bewirkt, Spannungsintensitätsfaktor K_{III}.

Die Spannungsintensitätsfaktoren beschreiben die Intensität des Spannungsfeldes in Rißnähe, nicht aber dessen Verteilung. Sie sind daher abhängig von Art und Größe der äußeren Belastung, der Rißlänge sowie den übrigen Abmessungen des Bauteils, aber unabhängig von den Polarkoordinaten r und φ.

Gl. (1) beschreibt die Spannungsverteilung in der Umgebung der Rißspitze für den Fall, daß alle drei Bruchmoden überlagert auftreten.

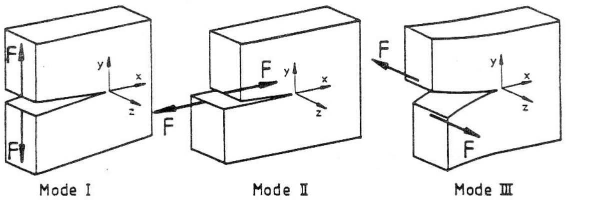


Bild 2
Die grundlegenden Rißbeanspruchungsarten (Moden) der Bruchmechanik

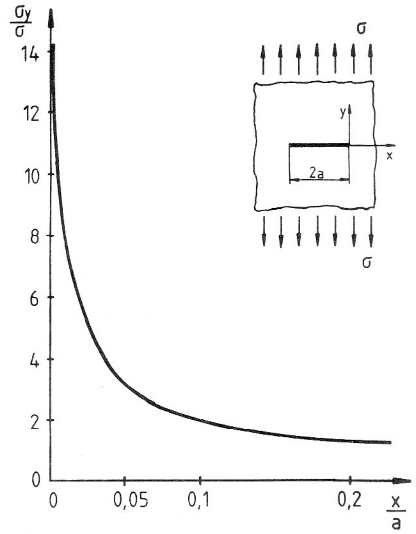


Bild 3
Verteilung der σ_y-Spannung entlang der x-Achse bei der gezogenen Scheibe mit Innenriß

Für reine Mode-I-Beanspruchung ($K_I \neq 0$, $K_{II} = K_{III} = 0$) gilt:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[1 - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right] \\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[1 + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right] \qquad (2) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}
\end{aligned}$$

wobei $f^I_{ij}(\varphi)$ in Gl. (1) durch die entsprechenden Funktionen ersetzt wurde. Die Verteilung der σ_y-Spannung vor der Rißspitze eines Innenrisses unter Zugbelastung (Bild 3) zeigt, wie schnell das singuläre Spannungsfeld mit zunehmendem Abstand von der Rißspitze abklingt.

Bei Überlagerung von Mode-I- und Mode-II-Beanspruchung ($K_I \neq 0$, $K_{II} \neq = 0$, $K_{III} = 0$) gelten in x-y-Koordinaten die Spannungen

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[1 - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right] - \\
&\quad - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\varphi}{2}\left[2 + \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\right] \\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[1 + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right] + \\
&\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} \qquad (3) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} - \\
&\quad - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[1 - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right]
\end{aligned}$$

und in r-φ-Koordinaten die Spannungen

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[1 + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right] + \\
&\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[\frac{3}{2}\sin\varphi - 2\tan\frac{\varphi}{2}\right] \\
\sigma_\varphi &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3\frac{\varphi}{2} - \frac{3}{2}\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2} \qquad (4) \\
\tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[3\cos\varphi - 1\right]
\end{aligned}$$

Bei Mixed-Mode-Belastung (Überlagerung von Mode I und Mode II) treten entlang der x-Achse ($\varphi = 0°$-Achse) die Spannungen

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \\
\sigma_y &= \sigma_\varphi = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \qquad (5) \\
\tau_{xy} &= \tau_{r\varphi} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}
\end{aligned}$$

auf.

Für die Verschiebungen u und v (Verschiebungen in x- bzw. y-Richtung) gelten für Mixed-Mode-Belastung die Beziehungen

$$\begin{aligned}
u &= \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[\kappa - 1 + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right] \\
&\quad + \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\varphi}{2}\left[\kappa + 1 + 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right] \\
v &= \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\varphi}{2}\left[\kappa + 1 - 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right] \qquad (6) \\
&\quad - \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[\kappa - 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]
\end{aligned}$$

μ: Schubmodul, $\varkappa = 3 - 4\nu$ für EVZ (Ebener Verzerrungszustand) bzw. $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ für ESZ (Ebener Spannungszustand), ν: Querdehnzahl.

2.2. *Spannungsintensitätsfaktoren*

Die Abhängigkeit der Spannungsintensitätsfaktoren von der äußeren Belastung (Normalspannung σ, Schubspannung τ, Kraft F, ...), der Rißlänge (a bei Außenrissen, 2a bei Innenrissen) sowie den übrigen Abmessungen des belasteten Körpers wird formelmäßig meist wie folgt dargestellt:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}\ Y_I$$
$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}\ Y_{II}\,. \tag{7}$$

Die dimensionslosen Funktionen Y_I und Y_{II} beschreiben die Einflüsse von Rißanordnung, Geometrie des Bauteils und Art der Lasteinleitung. Sie sind für viele Rißprobleme bereits bekannt oder müssen mit theoretischen, meist numerischen, oder experimentellen Methoden ermittelt werden.

Für den Innenriß in unendlich ausgedehnter Scheibe unter einachsiger Zugbelastung (Normalspannung σ) senkrecht zur Rißebene (Griffith-Rißproblem, Bild 4a) ergibt sich $Y_I = 1$ und somit

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \tag{8}$$

Bei mit reiner Schubbelastung (Bild 4b) gilt $Y_{II} = 1$, und man erhält

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}\,. \tag{9}$$

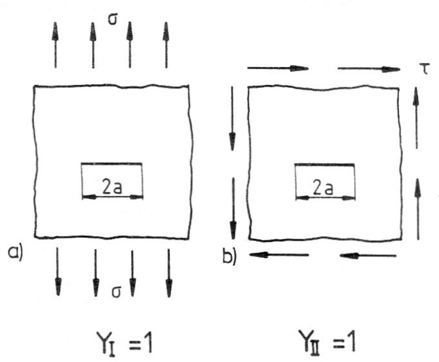


Bild 4
Unendlich ausgedehnte Scheibe mit Innenriß (Griffith-Rißproblem
a) Zugbelastung b) Schubbelastung

Bei reiner Mode-I- bzw. reiner Mode-II-Beanspruchung dürfen die Spannungsintensitätsfaktoren superponiert werden, wenn gleiche Riß- und Bauteilgeometrie vorliegt. So setzt sich der Spannungsintensitätsfaktor $K_{I_{ges}}$ für ein durch eine Kraft F und gleichzeitig durch ein Biegemoment M belastetes Bauteil mit Außenriß aus dem Spannungsintensitätsfaktor K_{IF} für das kraftbelastete Bauteil

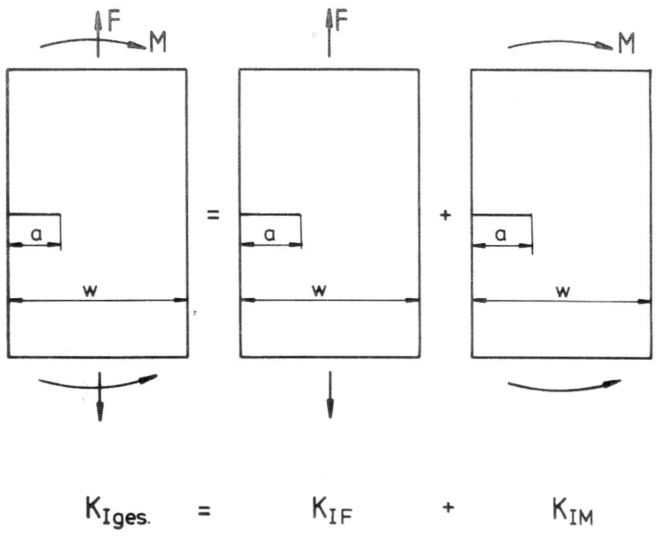


Bild 5
Superposition von Spannungsintensitätsfaktoren

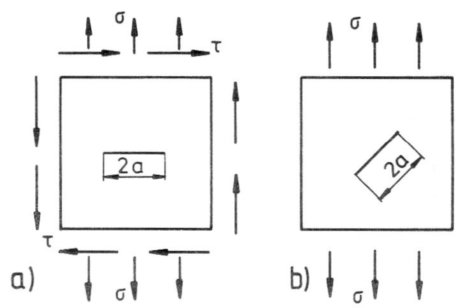


Bild 6
Rißfälle, bei denen Mixed-Mode-Beanspruchung am Riß vorliegt
a) Normal- und Schubbeanspruchung des Bauteils
b) schrägliegender Riß im Bauteil unter Normalbeanspruchung

und dem Spannungsintensitätsfaktor K_{IM} für das momentenbelastete Bauteil zusammen (Bild 5):

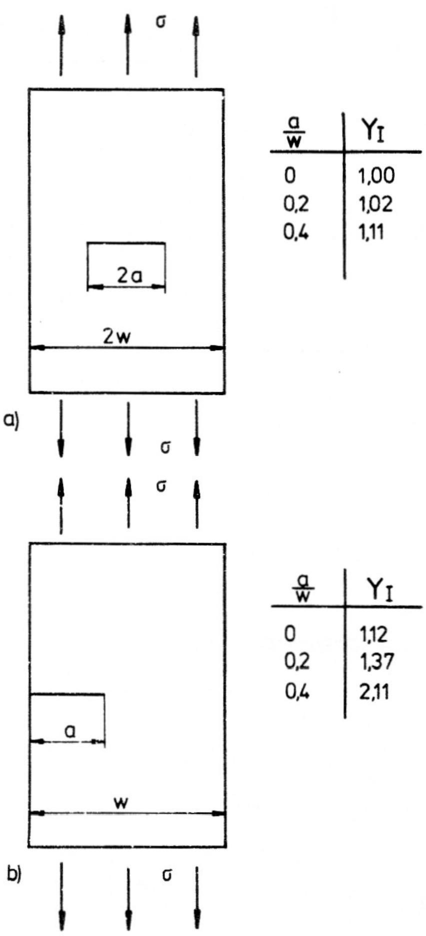
$$K_{I_{ges}} = K_{IF} + K_{IM}\,. \tag{10}$$

Während eine Superposition von Spannungsintensitätsfaktoren unter gewissen Bedingungen möglich ist, dürfen die Geometriefaktoren nicht oder nur gewichtet addiert werden.

Mixed-Mode-Beanspruchung (Überlagerung von Mode I und Mode II) liegt vor, wenn ein Bauteil z. B. gleichzeitig einer Normal- und einer Schubspannung ausgesetzt ist (Bild 6a) bzw. ein Riß schräg zur Belastungsrichtung liegt (Bild 6b). Während für den ersten Rißfall die Gln. (7) gelten, ist im zweiten Fall sowohl der K_I- als auch der K_{II}-Faktor von der eingeleiteten Spannung σ abhängig

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}\ Y_I^*$$
$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a}\ Y_{II}^* \tag{11}$$

wobei für die unendliche ausgedehnte Scheibe $Y_I^* = \sin^2 \beta$ und $Y_{II}^* = \sin \beta \cos \beta$ zu setzen ist.



$\frac{a}{w}$	Y_I
0	1,00
0,2	1,02
0,4	1,11

$\frac{a}{w}$	Y_I
0	1,12
0,2	1,37
0,4	2,11

Bild 7
Vergleich der Geometriefaktoren (dimensionslose) Spannungsintensitätsfaktoren) für den Innenriß und den Randriß im Zugstab, $Y_I = K_I/(\ a)$

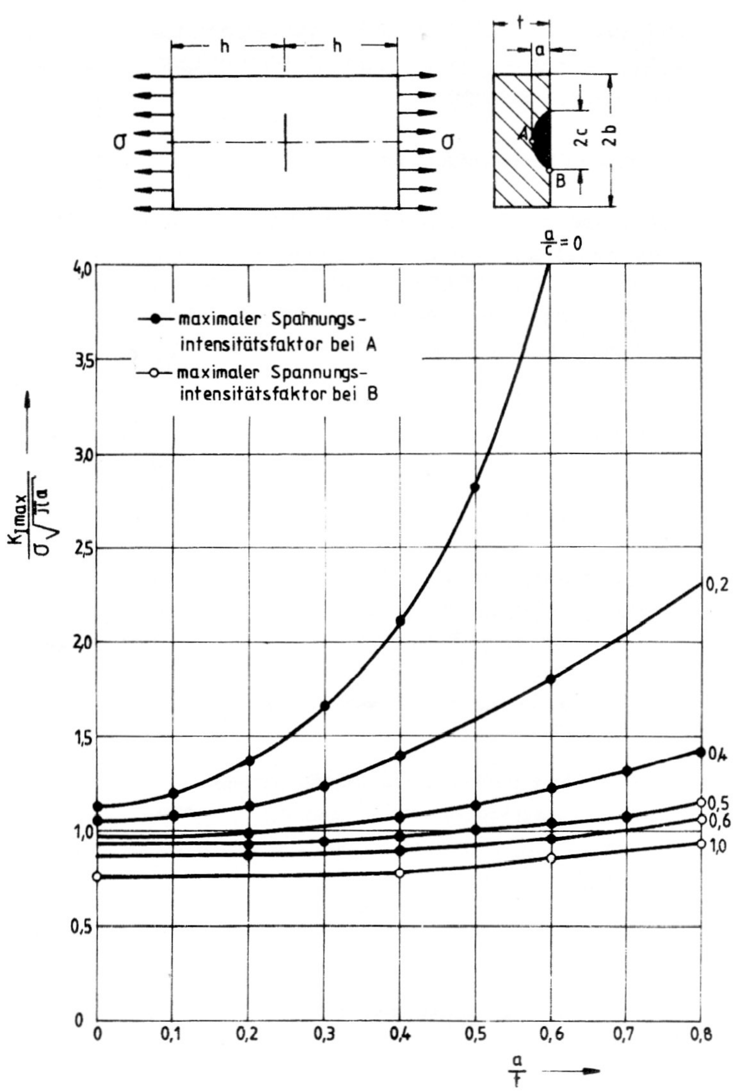


Bild 8
Dimensionslose Spannungsintensitätsfaktoren für den halbelliptischen Oberflächenriß in zugbelasteter Scheibe

Weitere Beispiele für Spannungsintensitätsfaktoren sind in Bild 7 und Bild 8 angegeben. Während Bild 7 einen Vergleich der Geometriefaktoren für den Innen- und den Randriß im Zugstab zeigt, gibt Bild 8 die dimensionslosen maximalen Spannungsintensitätsfaktoren für ein in der technischen Praxis bedeutsames Oberflächenrißproblem an.

Spannungsintensitätsfaktoren sind für zahlreiche Rißfälle bereits bestimmt und in einigen Arbeiten auch systematisch zusammengestellt [9] bis [12]. Trotzdem treten in der Praxis immer wieder Rißprobleme auf, für die noch keine Spannungsintensitätsfaktoren bekannt sind. Diese müssen dann mit geeigneten Methoden ermittelt werden. Im Zeitalter des Computers geschieht dies insbesondere mit numerischen Methoden, wie z. B. der Finite-Element-Methode (FEM), aber auch experimentelle Verfahren, wie z. B. die Spannungsoptik, werden eingesetzt. Bei der Finite-Element-Methode erfolgt die Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren z. B. über das Spannungsfeld, das Verschiebungsfeld, die Energiefreisetzungsrate, das Rißschließungsintegral oder das J-Integral, zum Teil finden aber auch spezielle Rißspitzenelemente, z. B. Hybridelemente, ihren Einsatz. Die Beschreibung aller dieser Methoden würde hier zu weit führen. Es soll daher lediglich auf die einschlägige Literatur, z. B. [11], [13] bis [18], verwiesen werden. Die spannungsoptischen Methoden sind z. B. in [19], [20] beschrieben.

3. Normalbeanspruchung von Rissen

3.1. Bruchkriterien

Die in Bild 9 dargestellte Vorgehensweise bei der bruchmechanischen Bewertung eines Bauteils, in dem sich ein Bruch befindet, zeigt die zentrale Bedeutung eines geeigneten Bruchkriteriums. Aufgabe des verwendeten Bruchkriteriums ist es, eine von der Belastung und der Riß- und Bauteilgeometrie abhängige charakteristische Größe einem entsprechenden Werkstoffkennwert gegenüberzustellen, um so zu Aussagen z. B. über eine gerade noch zulässige Belastung, eine kritische Fehlergröße usw. zu gelangen. In diesem Abschnitt soll lediglich auf Bruchkriterien für Mode-I-Beanspruchung von Rissen eingegangen werden.

Kriterium nach Griffith

Beim Griffithschen Kriterium [5], [21], das lediglich für ideal spröde Werkstoffe gilt, wird das Instabilitätsverhalten eines unter äußerer Belastung stehenden Risses ausgehend von einer Energiebilanz betrachtet. Grundgedanke ist: Bei Rißvergrößerung wird (potentielle) elastische Ener-

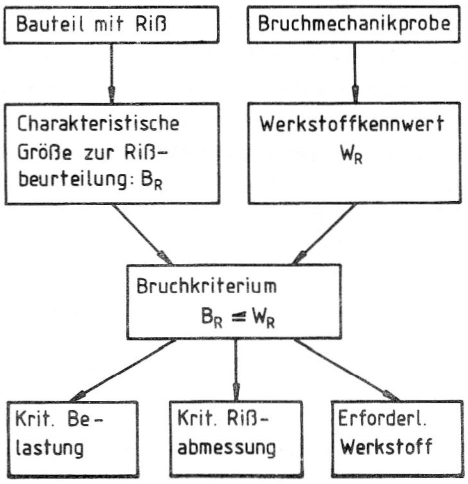


Bild 9
Prinzipielle Vorgehensweise bei der bruchmechanischen Bewertung eines Bauteils mit Riß
B_R: Beanspruchungsgröße Riß W_R: Werkstoffkennwert Riß

gie freigesetzt und gleichzeitig die (potentielle) Rißoberflächenenergie erhöht.

Für den Fall instabiler Rißvergrößerung (die i. a. zum Bruch führt) muß die gesamte potentielle Energie abnehmen, d. h., die freigesetzte elastische Energie muß den Bedarf an Oberflächenenergie übersteigen. Bedeutet

$$\Pi = U + S + W \tag{11}$$

die gesamte potentielle Energie einer belasteten Scheibe mit den Anteilen

U elastische Energie, die im belasteten Körper gespeichert ist,
S Oberflächenenergie des Risses und
W Arbeit der äußeren Kräfte,

so lautet das Instabilitätskriterium bei einer Rißverlängerung um ∂a (Scheibendicke B = 1)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{\partial (U + W + S)}{\partial a} = 0. \tag{12}$$

Das heißt, unmittelbar bei Rißvergrößerung hat die potentielle Energie ein Maximum.

Für den Innenriß der Länge 2a in einer unendlich ausgedehnten Scheibe unter einachsiger Zugspannung σ senkrecht zur Rißebene (Griffith-Rißproblem) gilt:

$$U + W = -\frac{\pi(1+\kappa)}{8\mu}\sigma^2 a^2 \tag{13}$$

$$S = 4a\gamma_o \tag{14}$$

(γ_o spezifische Oberflächenenergie).

Mit dem Instabilitätskriterium nach Gl. (12) erhält man die Griffithsche Formel für die kritische Spannung

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{16\mu\gamma_o}{\pi(\kappa+1)a}}, \tag{15}$$

wobei μ der Schubmodul, $\varkappa = 3 - 4\nu$ für EVZ und $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ für ESZ sind. Nimmt die äußere Spannung σ den kritischen Wert σ_c an, so beginnt sich der Riß instabil zu vergrößern.

K-Konzept

Zur Beschreibung der Gegebenheiten am Riß werden lediglich Spannungsfelder in der unmittelbaren Umgebung der Rißspitze herangezogen [22], wie sie durch Gl. (2) gegeben sind. Der Spannungsintensitätsfaktor K_I ist ein Maß für die Intensität des Spannungsfeldes und somit ein Maß für die Gefährlichkeit des Risses.

Für Normalbeanspruchung des Risses (Mode I) ergibt sich das Bruchkriterium

$$K_I \leq K_{I_c}, \tag{16}$$

d. h., ein kritischer Zustand (instabile Rißvergrößerung) tritt ein, wenn der Spannungsintensitätsfaktor K_I einen werkstoffabhängigen kritischen Wert K_{I_c} annimmt. Die Rißzähigkeit K_{I_c} ist wie fast alle Werkstoffkennwerte auch von der Temperatur und der Belastungsgeschwindigkeit abhängig. K_{I_c}-Werte werden insbesondere nach der amerikanischen Norm ASTM E399 bestimmt.

Das K-Konzept ist das wichtigste Konzept der linearelastischen Bruchmechanik. Wegen der zugelassenen kleinen plastischen Verformungen an der Rißspitze (Kleinbereichfließen) hat das Konzept auch für Bauteile aus mittelzähen Materialien Bedeutung.

Die Aussagen, die mit dem Konzept getroffen werden können, lassen sich am Beispiel eines Bauteils mit einseitigem Außenriß verdeutlichen (Bild 7b). Setzt man die für den Spannungsintensitätsfaktor K_I gültige Beziehung, Gl. (7), der Rißzähigkeit K_{I_c} gleich, so erhält man

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\, Y_I \leqslant K_{Ic}, \tag{17}$$

wobei nun für Y_I der Geometriefaktor für das Bauteil mit einzelnem Außenriß eingesetzt werden muß (Bild 7b).

Aus Gl. (17) erhält man für eine bestimmte Rißlänge die kritische Spannung

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}\, Y_I} \tag{18}$$

oder für eine gegebene Bauteilbelastung σ die kritische Rißlänge

$$a_c = \frac{K_{Ic}^{\,2}}{\pi\,\sigma^2\,Y_I^2}. \tag{19}$$

Da i. a. der Geometriefaktor Y_I auch von der Rißlänge a abhängig ist, kann Gl. (19) nur iterativ gelöst werden. Der Zusammenhang zwischen Bauteilbelastung und Rißlänge wird in Bild 10 verdeutlicht. Demnach erlauben, nach bruchmechanischer Betrachtungsweise, kleine Risse noch relativ hohe Bauteilbelastungen, bei größeren Rissen nimmt die maximal mögliche Bauteilbelastung jedoch erheblich ab. Von Bedeutung für derartige Aussagen sind allerdings auch der Geometriefaktor (ein größerer Geome-

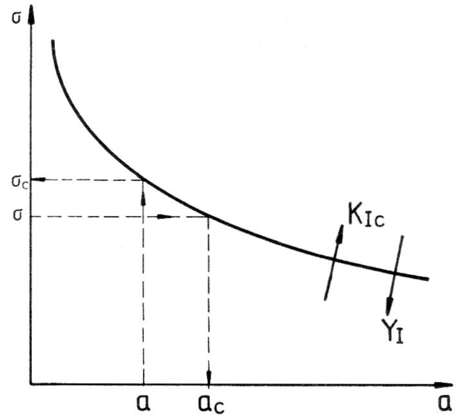


Bild 10
Zusammenhang zwischen Bauteilbelastung und Rißlänge

triefaktor führt zu einer Verminderung der zulässigen Bauteilbelastung) und die Rißzähigkeit K_{I_c} (höhere K_{I_c}-Werte vermindern die Bruchgefahr), Bild 10.

Kriterium der Energiefreisetzungsrate

Nach Irwin [22] ist die Energiefreisetzungsrate (Rißausbreitungskraft) wie folgt definiert

$$G = -\frac{\partial (U + W)}{\partial a}. \tag{20}$$

∂ (U + W) ist dabei die bei Rißverlängerung um ∂ a freigesetzte Energie (elastische Energie und Arbeit der äußeren Kräfte). Gl. (20) ist gültig für ein scheibenförmiges Bauteil mit der Dicke B = 1, bei dem sich eine Rißausbreitung in Richtung des vorhandenen Risses vollzieht. Da bei bestimmten Randbedingungen $\partial W = 0$, oder, in anderen Fällen, $\partial W << \partial U$ ist, folgt aus Gl. (20) auch:

$$G = -\frac{\partial U}{\partial a}. \tag{21}$$

Instabile Rißvergrößerung oder Bruch tritt ein, wenn die Energiefreisetzungsrate G einen kritischen Wert G_{I_c} annimmt:

$$G = G_{I_c}. \tag{22}$$

Die Energiefreisetzungsrate kann für Bauteile z. B. mit Hilfe der Finite-Element-Methode errechnet, oder für den Fall des ebenen Spannungszustandes, über die Beziehung

$$G = \frac{K_I^2}{E}, \tag{23}$$

aus dem Spannungsintensitätsfaktor K_I ermittelt werden.

Der Materialkennwert G_{I_c} wird i. a. aus der Rißzähigkeit K_{I_c} bestimmt:

$$G_{I_c} = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{I_c}^2. \tag{24}$$

3.2. *Rißzähigkeit K_{I_c}*

Das Bruchverhalten eines Bauteils mit Riß unter statischer Belastung wird im wesentlichen durch den Werkstoff, die Temperatur, den Spannungszustand (Ebener Spannungszustand, Ebener Verzerrungszustand) sowie die Art und die Geschwindigkeit der Belastung beeinflußt. Deshalb erfolgt die Ermittlung der Rißzähigkeit K_{I_c} i. a. nach einer Norm (z. B.: ASTM E399, [23]), bei der die Proben, die Mindestabmessungen, die Anrißerzeugung, die Belastungsgeschwindigkeit und die Versuchsauswertung vorgeschrieben sind. Von den in der Norm ASTM E399 vorgeschlagenen Proben ist die CT-Probe (Kompaktzugprobe) die wichtigste (Bild 11).

Die Einhaltung der Mindestprobenabmessungen ist erforderlich wegen der Gültigkeit der linearelastischen Bruchmechanik (die plastische Zone am Riß muß klein sein gegenüber der Rißlänge und der Ligamentabmessung) und zur Bestimmung eines geometrieunabhängigen Werkstoffkennwerts (erst ab einer bestimmten Mindestdicke –

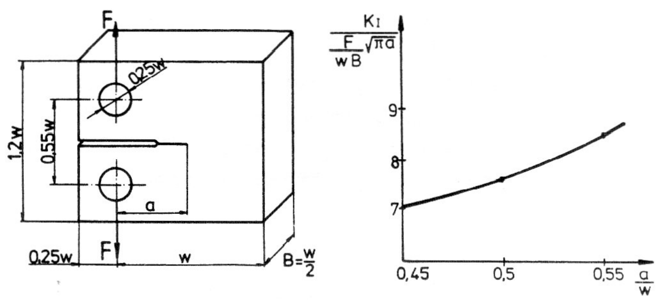


Bild 11
Kompaktzugprobe (CT-Probe) mit den normierten Spannungsintensitätsfaktoren für den interessierenden Rißlängenbereich 0,45 w ≤ a ≤ 0,55 w

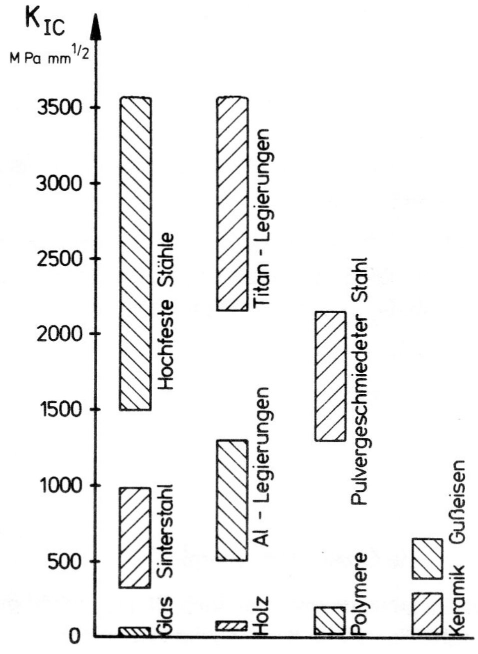


Bild 12
Übersicht über die Rißzähigkeitswerte verschiedener Materialien

Tabelle 1
$R_{p0,2}$- und K_{Ic}-Werte für einzelne Werkstoffe

Werkstoff		$R_{p0,2}$, R_e MPa	K_{Ic} MPa mm$^{1/2}$	Temperatur
Vergütungs-stähle (Maschinen-baustähle)	34 Cr Mo 4	450	2100	RT
	35 Cr Mo 13,5	450	1250	
	30 Cr Ni Mo 8	1060	3420	
	39 Cr Mo V 13,9	1500	2080	
Baustähle	St 37-3	230	2500	-80°C
		230	3500	-40°C
	St52-3	310	5500	-40°C
Eisenguss-werkstoffe	GGL-10	Rm= 93	221	RT
	GGG-55	376	1896	
Aluminium-legierungen	Al Cu Mg	440	880	RT
	Al Zn Mg Cu 1,5	500	910	
Keramische	Siliziumnitrid	-	60 -160	RT

dann liegt ein ebener Verzerrungszustand vor – ist K_{Ic} ein reiner Werkstoffkennwert).

Die Mindestabmessungen für die Rißlänge a und die Probendicke B sind abhängig von der Rißzähigkeit K_{Ic} und der Streck- bzw. Dehngrenze $R_{p0,2}$:

$$a, B \geqslant 2{,}5 \left[\frac{K_{Ic}}{R_{p0,2}}\right]^2 . \qquad (25)$$

Bei der experimentellen Bestimmung von K_{Ic} wird ausgehend von einer Starterkerbe ein Ermüdungsanriß erzeugt und anschließend die Probe mit einer bestimmten Belastungsgeschwindigkeit zerrissen. Aus den Versuchsdaten wird dann die Rißzähigkeit K_{Ic} ermittelt.

Rißzähigkeitswerte für verschiedene Materialien sind in Tabelle 1 angegeben und als Übersicht in Bild 12 dargestellt; weitere Werte findet man in [7].

4. Überlagerte Normal- und Schubbeanspruchung von Rissen

Überlagerte Rißbeanspruchung (Mixed-Mode-Beanspruchung) tritt in der technischen Praxis bei zahlreichen Rißfällen auf. Eine Kombination der grundlegenden Rißbeanspruchungsarten I und II liegt zum Beispiel bei den in Bild 6 gezeigten Rißfällen vor, tritt aber auch auf bei Zick-Zack-Rissen, bei einer Anhäufung von Rissen auf engem Raum (Mehrfachrissen), bei Rissen in der Umgebung von Kerben, usw. [24]. Bei Mixed-Mode-Beanspruchung läßt sich das Spannungsfeld in der unmittelbaren Umgebung der Rißspitze durch Gl. (3) oder Gl. (4) beschreiben. Das Rißspannungsfeld wird nun durch die beiden Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} charakterisiert. Der Bruch eines Bauteils bzw. das Einsetzen des instabilen Rißwachstums wird durch eine Rißbeanspruchungsgröße ausgelöst, die sowohl von dem K_I- als auch von dem K_{II}-Faktor abhängig ist. Dies erfordert spezielle Bruchkriterien für Mixed-Mode-Belastung. Dies wird auch aus der Darstellung der Gegebenheiten in einem K_I-K_{II}Diagramm deutlich (Bild 13). Auf der Mode-I-Achse ist nun die Situation für reine Mode-I-Beanspruchung dargestellt. Man erkennt, daß nach dem K-Konzept (Gl. (16)) instabiles Rißwachstum eintritt, wenn der Spannungsintensitätsfaktor K_I die Rißzähigkeit K_{Ic} erreicht. Die Mode-II-Achse gibt dagegen die Situation bei reiner Mode-II-Beanspruchung von Rissen wieder. K_{IIc} ist hier die Rißzähigkeit für Mode-II-Beanspruchung. Zwischen der Mode-I- und der Mode-II-Achse bzw. zwischen K_{Ic} und K_{IIc} befindet sich die Bruchgrenzkurve für Mixed-Mode-Beanspruchung. Instabile Rißausbreitung setzt also ein, wenn die Beanspruchung an der Rißspitze, gekennzeichnet durch den Punkt P, bzw. K_{Ip} und K_{IIp}, die Bruchgrenzkurve erreicht.

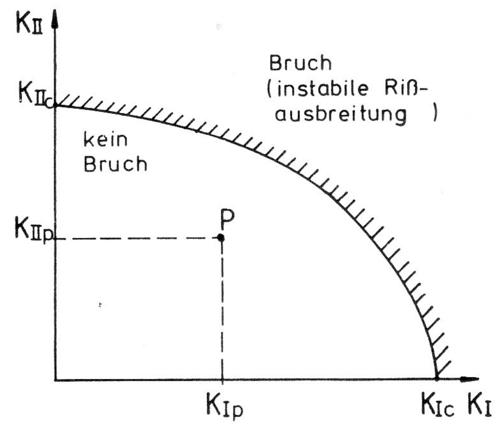


Bild 13
Darstellung der Bruchgrenzkurve für Mixed-Mode-.Belastung in einem K_I-K_{II}-Diagramm

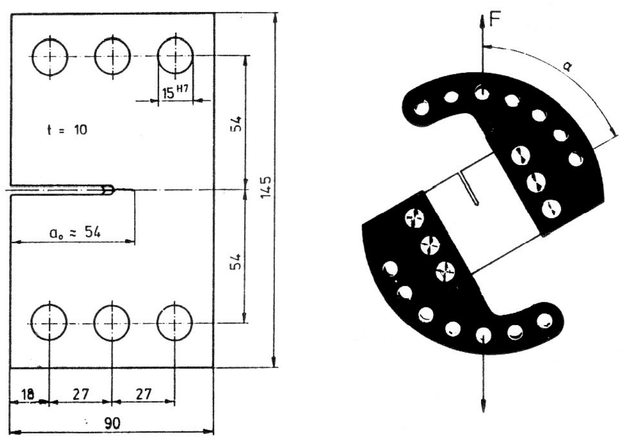


Bild 14
CTS-Probe und Belastungsvorrichtung (α = 0°: Mode I, 0°<α<90°: Mixed-Mode, α = 90°: Mode II)

Die materialabhängige Bruchgrenzkurve muß durch spezielle Experimente ermittelt werden [24] bis [26]. Dabei findet z. B. die CTS-Probe und eine spezielle Belastungsvorrichtung ihren Einsatz ([24], Bild 14). Die experimentellen Ergebnisse dienen u. a. zum Auffinden eines geeigneten Bruchkriteriums für Mixed-Mode-Beanspruchung. Von den zahlreichen Bruchkriterien, die in der Vergangenheit vorgeschlagen wurden, hat sich insbesondere das Tangentialspannungskriterium [27], das Kriterium nach Amestoy u. a. [28] und das verallgemeinerte Bruchkriterium [29], [30] bewährt.

Das verallgemeinerte Bruchkriterium kann als Erweiterung des K-Konzeptes, Gl. (16), verstanden werden. Aus den Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} wird ein Ver-

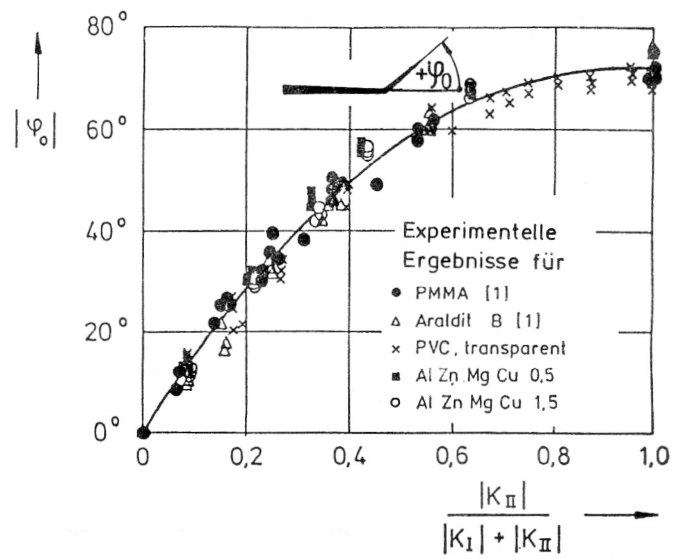


Bild 15
Vergleich der Formel zur Ermittlung der Rißablenkungswinkel Gl. (28) mit Versuchsergebnissen für verschiedene Materialien

gleichsspannungsintensitätsfaktor ermittelt, der dann lediglich mit der Rißzähigkeit K_{Ic} verglichen werden muß:

$$K_v = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{K_I^2 + 4(\alpha_1 K_{II})^2} \leq K_{Ic}. \qquad (26)$$

α_1 ist hierbei ein Parameter, der es erlaubt, das Kriterium an Bruchgrenzkurven für unterschiedliche Materialien anzupassen. Für die praktische Anwendung kann für α_1 meist der Wert 1,225 eingesetzt werden, so daß sich das folgende einfache Bruchkriterium ergibt:

$$K_v = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{K_I^2 + 6K_{II}^2} \leq K_{Ic}. \qquad (27)$$

Bei Mixed-Mode-Beanspruchung setzt also instabile Rißausbreitung ein, wenn der Vergleichsspannungsintensitätsfaktor K_V die Rißzähigkeit K_{Ic} erreicht.

Beim Beginn des Rißwachstums knickt der Riß sofort ab und verläuft dann relativ gerade in eine neue Richtung. Der Abknickwinkel ist dabei lediglich von den Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} des Ausgangsrisses abhängig. Er läßt sich mit der Beziehung

$$|\varphi_o| = 155{,}5^\circ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} - 83{,}4^\circ \left[\frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|}\right]^2 \qquad (28)$$

erreichen, wobei $\varphi_o > 0$ für $K_{II} < 0$ und $\varphi_o < 0$ für $K_{II} > 0$ ist. Diese Beziehung, die nur für $K_I \geq 0$ gilt, konnte bereits durch zahlreiche Experimente bestätigt werden (Bild 15).

5. Rißausbreitung bei schwingender Beanspruchung

Die Bedingungen für das Eintreten eines plötzlichen Bruchs bzw. für instabile Rißausbreitung (siehe Abschnitte 3 und 4) sind in vielen Fällen nicht von vornherein gegeben, sondern werden häufig erst durch das allmähliche Wachstum feiner Anrisse in einem mehr oder weniger langen Zeitraum als Folge der Betriebsbeanspruchung erreicht. Die Lebensdauer eines Bauteils kann i. a. unterteilt werden in eine Periode der Rißerzeugung (Rißbildung) und eine Periode des Rißwachstums. Bei Bauteilen mit glatter (polierter Oberfläche) und homogenem Spannungszustand überwiegt die Rißerzeugungsphase (ca. 80 . . . 90 % der Lebensdauer). Das eigentliche Rißwachstum spielt nur eine untergeordnete Rolle. Bei Bauteilen mit Defekten (Schweißfehlern, Lunkern) oder mit starken Spannungskonzentrationen überwiegt dagegen die Rißwachstumsphase. Nahezu die gesamte Lebensdauer ist durch das Rißwachstum bestimmt. Die Bruchmechanik bietet nun die Möglichkeit:

- die Lebensdauer von Bauteilen mit Rissen und kleinen Defekten vorherzusagen
- die Wachstumsgeschwindigkeit von Rissen zu ermitteln und
- Inspektionsintervalle festzulegen.

Das Wachstum von Ermüdungsrissen wird durch die Rißgeschwindigkeit da/dN charakterisiert (a: Rißlänge, N: Lastspielzahl). Die Rißgeschwindigkeit ist abhängig von den vorliegenden Belastungs- und Werkstoffbedingungen. Die Rißwachstumsbedingungen sind grundlegend verschieden bei Ermüdungsbelastung mit konstanter Amplitude und Ermüdungsbelastung mit variabler Amplitude. Im folgenden soll jedoch lediglich das Ermüdungsrißwachstum bei konstanter Belastungsamplitude besprochen werden.

5.1. *Zusammenhang zwischen Rißgeschwindigkeit und zyklischen Spannungsintensitätsfaktor*

Bei zeitlich veränderlicher Bauteilbelastung (Bild 16) ergibt sich am Riß ebenfalls ein zeitlich veränderliches Spannungsfeld. Bei reiner Mode-I-Belastung gilt:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\varphi), \qquad (29)$$

mit i, j = x, y. Die dimensionslose Funktion $f_{ij}^I(\varphi)$ ist, abgesehen von schlagartiger Belastungsänderung, auch bei zeitlich veränderlichen Belastungsverlauf zeitunabhängig. Für Mode-I-Ermüdungsbelastung gelten in Anlehnung an Gl. (2) folgende Spannungsfeldgleichungen:

$$\sigma_x(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[1 - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right]$$

$$\sigma_y(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\varphi}{2}\left[1 + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right] \qquad (30)$$

$$\tau_{xy}(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}$$

$K_I(t)$ stellt hierbei den zeitlich veränderlichen Spannungsintensitätsfaktor dar:

$$K_I(t) = \sigma(t)\sqrt{\pi a}\, Y_I. \qquad (31)$$

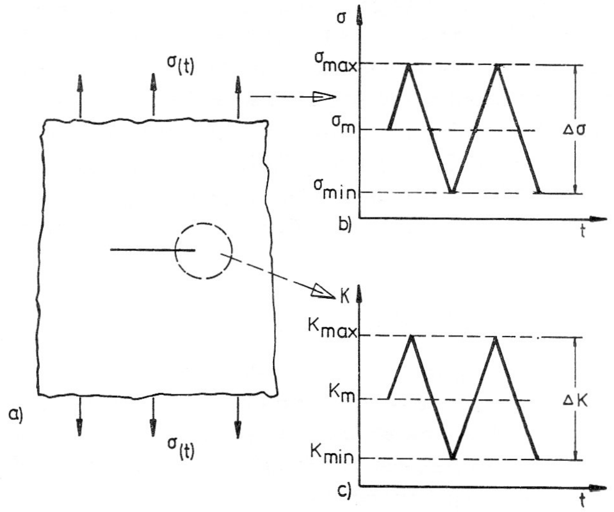


Bild 16
Bauteil mit zeitlich veränderlicher Belastung
a) Bauteil (schematisch)
b) zyklische Veränderung der ins Bauteil eingeleiteten Spannung (konstante Belastungsamplitude)
c) zyklische Veränderung des Spannungsintensitätsfaktors am Riß

In Gl. (31) ist $\sigma(t)$ die ins Bauteil eingeleitete zeitlich veränderliche Spannung, a die momentane Rißlänge und Y_I die Korrekturfunktion der Geometrie, die mit der entsprechenden Funktion bei statischer Belastung identisch ist.

Die maximalen und minimalen Werte von $K_I(t)$ ergeben sich zu

$$K_{I_{max}} = \sigma_{max} \sqrt{\pi a}\ Y_I$$

und (32)

$$K_{I_{min}} = \sigma_{min} \sqrt{\pi a}\ Y_I$$

Bei einer Schwingungsbelastung mit konstanter Lastamplitude (Bild 16) ist dann:

$$\Delta K_I = K_{I_{max}} - K_{I_{min}} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \sqrt{\pi a}\ Y_I. \quad (33)$$

Mit $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ erhält man den zyklischen Spannungsintensitätsfaktor

$$\Delta K_I = \Delta\sigma \sqrt{\pi a}\ Y_I. \quad (34)$$

Des weiteren läßt sich das Verhältnis

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{K_{I_{min}}}{K_{I_{max}}} \quad (35)$$

(R-Verhältnis) definieren.

Beim Rißausbreitungsvorgang verlängert sich der Riß mit zunehmenden Lastwechselzahlen. Wegen der Rißlängenzunahme vergrößert sich bei konstanter Belastungsamplitude auch der maximale Spannungsintensitätsfaktor $K_{I_{max}}$,

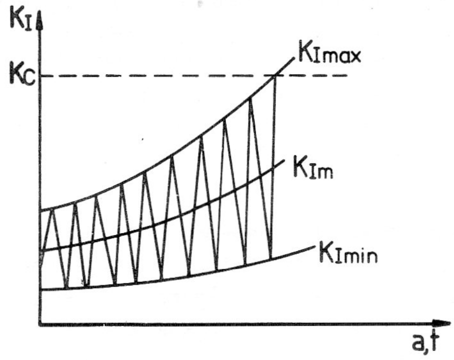


Bild 17
Zunahme von $K_{I_{max}}$, $K_{I_{min}}$ und $\Delta K_I = K_{I_{max}} - K_{I_{min}}$ bei Rißwachstum

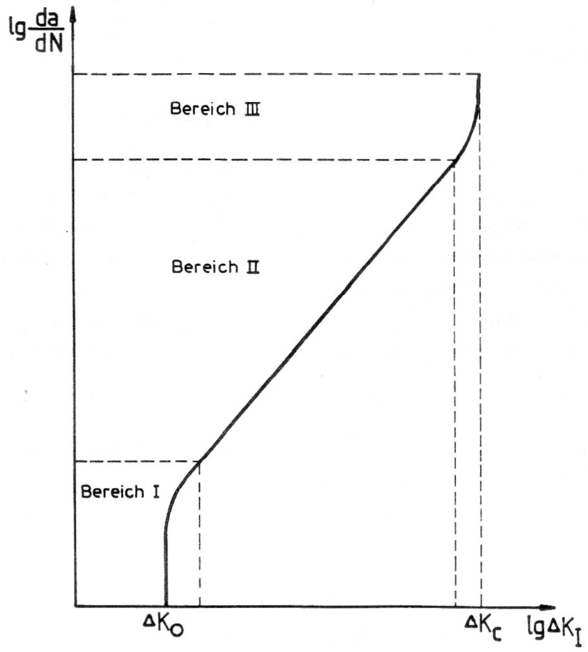


Bild 18
Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Rißgeschwindigkeit und dem zyklischen Spannungsintensitätsfaktor mittels der da/dN-ΔK-Kurve

der minimale Spannungsintensitätsfaktor $K_{I_{min}}$ und der zyklische Spannungsintensitätsfaktor ΔK_I (Bild 17). Bei Ermüdungsbelastung tritt instabile Rißausbreitung ein, wenn der maximale Spannungsintensitätsfaktor $K_{I_{max}}$ einen kritischen Wert K_c bzw. K_{I_c} erreicht. K_c ist hierbei ein Rißzähigkeitswert für Bauteile, deren Dicke den in der Norm ASTM E 399 vorgeschriebenen Mindestwert unterschreitet.

Bestimmt man experimentell die Rißgeschwindigkeit da/dN und trägt sie über dem zyklischen Spannungsintensitätsfaktor doppellogarithmisch auf, so erhält man die in Bild 18 gezeigte Kurve. Diese kann in insgesamt 3 Bereiche unterteilt werden:

Bereich I:	niedrige Rißwachstumsgeschwindigkeit
Bereich II:	mittlere Rißwachstumsgeschwindigkeit
Bereich III:	hohe Rißwachstumsgeschwindigkeit

Die da/dN-ΔK-Kurve nähert sich asymptotisch den beiden Grenzwerten ΔK_0 und ΔK_c. ΔK_0 ist der Schwellenwert (Threshold-Wert) der Spannungsintensität. Für ΔK_I-Werte kleiner ΔK_0 ist ein Riß nicht ausbreitungsfähig. ΔK_c ist die zyklische Spannungsintensität, bei der Bruch oder instabiles Rißwachstum eintritt. Dies ist der Fall, wenn $K_{I_{max}} = K_c$ ist.

Im Bereich II (linearer Kurvenverlauf) läßt sich der Zusammenhang zwischen der Rißwachstumsgeschwindigkeit da/dN und dem zyklischen Spannungsintensitätsfaktor ΔK_I mit hinreichender Genauigkeit durch die Paris-Erdogan-Gleichung beschreiben:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m. \tag{36}$$

Der Exponent m ist eine werkstoffabhängige Größe, die Werte zwischen 2 und 7 annehmen kann; die Konstante C hängt insbesondere vom Werkstoff und vom Spannungsverhältnis R ab.

5.2. Experimentelle Ermittlung der Rißgeschwindigkeit

Die Konstanten C und m der Paris-Erdogan-Gleichung müssen durch geeignete Experimente ermittelt werden. In der Norm ASTM E 647 [31] sind die Proben, die Mindestabmessungen, die Versuchsdurchführung und die Versuchsauswertung vorgeschrieben. Als Proben sind die CT-Probe und die CCT-Probe [31] vorgesehen. Im Gegensatz zu den Proben zur Bestimmung der Rißzähigkeit (Abschnitt 3.2., $B = \frac{W}{2}$) werden bei Ermüdungsversuchen, wegen der möglichen Rißfrontkrümmung, wesentlich geringere Probendicken verwendet:

$$\frac{W}{20} \leqslant B \leqslant \frac{W}{4}$$

(sonstige Abmessungen siehe Bild 11).

Die Versuche werden bei konstanter Lastamplitude, d. h. im Einstufenversuch, durchgeführt. Ausgehend von einem Schwingungsmaß wird, beginnend mit kleinem ΔK, i. a. bis zum Bruch geschwungen und dabei in gewissen Abständen die Rißlänge a und die Lastwechselzahl N gemessen. Aus dem a-N-Diagramm (Bild 19) erhält man dann die Rißgeschwindigkeit da/dN, und aus der ins Bauteil eingeleiteten zyklischen Spannung $\Delta\sigma$ und der aktuellen Rißlänge a erhält man mit Gl. (34) den zyklischen Spannungsintensitätsfaktor. Trägt man da/dN über ΔK doppellogarithmisch auf, so erhält man die im Bild 18 gezeigte Rißgeschwindigkeitskurve.

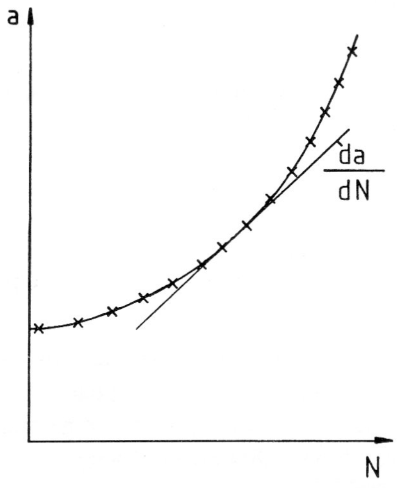


Bild 19
Rißlänge a in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl N bei Ermüdungsversuchen mit konstanter Lastamplitude

5.3. Werkstoffkennwerte

Werte für die Konstanten C und m der Paris-Erdogan-Gleichung sind in Tabelle 2 für einige Werkstoffe angegeben (s. a. [6], [7]). Hierbei ist zu beachten, daß die Angaben nur Gültigkeit besitzen, wenn in Gl. (36) da/dN in mm/LW und ΔK in MPa $mm^{1/2}$ verwendet wird. Schwellenwerte ΔK_0 findet man in [6], [7].

Tabelle 2
Werkstoffkennwerte m und C für die Paris-Erdogan-Gleichung (für R = 0,1)

Werkstoff		$R_{P0,2}$ MPa	m	C
Stahl	Ck 45	440	3,20	$3{,}22 \times 10^{-14}$
"	42 Cr Mo 4	720	2,36	$1{,}11 \times 10^{-11}$
"	X20 Cr 13	620	2,01	$1{,}61 \times 10^{-10}$
"	H60-3	485	3,8	$4{,}8 \times 10^{-10}$
Stahlguß	GS-35 Cr Mo V 10.4 (ölvergütet)	720	3,3	$1{,}95 \times 10^{-14}$
"	GS-C25	245	3,25	$3{,}73 \times 10^{-14}$

6. Anwendungen

Die technische Bruchmechanik ermöglicht

- die Ermittlung einer kritischen Rißabmessung, bei der instabile Rißausbreitung bzw. Bruch eintritt;
- die Bestimmung einer kritischen bzw. einer zulässigen Bauteilbelastung;
- die Ermittlung der vorhandenen Sicherheit gegen Bruch;
- die Ergreifung konstruktiver Maßnahmen zur Verminderung der Bruchgefahr;
- die Auswahl eines weniger bruchgefährdeten Werkstoffs;
- die Vorhersage von Rißwegen;
- die Ermittlung einer Mindestrißlänge, bei der Ermüdungsrißwachstum entstehen kann;
- die Ermittlung der Lebensdauer bis zum Bruch und
- die Festlegung von Inspektionsintervallen.

Nicht alle diese Möglichkeiten der Bruchmechanik können im Rahmen dieses Beitrags aufgezeigt werden. Betrachtet werden soll lediglich das Fallbeispiel einer zyklisch belasteten Zuglasche (Breite 2w = 200 mm), bei der ein Innenriß der Länge $2a_a$ = 2 mm festgestellt wurde (Bild 20). Es stellen sich nun die Fragen, ob sich der Riß unter der gegebenen zyklischen Belastung (σ_{max} = 160 MPa, σ_{min} = 20 MPa) ausbreiten kann und, falls er sich ausbreiten kann, bei welcher Rißlänge und nach wieviel Lastwechselzahlen sich instabile Rißausbreitung bzw. Bruch des Bau-

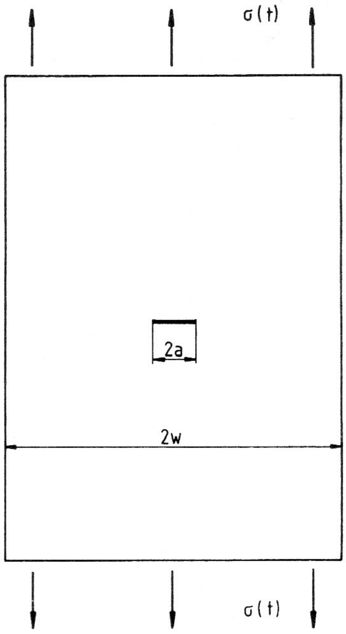


Bild 20
Zyklisch belastete Zuglasche mit Innenfehler (Innenriß)

teils ereignet. Für den Werkstoff der Zuglasche liegen folgende Materialdaten vor:

$R_{po,2} = 600$ MPa, $K_c = 1100$ MPa mm$^{1/2}$,

$\Delta K_o = 200$ MPa mm$^{1/2}$

$C = 2 \cdot 10^{-12}$, $m = 3{,}0$ für da/dN in mm/LW,

ΔK in MPa mm$^{1/2}$

und $R = 0{,}1$

● Mindestrißlänge, bei der Ermüdungsrißwachstum einsetzt

Ermüdungsrißwachstum setzt ein, wenn der zyklische Spannungsintensitätsfaktor nach Gl. (34) den Schwellenwert ΔK_o erreicht:

$$\Delta K_I = \Delta\sigma \sqrt{\pi a}\; Y_I = \Delta K_o. \tag{37}$$

Aus dieser Beziehung erhält man die Mindestrißlänge a_o, bei der Rißwachstum einsetzt:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\Delta K_o}{\Delta\sigma\, Y_I}\right]^2. \tag{38}$$

Geht man von $Y_I = 1$ aus, s. a. Bild 7a, und setzt man die gegebenen Werte für $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ und ΔK_o ein, so ergibt sich:

$a_o = 0{,}65$ mm

bzw. $2a_o = 1{,}3$ mm. Da die Ausgangsrißlänge $2a_a = 2$ mm größer als $2a_o$ ist, breitet sich der Riß bei der gegebenen zyklischen Belastung zunächst stabil (langsam, kontrolliert) aus.

● Kritische Rißlänge, bei der Rißwachstum einsetzt

Instabiles Rißwachstum setzt ein, wenn der Maximalwert des Spannungsintensitätsfaktors, Gl. (32), die Rißzähigkeit K_c erreicht:

$$K_{I_{max}} = \sigma_{max} \sqrt{\pi a}\; Y_I = K_c. \tag{39}$$

Hieraus folgt die kritische Rißlänge

$$a_c = \frac{1}{\pi}\left[\frac{K_c}{\sigma_{max}\, Y_I}\right]^2. \tag{40}$$

Mit $Y_I \approx 1$ und den Werten für σ_{max} und K_c folgt

$a_c = 15$ mm

bzw. $2a_c = 30$ mm. Da $a_c/w = 0{,}15$, ist nach Bild 7a der Faktor Y_I tatsächlich ≈ 1.

● Restlebensdauer

Für ein Rißwachstum von $a_a = 1$ mm bis $a_c = 15$ mm ist eine bestimmte Lastwechselzahl N_c erforderlich. Diese Restlebensdauer N_c kann man (näherungsweise) mit Hilfe des Paris-Erdogan-Gesetzes ermitteln. Aus Gl. (36) folgt

$$dN = \frac{da}{C(\Delta K_I)^m}$$

und somit

$$N_c = \int_{a_a}^{a_c} \frac{da}{C(\Delta K_I)^m}, \tag{41}$$

mit ΔK_I nach Gl. (34).

Für den Fall, daß $\Delta\sigma$ und Y_I konstant sind, ergibt die Integration für $m \neq 2$:

$$N_c = \frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right) C\left[\Delta\sigma\sqrt{\pi}\, Y_I\right]^m}\left[\frac{1}{a_a^{\frac{m}{2}-1}} - \frac{1}{a_c^{\frac{m}{2}-1}}\right] \tag{42}$$

und für $m = 2$:

$$N_c = \frac{1}{C\pi\left[\Delta\sigma\, Y_I\right]^2}\ln\frac{a_c}{a_a}. \tag{43}$$

Da bei dem vorliegenden Beispiel $m = 3$ ist, kommt Gl. (42) zur Anwendung. Mit den ermittelten Rißlängen sowie den gegebenen Belastungs- und Werkstoffdaten erhält man für die Zuglasche eine Restlebensdauer von $N_c = 48.600$ LW. Durch Verminderung der Belastung um z. B. 20 % könnte die Lebensdauer auf mehr als 101.000 LW gesteigert, d. h. mehr als verdoppelt werden.

Dieses Beispiel gibt einen ersten Einblick in die Möglichkeiten, die sich durch die konsequente Anwendung der Bruchmechanik ergeben. Weitere Anwendungsbeispiele sind z. B. in [6], [7] erläutert. Wie man in der technischen Praxis vorgehen kann, wenn Mixed-Mode-Rißbeanspruchung vorliegt, ist z. B. in [29], [30], [32] angegeben.

LITERATUR

[1] Bertram, W.: Traversenbruch einer hydraulischen Presse. Jahrestagung „Werkstoff – Bauteil – Schaden" der VDI-Gesellschaft Werkstofftechnik, München 1983, S. 83 – 88.

[2] Lange, G.: Konstruktions-, werkstoff- und fertigungsbedingte Schäden an Luftfahrzeugen. Jahrestagung „Werkstoff – Bauteil – Schäden" der VDI-Gesellschaft Werkstofftechnik, München 1983, S. 149 – 154.

[3] Stenzel, K.: Werkstoff- und Bauteilverhalten im Bereich der Marine. Jahrestagung „Werkstoff – Bauteil – Schäden" der VDI-Gesellschaft Werkstofftechnik, München 1983, S. 149 – 154.

[4] Bauteilschäden, Erfahrungen aus der Sachverständigentätigkeit, Verlag TÜV Rheinland.

[5] Hahn, H. G.: Bruchmechanik. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1976.

[6] Schwalbe, K. H.: Bruchmechanik metallischer Werkstoffe. Hanser-Verlag München, 1980.

[7] Blumenauer, H.; Pusch, G.: Technische Bruchmechanik. VEB Verlag Leipzig, 1982.

[8] Hahn, H. G.: Spannungsverteilungen an Rissen in festen Körpern. VDI-Forschungsheft 542. Düsseldorf, 1970.

[9] Tada, H.; Paris, P. C.; Irwin, G. C.: The stress analysis of cracks handbook. Hellertown 1973.

[10] Richard, H. A.: Interpolationsformel für Spannungsintensitätsfaktoren (1979), S. 1138 – 1143.

[11] Raju, I. S.; Newman, J. C.: Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates. Engng. Fract. Mech. 11 (1979) S. 817 – 829.

[12] Murakami, Y.: Stress intensity factors handbook, Vol. 1, Vol. 2, Pergamon Press, Oxford 1987.

[13] Rossmanith, H. P.: Finite Elemente in der Bruchmechanik. Springer-Verlag Wien, 1982.

[14] Ishikawa, H.; Kitagawa, H.; Okamura, H.: J integral of a mixed mode crack and its application. ICM 3, Cambridge 1979, S. 447 – 455.

[15] Pirro, P.: Beitrag zur numerischen Berechnung von bruchmechanischen Größen für elastisches und elastisch-plastisches Materialverhalten insbesondere bei gemischter Belastung. Dissertation Universität Kaiserslautern 1986.

[16] Drumm, R.: Zur effektiven FEM-Analyse ebener Spannungskonzentrationsprobleme. Dissertation Universität Karlsruhe 1982.

[17] Buchholz, F.-G.; Meiners, B.: Lokale und globale Energiemethoden zur Berechnung bruchmechanischer Kennwerte mit ASKA, IKOSS-GmbH: Proc. of the XIV Int. Congr. Baden-Baden. Stuttgart 1985, S. 331 – 364.

[18] Kuna, M.; Wiltinger, L.; Altenbach, J.: Theoretische Überlegungen zur bruchmechanischen Analyse ebener elastostatischer Rißprobleme mit der Methode der finiten Elemente. Maschinenbautechnik 30 (1981), S. 4 – 8.

[19] Richard, H. A.: Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren aus Kerbfaktor- und Kerbspannungsdiagrammen. Forsch. Ing. Wes. 45 (1979), S. 188 – 199.

[20] Sanford, R. J.; Dally, J. W.: A general method for determining mixed mode stress intensity factors from isochromatic fringe patterns. Engng. Fract. Mech. 11 (1979), S. 621 – 633.

[21] Griffith, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc. London A 221 (1921), S. 163 – 198.

[22] Irwin, G. R.: Fracture. In: Flügge, S.: Handbuch der Physik, Bd. 6, S. 551 – 590, Berlin 1958.

[23] ASTM E 399: Plane strain fracture toughness of metallic materials. Standard of the American Society for Testing and Materials.

[24] Richard, H. A.: Bruchvorhersagen bei überlagerter Normal- und Schubbeanspruchung von Rissen. VDI-Forschungsheft 631, Düsseldorf 1985.

[25] Richard, H. A.: Specimens for investigating biaxial fracture and fatigue processes. In: Brown, M. W.; Miller, K. J.: Biaxial and multiaxial fatigue. EGF 3, Mechanical Engineering Publications. London 1989, S. 217 – 229.

[26] Tenhaeff, D.: Untersuchungen zum Ausbreitungsverhalten von Rissen bei überlagerter Normal- und Schubbeanspruchung. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1988.

[27] Erdogan, F.; Sih, G. C.: On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. J. Basic Engng. 85 (1963) S. 519 – 525.

[28] Amestoy, M.; Bui, H. D.; Dang Van, K.: Analytical asymptotic solution of the kinked crack problem. In: Francois, D. u. a.: Advances on fracture research. Oxford 1980.

[29] Richard, H. A.: Praxisgerechte Beurteilung von Mixed-Mode-Rißproblemen. Vorträge der 19. Sitzung des Arbeitskreises Bruchvorgänge. Deutscher Verband für Materialprüfung, Berlin 1987, S. 357 – 370.

[30] Richard, H. A.: Safety estimation for construction units with cracks under complex loading. Int. J. of Materials and Product Technology. 3 (1988) S. 326 – 338.

[31] ASTM E 647: Standard Test Method for constant-load-amplitude fatigue crack growth rates above 10^{-8} m/cycle. Standard of the American Society for Testing and Materials.

[32] Richard, H. A.: Crack problems under complex loading. In: Sih, G. C., u. a.: Role of fracture mechanics in modern technology. North-Holland. Amsterdam 1987, S. 577 – 588.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr.-Ing. H. A. Richard
Universität-GH-Paderborn
Fachbereich Maschinentechnik I
Fachgebiet Technische Mechanik
Postfach 1621
D–4790 Paderborn