

Grundlegende Beziehungen für ein thermo-elastisch-plastisches Kriechmaterialmodell mit gemischter Verfestigung

Štefan Benča

1. Einleitung

Die gegenwärtige Entwicklung der numerischen Methoden und der Rechentchnik macht auch die Lösung sehr komplizierter Aufgaben der nichtlinearen Elastizitäts- und Plastizitätstheorie möglich. Als ein Beispiel solcher Möglichkeiten kann man auch die Lösung der nichtstationären thermo-elastisch-viskoplastischen Aufgabe für einen dreidimensionalen Körper anführen. Man versteht darunter eine Aufgabe, bei der der Körper mit einer nichtstationären thermomechanischen Belastung beansprucht ist, wobei die Möglichkeit besteht, in hochbeanspruchten Teilen des Körpers die Fließgrenze zu überschreiten. Darüber hinaus ist es möglich, die Verfestigung des plastisch deformierten Materials und die Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften zu berücksichtigen. Bei höheren Temperaturen kann auch das Kriechen des Materials erfaßt werden. Die Grundlage für die algorithmische und programmtechnische Bearbeitung der Aufgabe bilden die konstitutiven (physikalischen) Beziehungen, die die Abhängigkeit der Spannungs- und Verzerrungskomponenten in einem allgemeinen Punkt des Körpers bestimmen. Es bestehen verschiedene Aspekte, die die Auswahl bzw. den Zugang zur Bildung dieser Beziehungen beeinflussen (z. B. [1] bis [5]). In diesem Beitrag wird die klassische Theorie des plastischen Fließens benutzt, die für die nichtisotherme Belastung ausgedehnt wurde. Es werden kleine Verschiebungen und Verzerrungen und langsame Änderung der Belastung angenommen.

Für die temperaturabhängige Aufgabe und isotrope bzw. kinematische Verfestigung kann man gültige konstitutive Gleichungen in [6] finden. Im vorliegenden Beitrag werden diese Beziehungen für ein temperaturabhängiges Materialmodell mit gemischter (kombinierter) kinematisch-isotroper Verfestigung abgeleitet.

2. Konstitutive Gleichungen

Die isotherme Formulierung des elastisch-plastischen Modells mit gemischter Verfestigung und mit der von v. Mises-Fließbedingung ist gut bekannt und häufig benutzt (z. B. [7], [8]). Die Grundgleichungen dieses Modells in der Vektorform lauten:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^E &= \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}^P, \\ \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{s} - (1 - R)\boldsymbol{\alpha} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= H\lambda \boldsymbol{\xi} / \sigma_y, \\ f &= \sigma(\boldsymbol{\xi}) - \sigma_y(R\epsilon_p) = 0, \\ \dot{\mathbf{e}}^P &= \lambda \partial f / \partial \mathbf{s} = \lambda \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1)$$

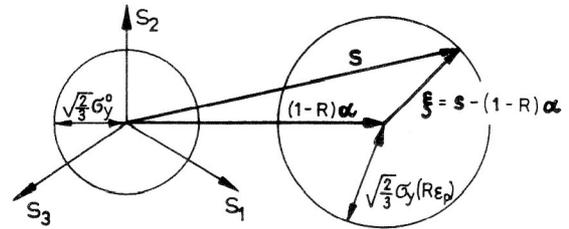


Bild 1
Darstellung der Vektoren α und ξ

wobei der Punkt die Zeitdifferentiation ausdrückt. In (1) sind \mathbf{e} , \mathbf{e}^P , \mathbf{e}^E die Deviatoren der gesamten, plastischen und elastischen Verzerrung und weiter ist:

- \mathbf{s} – Spannungsdeviator,
- $\boldsymbol{\alpha}$ – Koordinaten der Mitte der Fließfläche (Bild 1),
- $\boldsymbol{\xi}$ – reduzierter Spannungsdeviator,
- f – Funktion der Fließfläche,
- σ_y – Fließgrenze,
- σ, ϵ_p – äquivalente Spannung, äquivalente plastische Verzerrung,
- R – Koeffizient der gemischten Verfestigung, $-1 < R \leq 1$,
- H – Plastizitätsmodul,
- λ – skalare Funktion im Fließgesetz.

Zu diesen Gleichungen muß man noch elastische konstitutive Gleichung

$$\dot{\mathbf{s}} = 2G\dot{\mathbf{e}}^E \quad (2)$$

mit dem Schubmodul G zufügen. Die äquivalente Spannung wird nach v. Mises in der Form

$$\sigma = (3/2 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi})^{1/2} \quad (3)$$

genommen.

Bei der Temperaturbelastung sind in den Gleichungen (1) und (2) nur zwei formale Änderungen nötig. Die Gleichung (1), mit der Temperatur- und Kriechverzerrung lautet jetzt

$$\dot{\mathbf{e}}^E = \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}^P - \dot{\mathbf{e}}^0 - \dot{\mathbf{e}}^K \quad (4)$$

und die Gleichung (2) ändert sich in

$$\dot{\mathbf{s}} = 2G\dot{\mathbf{e}}^E + 2\dot{G}\mathbf{e}^E = 2G\dot{\mathbf{e}}^E + \dot{G}\mathbf{s}/G. \quad (5)$$

In diesem Fall werden also alle Materialkonstanten temperaturabhängig, und weil die Temperatur sich mit der Zeit ändert, gilt für beliebige Materialcharakteristik K

$$\dot{K} = \frac{\partial K}{\partial T} \dot{T}. \quad (6)$$

Die Differentiation von f nach den Komponenten des Spannungsdeviators liefert

$$\mathbf{n} = [f/\mathbf{s}] = 3\xi/(2\sigma_y). \quad (7)$$

Die unbekannte skalare Funktion $\dot{\lambda}$ läßt sich aus der Definition der äquivalenten Größen

$$\xi^T \dot{\mathbf{e}}^P = \sigma \dot{\epsilon}_p \quad (8)$$

bestimmen. Aus den Gleichungen (1)₅, (7), (1)₄ und (8) folgt

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon}_p \quad (9)$$

und nach (4) und (1)₅ verändert sich (5) zu

$$\dot{\mathbf{s}} = 2G(\dot{\mathbf{e}} - \dot{\epsilon}_p \mathbf{n} - \dot{\mathbf{e}}^0 - \dot{\mathbf{e}}^K) + \dot{G} \mathbf{s}/G \quad (10)$$

Diese konstitutive Beziehung kann man erst nach der Bestimmung der unbekanntenen Funktion $\dot{\epsilon}_p$ ausnutzen. Ihre Größe muß so sein, daß der Spannungspunkt bei der thermoplastischen Belastung stets auf der Fließfläche bleibt. Für die Variablen, die die Fließfunktion enthalten, gilt dann

$$[\partial f/\partial \mathbf{s}]^T \dot{\mathbf{s}} + [\partial f/\partial \alpha]^T \dot{\alpha} + \dot{\epsilon}_p \partial f/\partial \epsilon_p + \dot{T} \partial f/\partial T = 0 \quad (11)$$

In unserem Fall ist

$$\begin{aligned} \partial f/\partial \alpha &= -(1-R) \partial f/\partial \mathbf{s}, \\ \partial f/\partial \epsilon_p &= -R \partial \sigma_y/\partial \epsilon_p = -RH, \\ \partial f/\partial T &= -\partial \sigma_y/\partial T \end{aligned}$$

und die Beziehung (11) ergibt sich zu

$$\mathbf{n}^T [\dot{\mathbf{s}} - (1-R) \dot{\alpha}] - RH \dot{\epsilon}_p - \dot{T} \partial \sigma_y/\partial T = 0. \quad (12)$$

Die Gleichung für die Berechnung $\dot{\epsilon}_p$ erhält man jetzt dadurch, daß man beide Seiten der Gleichung (10) auf der linken Seite mit \mathbf{n}^T multipliziert, und dann liefert der Vergleich der Produkte $\mathbf{n}^T \dot{\mathbf{s}}$, ausgedrückt aus (10) und (12),

$$2G \mathbf{n}^T (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\epsilon}_p \mathbf{n} - \dot{\mathbf{e}}^0 - \dot{\mathbf{e}}^K) + \dot{G} \mathbf{n}^T \mathbf{s}/G = (1-R) \mathbf{n}^T \dot{\alpha} + RH \dot{\epsilon}_p + \dot{T} \partial \sigma_y/\partial T. \quad (13)$$

Nach dem Einsetzen α (1)₃ und \mathbf{n} (7) in die Gleichung (13) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= [3G \xi^T (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}^0 - \dot{\mathbf{e}}^K)/\sigma_y + \\ &+ 3\dot{G}(\xi^T \mathbf{s})/(2G\sigma_y) - \dot{T} \partial \sigma_y/\partial T]/(3G+H) \end{aligned} \quad (14)$$

und mit diesem Ergebnis nimmt die konstitutive Gleichung (10) die Endform an:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= D^{EP} (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}^0 - \dot{\mathbf{e}}^K) + \\ &+ \frac{3G}{(3G+H)\sigma_y} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial T} \dot{T} - \frac{3}{2\sigma_y} \frac{\dot{G}}{G} \xi^T \mathbf{s} \right) \xi \\ &+ \dot{G} \mathbf{s}/G \end{aligned} \quad (15)$$

mit

$$D^{EP} = 2G \mathbf{1} - \frac{9G^2}{(3G+H)\sigma_y^2} \xi \xi^T. \quad (16)$$

Für die Spannungsgeschwindigkeit $\dot{\sigma}$ gilt

$$\dot{\sigma} = \dot{\mathbf{s}} + \sigma_m [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \quad (17)$$

mit

$$\dot{\sigma}_m = 2G(1+\nu)(\dot{\epsilon}_m - \dot{\epsilon}_m^0 - \dot{\epsilon}_m^K)/(1-2\nu) \quad (18)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_m &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3, \\ \epsilon_m &= (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)/3 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

wobei ν die Querkontraktionszahl ist.

Bei einer rein elastischen Belastung des Punktes (x, y, z) muß man die konstitutiven Gleichungen (15) zu der Form (5) reduzieren. Um den Zustand des Punktes zu bewerten, sind die Bedingungen der plastischen Belastung erforderlich, d. h. die Bedingungen, bei denen der Punkt aus einem elastischen oder neutralen in einen elastisch-plastischen Zustand übergeht. Falls sich der Spannungspunkt auf der Fließfläche befindet, gelten die Gleichungen (1)₄ und (12). Wird jetzt ein Zeitschritt dt gemacht, verändert sich die Spannung und (oder) die Temperatur des Punktes, und der Spannungspunkt verändert seine Lage gegenüber der Fließfläche. Falls er in das Innere der Fläche kommt, spricht man von der elastischen Entlastung, bei der Bewegung auf der Fließfläche von der neutralen Belastung. In den beiden Fällen ist $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\epsilon}_p = 0$, und nach (12) gilt

$$\mathbf{n}^T \dot{\mathbf{s}} - \dot{T} \partial \sigma_y/\partial T = 0. \quad (19)$$

Dann muß für die elastisch-plastische Belastung dieser Wert negativ sein. Die Ausnutzung der Gleichung (7) und (10) in (19) gibt die Bedingung der plastischen Belastung in der Form

$$\dot{\epsilon}_p > 0. \quad (20)$$

3. Materialidentifikation

Für die Bestimmung der elastisch-plastischen Materialeigenschaften sind die Daten aus einer Serie des einachsigen isothermen Testens des Materials erforderlich. Bei der einachsigen Zugbelastung gilt für den Zuwachs der plastischen Verzerrung (Bild 2)

$$d\epsilon_x^P = d\epsilon_x - d\epsilon_x^E = \left(\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_x = \frac{d\sigma_x}{H} \quad (21)$$

mit

$$E_T = \frac{d\sigma_x}{d\epsilon_x}$$

und

$$H = \frac{E E_T}{E - E_T}. \quad (22)$$

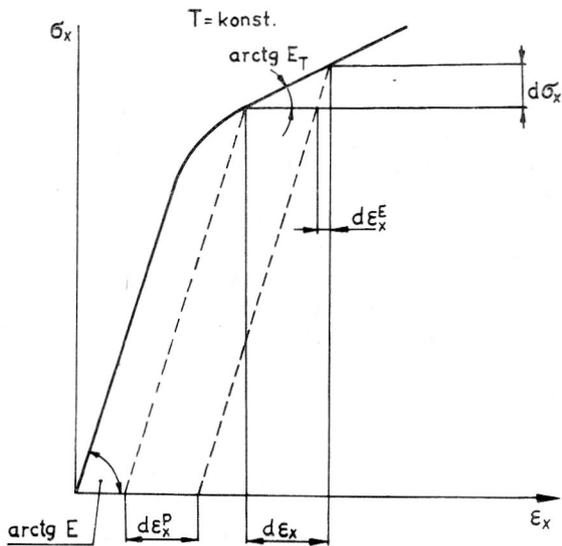


Bild 2
Einachsige isotherme Zugkurve des Materials

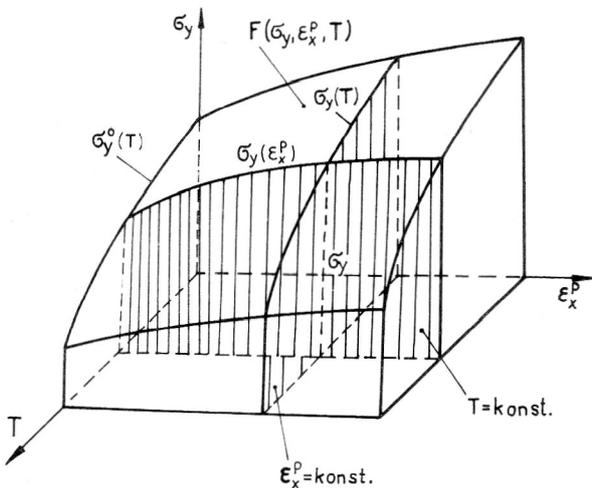


Bild 3
Die Fläche der nichtisothermen einachsigen plastischen Belastung

Aus der Serie solcher Messungen bei verschiedener Temperatur, nach der Umrechnung der Ergebnisse auf die $\sigma_x - \epsilon_x^p$ Abhängigkeit, kann man die Fläche der nichtisothermen einachsigen plastischen Belastung des Materials

$$F(\sigma_y, \epsilon_x^p, T) = 0 \quad (23)$$

bilden (Bild 3). Wenn man die Spannungsordinate dieser Fläche die aktuelle Fließgrenze nennt, läßt sich die Gleichung (23) in der Gestalt

$\sigma_x = \sigma_y(\epsilon_x^p, T)$ schreiben. Die partiellen Ableitungen $\partial \sigma_y / \partial \epsilon_x^p$ und $\partial \sigma_y / \partial T$ sind dann als gewöhnliche Ableitungen entlang der ebenen Kurven $T = \text{konst.}$ und $\epsilon_x^p = \text{konst.}$ zu bestimmen. Entsprechend der Gleichung (21) lautet der Plastizitätsmodul

$$H = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon_x^p} \quad (24)$$

Oft wird eine lineare Approximation der Kurven $\sigma_y(\epsilon_x^p)$ gemacht. In diesem Fall gilt

$$\sigma_y = H \epsilon_x^p + \sigma_y^0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial T} = \epsilon_x^p \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial \sigma_y^0}{\partial T} \quad (26)$$

wobei σ_y^0 die Anfangsfließgrenze ist. Die Verallgemeinerung der Beziehung (26) liefert die erforderliche Ableitung für die konstitutiven Gleichungen (15) in der Form

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial T} = R \epsilon_p \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial \sigma_y^0}{\partial T} \quad (27)$$

mit

$$\epsilon_p = \int_0^t \dot{\epsilon}_p dt \quad (28)$$

Bei der monotonen radialen Belastung geben alle Varianten der Verfestigung, die das Modell enthält, d. h. isotrope, kinematische und gemischte Verfestigung mit dem Koeffizient R, die gleichen Ergebnisse. Falls man das Modell für die reverse oder zyklische Belastung anwenden will (nur dann hat seine numerische Realisierung gegenüber dem einfacheren Modell mit der isotropen Verfestigung einen Sinn), muß man den Koeffizient R, der den Bauschinger Effekt simulieren kann, aus der zyklischen Zug-Druck-Kurve bestimmen [9].

Die Temperaturverzerrungen lassen sich durch die Beziehung

$$\dot{\epsilon}^0 = \alpha(T) \dot{T} [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \quad (29)$$

leicht beschreiben, aber die Geschwindigkeit der Kriechverzerrungen muß man aus einem geeigneten Modell des multiaxialen Kriechens ermitteln. Ein einfach anwendbares Modell bekommt man unter der Voraussetzung, daß das Kriechen des Materials mit der Beziehung

$$\dot{\epsilon}^K = \frac{3}{2} \frac{s}{\sigma} \dot{\epsilon}_K(\sigma, \epsilon_K, T) \quad (30)$$

gesteuert wird. Die Geschwindigkeit der äquivalenten einachsigen Kriechverzerrung ist eine Funktion der äquivalenten Spannung σ , der äquivalenten Kriech-Verzerrung ϵ_K und der Temperatur T. Für die Berechnung von ϵ_K nutzt man oft die Gleichungen, die durch Verallgemeinerung der approximativen Beziehungen des einachsigen Kriechens entstehen. Falls solche Beziehung in der Form

$$\epsilon_x^K = a \sigma_x^b t^c \quad (31)$$

genommen wird, wobei die Konstanten a, b, c, wenn nötig, auch temperaturabhängig sein könnten, dann gilt bei konstanter Spannung

$$\dot{\varepsilon}_x^K = a c \sigma_x^b t^{c-1}. \quad (32)$$

Da die Zeit kein gutes Maß für die Geschwindigkeit der Kriech-Verzerrung ist, (die Zeit läuft auch, wenn die Spannung gleich Null ist) wird für diesen Zweck ε_K genutzt. Unter Berücksichtigung von (31) erhält man die Endbeziehung

$$\dot{\varepsilon}_K = c a^{1/c} \sigma^{b/c} (\varepsilon_K)^{(c-1)/c}. \quad (33)$$

In dieser Beziehung kann man die ε_K mit einem modifizierten Wert ε_H nach der Orni-Theorie (z. B. [10]) ersetzen und so die Gleichung (30) auch für reverse oder zyklische Belastung vorbereiten.

4. Zusammenfassung

In dem Beitrag wurden grundlegende Beziehungen für ein thermo-elastisch-plastisches Kriechmaterialmodell in expliziter Form abgeleitet. Das Modell bilden die konstitutiven Gleichungen (15) bzw. (17), die Beziehungen (1)₃ und (14), die man für die Berechnung der Zuwächse $d\alpha$ und $d\varepsilon_p$ braucht, und die Bedingungen der thermo-elastisch-plastischen Belastung (20) und (1)₄. Für die Integration der konstitutiven Gleichungen ist die Methode „tangentialer Vorhersage – radiale Rückkehr“ geeignet, offensichtlich wäre dabei auch die Ausnutzung der konsistenten Module möglich [11]. Die praktische Verwendung des Modells in einem FEM-Programm und erste numerische Berechnungen wurden im Beitrag [12] dargestellt.

LITERATUR

- [1] Inoue Tatsuo: Inelastic constitutive models under plasticity-creep interaction condition. Theories and evaluations. JSME Int. J., Ser. 1, 31, 1988, S. 653 – 663.
- [2] Becker, M.: Status of the development of constitutive equations for the evaluation of the visco-plastic material behaviour at elevated temperatures. Nucl. Engng. Design 72, 1982, S. 27 – 34.
- [3] Riff, R., Carlson, R. L., Simitses, G. J.: The thermodynamically consistent constitutive equations for nonisothermal strain, elasto-plastic creep behavior. AIAA J. 25, 1987, S. 114 – 122.
- [4] Miller, A. K. (Editor): Unified constitutive equations for creep and plasticity. Elsevier, London, 1987.
- [5] Гохфельд, Д. А., Садаков, О. Ц.: Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. Машиностроение, Москва, 1984.
- [6] Snyder, M. D., Bathe, K. J.: A solution procedure for thermo-elastic-plastic and creep problems. Nucl. Engng. Design 64, 1981, S. 49 – 80.
- [7] Axelsson, K., Samuelsson, A.: Finite element analysis of elasto-plastic materials displaying mixed hardening. Int. J. Numer. Meth. Engng. 14, 1979, S. 211 – 225.
- [8] Torkamani, M. A. M., Alsanusi, S. K.: Elasto-plastic analysis of a plane stress problem using linearized yield surface and mixed hardening rule. Comp. and Struct. 31, 1989, S. 935 – 956.
- [9] Axelsson, K.: On constitutive modelling in metal plasticity. Chalmers University of Technology, Publ. 79:2, Göteborg, 1979.
- [10] Snyder, M. D., Bathe, K. J.: Finite element Analysis of thermo-elastic-plastic and creep response. MIT, Cambridge, Report 82448-10, 1980.
- [11] Simo, J. C., Taylor, R. L.: Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 18, 1985, S. 101 – 118.
- [12] Běňa, Š.: Lösung thermo-elastisch-plastischer Aufgaben mit der FEM. Technische Mechanik 10, 1989, S. 26 – 30.

Anschrift des Verfassers:
 Doz. Ing. Štefan Běňa, CSc.
 Strojnícka fak. SVŠT
 Gottwaldovo nám. 17
 812 31 Bratislava/ČSSR