

# Festigkeitsberechnungen unter Berücksichtigung elastisch-plastischen Materialverhaltens im Fachsystem COSAR/N

H. Köppe, W. Lenz

## 1. Einleitung

Seit einigen Jahren werden Anstrengungen unternommen, innerhalb des Programmsystems COSAR ein Fachsystem COSAR/N (nichtlinear) zu entwickeln. Mit diesem Teilsystem sollen Möglichkeiten geschaffen werden, Festigkeitsberechnungen und dynamische Untersuchungen unter Einbeziehung von nichtlinearen Effekten vornehmen zu können [1]. Der konzipierte Leistungsumfang von COSAR/N soll Algorithmen zur Lösung physikalisch und/oder geometrisch nichtlinearer Probleme enthalten. Die zu diesem Zweck erarbeitete Gesamtkonzeption beruht auf folgenden wesentlichen Grundanforderungen an das Fachsystem:

- integrierter Baustein im Gesamtsystem COSAR
- effektive Lösungsstrategie für unterschiedliche Problemklassen
- effektive Lösungsalgorithmen und hohe Nutzerfreundlichkeit
- Möglichkeit der einheitlichen Erfassung einer Vielzahl von Materialgesetzen
- Verfügbarkeit der wesentlichen Elementtypen von COSAR für nichtlineare Berechnungen
- vorrangige Anwendung bei maschinenbautechnischen Problemen
- bewußte Einbeziehung der in COSAR möglichen Substrukturtechnik in die Lösungsstrategie

In der schrittweisen Umsetzung der Gesamtkonzeption liegt derzeit der Schwerpunkt in der Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens bei kleinen Formänderungen. Als spezifische Materialgesetze sind nichtlinear-elastische, elastisch-plastische und viskoplastische Gesetze vorgesehen. Das Bild 1 zeigt die zum jetzigen Zeitpunkt in COSAR/N in der Realisierung befindlichen Teilzweige.

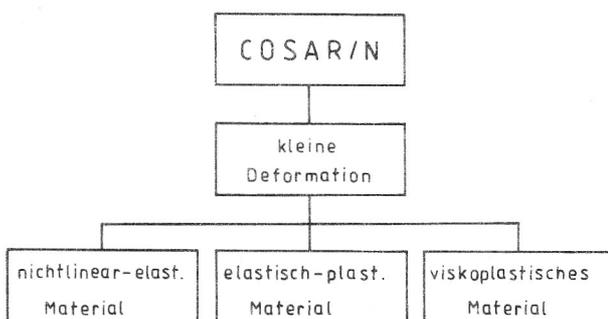


Bild 1  
Umfang von COSAR/N

Am weitesten vorangeschritten sind die Entwicklungsarbeiten am Teilsystem für elastisch-plastisches Materialverhalten. Hierfür existiert eine Arbeitsversion, mit der vorerst ebene, axialsymmetrische und räumliche Problemstellungen mit den entsprechenden Elementen des COSAR-Elementkataloges gelöst werden können.

## 2. Elastisch-plastisches Materialverhalten in COSAR/N

Die Beschreibung der elastisch-plastischen Zusammenhänge kann prinzipiell mit der Deformations- oder der Fließtheorie erfolgen. Beide setzen voraus, daß sich die Gesamtdehnungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufspalten lassen. Aufgrund ihrer größeren Allgemeingültigkeit wird der Fließtheorie der Vorzug bei der Modellierung des elastisch-plastischen Materialverhaltens gegeben. Des weiteren wird ein assoziiertes Fließgesetz aus Gründen des numerischen Aufwandes (symmetrische Systemmatrizen) vorausgesetzt. Als Fließbedingung wird eine Form vom Typ „elliptischer Zylinder“ gewählt, die im Fall des ideal elastisch-plastischen Materials der Fließbedingung nach Huber/von Mises entspricht. Mit dem Deformationsgesetz für den Fließ- und Verfestigungsbereich nach Prandtl und Reuss lauten die Grundgleichungen für die Elastoplastizität:

1.  $\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^E + \underline{\dot{\epsilon}}^P$
2.  $f(\underline{\sigma}, \underline{h}, T) = 0$
3.  $\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} \geq 0$
4.  $\underline{\dot{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$
5.  $\underline{\dot{h}} = \underline{q} \dot{\lambda}$

In den Beziehungen bedeuten  $f(\underline{\sigma}, \underline{h}, T)$  die Fließbedingung und -funktion,  $\lambda$  einen nichtnegativen skalaren Faktor, der die Größe der plastischen Deformation bestimmt. Im Vektor  $\underline{h}$  sind die materialinternen Parameter enthalten. Entsprechend der Standardformulierung nach Bergander [2]

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{C} \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{d}_T \dot{T}$$

$$\underline{\dot{h}} = \underline{B} \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{e}_T \dot{T}$$

lassen sich die Vektoren und Matrizen der Standardformulierung somit in der Form

$$\underline{C} = \underline{E} - \frac{\underline{E} \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T \underline{E}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\Psi}^T \underline{q}}$$

$$\underline{B} = \frac{\underline{q} \underline{\varphi}^T \underline{E}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\Psi}^T \underline{q}}$$

$$\underline{d}_T = \frac{\underline{E} \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\alpha}_{th} - \underline{E} \underline{\varphi} \frac{\partial f}{\partial T}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\Psi}^T \underline{q}} - \underline{E} \underline{\alpha}_{th}$$

$$\underline{e}_T = \frac{\underline{q} \frac{\partial f}{\partial T} - \underline{q} \underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\alpha}_{th}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\Psi}^T \underline{q}}$$

$$\underline{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$\underline{\Psi} = \frac{\partial f}{\partial \underline{h}}$$

herleiten.

### 3. Lösungsstrategie

#### 3.1. Iterationsverfahren

Eine entsprechende FEM-Diskretisierung führt auf das folgende Differentialgleichungssystem

$$(\underline{K}_0 - \underline{K}_P) \dot{\underline{v}} = \underline{\dot{f}} - \underline{\dot{f}}_T$$

mit

$$\underline{K}_0 = \int_V \underline{D}_G^T \underline{E} \underline{D}_G dV$$

$$\underline{K}_P = \int_V \underline{D}_G^T \frac{\underline{E} \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} \underline{E}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\Psi}^T \underline{q}} \underline{D}_G dV$$

$\underline{\dot{f}}$  - äußerer Kraftvektor

$\underline{\dot{f}}_T$  - enthält temperaturabhängige Kraftanteile

Die Lösung kann durch direkte Zeitintegration oder stückweise Linearisierung erfolgen. Für skleronome Vorgänge haben sich international inkrementell-iterative Lösungsverfahren durchgesetzt. Dazu wird der gesamte Belastungsprozeß in eine endliche Zahl von Last- oder Zeitschritten zerlegt und in jedem dieser Schritte ist das Gleichungssystem

$$(\underline{K}_0 - \underline{K}_P) \Delta \underline{v} = \Delta \underline{f} - \Delta \underline{f}_T$$

für den inkrementellen Verschiebungszuwachs zu lösen. Der dabei entstehende Linearisierungsfehler innerhalb eines Inkrementes wird durch einen zusätzlichen Iterationsprozeß bis zu einer vorgegebenen Toleranz beseitigt. Dazu wird hauptsächlich das Newton-Raphson-Verfahren in verschiedenen Modifikationen eingesetzt. Bildet man in jedem Schritt aus der Differenz  $(\underline{K}_0 - \underline{K}_P)$  die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_T$ , so führt dies auf das Standard-Newton-Raphson-Verfahren. Dabei steigt der numerische Lö-

sungsaufwand durch den ständigen Neuaufbau und die darauf folgende Zerlegung von  $\underline{K}$  erheblich an. Im Fall des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens wird mit einer konstanten elastischen Steifigkeitsmatrix gearbeitet. Das Produkt  $\underline{K}_P \cdot \Delta \underline{v}$  wird zu einem internen Kraftvektor  $\Delta \underline{f}_{IN}$  zusammengefaßt und auf der rechten Seite des Gleichungssystems berücksichtigt. Der geringere numerische Aufwand zieht aber eine verringerte Konvergenzgeschwindigkeit nach sich. Diese kann jedoch durch den Einsatz von entsprechenden Beschleunigungsalgorithmen (z. B.  $\alpha$ -Beschleunigung nach Aitken) erhöht werden. Seit einiger Zeit rückt die BFGS-Methode als Quasi-Newton-Verfahren immer mehr in den Mittelpunkt des Interesses. Ihr wesentlicher Vorteil besteht darin, daß nach einmaligem Aufbau und einmaliger Invertierung der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_0$  zur Gleichungssystemlösung (direkte Verfahren) in jedem nachfolgenden Iterationsschritt sofort die invertierte Matrix erstellt werden kann [3].

Durch entsprechende Steuerparameter in der Eingabevorschrift kann eines der obigen Iterationsverfahren aktiviert werden.

#### 3.2. Gleichungssystemlösung

Zur Gleichungssystemlösung wird in COSAR/N auf das im Fachsystem COSAR verwendete Block-Cholesky-Verfahren mit anschließendem Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen zurückgegriffen.

#### 3.3. Substrukturtechnik

Eine effektive Berechnungsstrategie setzt eine Programmkonzeption voraus, die die Vorteile der Substrukturtechnik ausnutzt. Im ursprünglichen Sinne wird die Substrukturtechnik genutzt, um den Generierungsaufwand für geometrisch komplizierte Bauteile zu senken. Die Unterteilung komplexer geometrischer Gebilde in geometrisch einfach zu beschreibende Strukturen läßt den Bereitstellungsaufwand und die Fehleranfälligkeit auf ein Minimum sinken. Weiterhin erlaubt eine Substrukturierung eine schrittweise Abarbeitung in mehreren Rechnerläufen, und unter Umständen ist ein Austausch einzelner Strukturen möglich. Gleichartige Strukturen müssen nur einmal aufgebaut werden [4].

Sind Probleme zu lösen, bei denen die Nichtlinearität örtlich begrenzt bleibt, kann die Substrukturtechnik wesentlich zur Verminderung des Berechnungsaufwandes beitragen. Die bewußte Einteilung in Substrukturen unter dem Gesichtspunkt „lineare“ und „nichtlineare“ Strukturen ist Voraussetzung für eine effektive Abarbeitung. Der hohe Aufwand bei nichtlinearen Berechnungen entsteht durch den notwendigen Iterationsprozeß. Entsprechend der oben erwähnten Substrukturierung müssen nur die „nichtlinearen“ Strukturen und die Hyperstruktur während der Iteration bearbeitet werden. Die Zustandsgrößen der anderen Strukturen werden erst nach Abarbeitung aller Zeit- oder Lastschritte durch Rückrechnung ermittelt. Diese Vorgehensweise besitzt immer dann Vorteile, wenn wenigstens eine Struktur lineares Verhalten zeigt.

### 3.4. Ablaufschema

Für COSAR/N läßt sich der Programmablauf für die Berechnung von Bauteilen mit elastisch-plastischem Materialverhalten durch folgendes Schema darstellen.

#### 1. Preprozessor

#### 2. Elastische Anlaufrechnung $\underline{v} = \underline{K}_o^{-1} \underline{f}$

Ermittlung der Spannungen  $\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{D}_G \underline{v}$

#### 3. Reduktion der Verschiebungen und des Kraftvektors, so daß gilt:

$$\sigma_{V_{\max}}^E = \sigma_{F_0}$$

$$\underline{\bar{v}} = \underline{v} \cdot \text{SKAL}; \quad \underline{\bar{\sigma}}_0 = \underline{\sigma} \cdot \text{SKAL}; \quad \underline{\bar{f}} = \underline{f} \cdot \text{SKAL};$$

$$\text{SKAL} = \frac{\sigma_{F_0}^E}{\sigma_{V_{\max}}^E}$$

#### 4. Bilden des Lastschrittkraftvektors

$$\Delta \underline{f}_L = (\underline{f} - \underline{\bar{f}}) / \text{NLAST}$$

#### 5. Beginn der Lastschrittschleife:

$$\text{ILAST} < \text{NLAST}, \text{ sonst } 13.$$

#### 6. Lösung des Gleichungssystems $\Delta \underline{v}_i = \underline{K}^{-1} \Delta \underline{f}_L$

#### 7. Berechnung des Spannungszuwachses

$$\Delta \underline{\sigma}_i = \underline{E} \underline{D}_G (\Delta \underline{v}_i - \Delta \underline{v}_i^P)$$

#### 8. Ermittlung des Gesamtverschiebungszustandes

$$\underline{v}_{i+1} = \underline{v}_i + \Delta \underline{v}_i$$

Ermittlung des Gesamtspannungszustandes

$$\underline{\sigma}_{i+1} = \underline{\sigma}_i + \Delta \underline{\sigma}_i$$

#### 9. Verändern der internen Parameter $h$

#### 10. Bilden des inkrementellen internen Kraftvektors

$$\Delta \underline{f}_L = \Delta \underline{f}_{IN} = \int_V \underline{D}_G^T \underline{C}^P \underline{D}_G dV \Delta \underline{v}_i$$

und der Steifigkeitsmatrix

$$\underline{K}_T = \underline{K}_o - \int_V \underline{D}_G^T \underline{C}^P \underline{D}_G dV$$

mit:

$$\underline{C}^P = \frac{\underline{E} \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T \underline{E}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\Psi}^T \underline{q}}$$

#### 11. Überprüfen des Konvergenzkriteriums

$$\text{TOL} \geq \frac{\|\Delta \underline{v}_i\|}{\|\underline{v}_i + \Delta \underline{v}_i\|}$$

#### 12. wenn 11. dann ILAST = ILAST + 1, dann 5., sonst 6.

#### 13. Ergebnisauswertung, Postprozessor

140

### 3.5. Abschlußbemerkungen

Die weiteren Entwicklungen am COSAR-Zweig für elastisch-plastisches Materialverhalten sind darauf gerichtet, dem Anwender in der nächsten Zeit eine nachnutzungsfähige Programmversion anzubieten. Dies bedeutet eine Vervollkommnung des Elementkataloges (entsprechend dem von COSAR) für nichtlineare Berechnungen, die Gewährleistung einer hohen Nutzerfreundlichkeit und effektive Berechnungsstrategien.

Als unmittelbar nächste Aufgabe steht die Konzeption und Entwicklung eines Teilzweiges für das viskoplastische Materialverhalten. Die dabei verwendete Lösungsstrategie ist weitgehend identisch mit der für elastoplastisches Materialverhalten, wodurch sich der Programmierungsaufwand auf ein Minimum beschränken läßt.

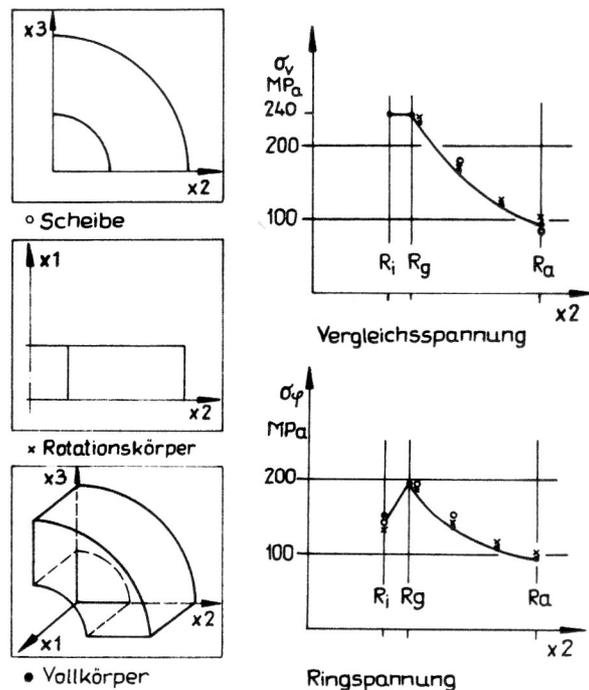
Abschließend muß eingeschätzt werden, daß trotz einer Vielzahl möglicher automatischer Mechanismen und Hilfen für eine effektive Abarbeitung die Verantwortung und das fachliche Wissen des Anwenders bei der Bearbeitung nichtlinearer Probleme wesentlich über der für lineare Problemstellungen notwendigen liegt.

## 4. Beispiele

### 4.1. Dickes Rohr

Für das dickwandige Rohr unter Innendruck wurden vergleichende Untersuchungen mit verschiedenen Berech-

Dickes Rohr unter Innendruck  
Lösung mit verschiedenen Modellen



$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$      $R_a = 200 \text{ mm}$      $p_i = 140 \text{ MPa}$   
 $\sigma_F = 240 \text{ MPa}$      $R_i = 100 \text{ mm}$     ideal elastisch-plastisch  
 $R_g = 116 \text{ mm}$

Bild 2

Vergleich der numerischen Lösung mit verschiedenen Modellannahmen für das dickwandige Rohr unter Innendruck

nungsmodellen vorgenommen und diese der aus der Literatur [7] bekannten analytischen Lösung gegenübergestellt. Die Ergebnisse sind im Bild 2 dargestellt.

#### 4.2. Stab mit Bohrung unter Zugbelastung

Dieses Beispiel ist einer Veröffentlichung von P. V. Marcal und J. P. King [5] entnommen. Für den aus Aluminium bestehenden Streifen mit einem Breiten-Durchmesser-Verhältnis von 2 : 1 wurden von Theocaris und Marketos [6] experimentelle Untersuchungen vorgenommen. Das Bild 3 zeigt die Ausbreitung der plastischen Zone für unterschiedliche Laststufen.

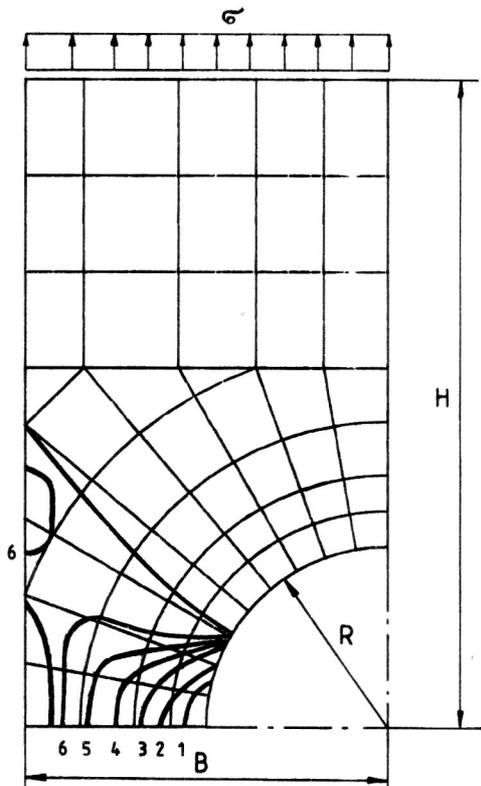
Einige Daten zur Problembeschreibung:

Rechnung mit zwei Substrukturen

- 1. Struktur: 42 Elemente  
153 Knoten
- 2. Struktur: 15 Elemente  
62 Knoten

Materialverhalten ideal elastisch-plastisch

Materialwerte:  $E = 68670,00 \text{ MPa}$   
 $\nu = 0,20$   
 $\sigma_F = 238,38 \text{ MPa}$



**Bild 3**  
Gelochter Zugstab, Ausbreitung der plastischen Zone in verschiedenen Laststufen (1/4 der Scheibe dargestellt)

Belastung:  $2\sigma_m = 116,81 \text{ MPa}$  ( $\sigma_m$  – elastische Grenzlast)

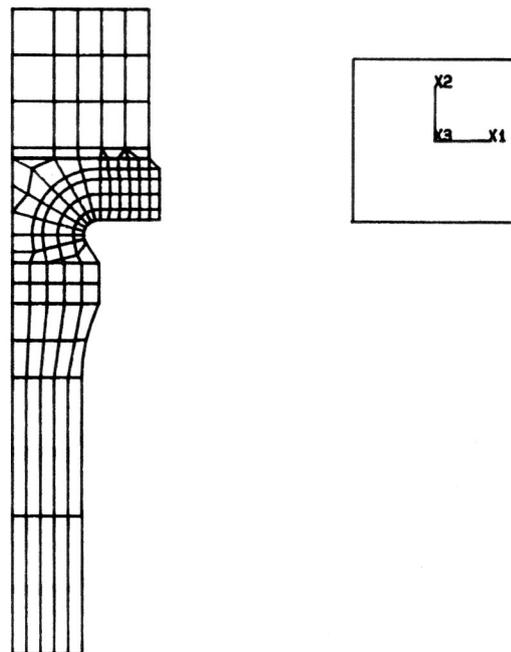
Abmessungen:  $H = 18 \text{ mm}$   
 $B = 10 \text{ mm}$   
 $R = 5 \text{ mm}$

Ergebnisse: plastische Zone für verschiedene Verhältnisse

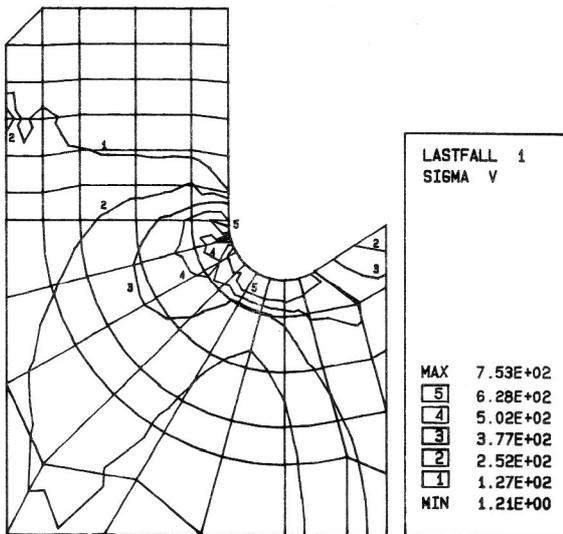
$\frac{\sigma}{2\sigma_m}$	}	= 0,5 elastische Grenzlast
		= 0,6 Linie 1
		= 0,7 Linie 2
		= 0,8 Linie 3
		= 0,9 Linie 4
		= 0,95 Linie 5
		= 1,0 Linie 6
		= 1,05 Traglast

#### 4.3. Pleuelschraube

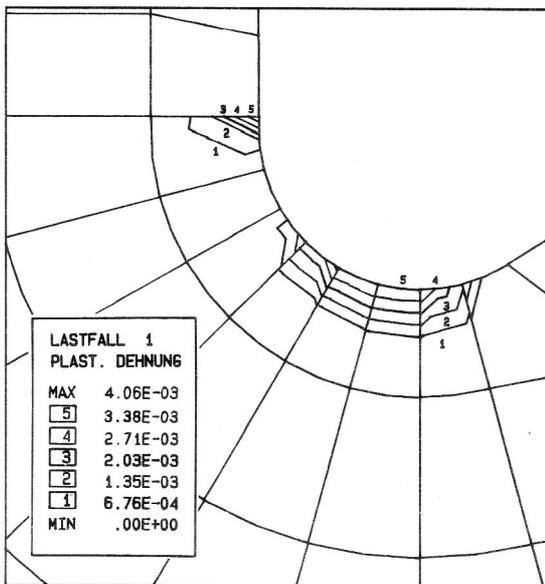
Eine Pleuelschraube (Material Stahl:  $E = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_F = 690 \text{ MPa}$ ) wurde auf ihr Festigkeitsverhalten untersucht. Dabei standen Aussagen über das Verhältnis zwischen den maximalen Spannungen im Übergangsradius (Schraubenkopf-Schaft) und den maximalen Spannungen im Schaft im Mittelpunkt. Weiterhin wurden die im Übergangsradius auftretenden plastischen Dehnungen ermittelt. Als Belastung wurde eine Vorspannkraft von  $F = 350 \text{ kN}$  angenommen. Die Geometrie, Belastung und die Lagerungsbedingungen der Schraube erlauben die Berechnung als rotationssymmetrisches Problem.



**Bild 4**  
Pleuelschraube – Darstellung der FE-Vernetzung



**Bild 5**  
Pleuelschraube – Vergleichsspannung am Kopf-Schaft-Übergang



**Bild 6**  
Pleuelschraube – Ausschnitt des Kopf-Schaft-Überganges, Darstellung der ungemittelten plastischen Vergleichsdehnungen

Dazu ist es nicht notwendig, die gesamte Schraube zu vernetzen. Im Schaft stellt sich in einiger Entfernung vom Übergangsradius R32 ein ungestörter konstanter Spannungszustand ein. Da die kritischen Beanspruchungen im Übergangsbereich Kopf-Schaft (Übergangsradius R3) zu erwarten sind, wurde die Länge des vernetzten Schaftes so gewählt, daß sich ein konstanter Spannungszustand einstellen kann. Die Lagerung der Schraube am Kopf wurde durch die Verhinderung der Verschiebung in Schraubenlängsrichtung nachgebildet. Die Belastung wurde in Form einer Flächenlast am Schaftende eingeleitet. Das FEM-Modell besteht aus 4 Substrukturen und einer Hyperstruktur mit insgesamt 129 Elementen und 474 Knoten. Die Bilder 4 bis 6 zeigen die Vernetzung der Schraube sowie ausgewählte Ergebnisse.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Köppe, H., Lenz, W., Altenbach, J.: Die Erweiterung des Programmsystems COSAR auf die Lösung nichtlinearer Probleme der Festkörpermechanik. Technische Mechanik 10 (1989) 2, S. 92 – 99.
- [ 2 ] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung des Anfangs-Randwert-Problems. ZAMM 58 (489 – 499) 1978.
- [ 3 ] Bathe, K.-J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice Hall Book Company Inc., 1982.
- [ 4 ] Nutzerhandbuch COSAR. TU Magdeburg, WB Festkörpermechanik, MDZ „Finite Elemente“.
- [ 5 ] Marcal, P. V., King, P.: Elastic-Plastic-Analysis of Two-Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method. Int. Journ. Mech. Sci., Vol. 9 (143 – 155) 1967.
- [ 6 ] Theocaris, P. S., Marketos, E.: J. Mech. Phys. Solids 12, 377 (1964).
- [ 7 ] Buchter, H.: Apparate und Anlagen der chemischen Hochdrucktechnik. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

#### Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. Heinz Köppe  
 Dr.-Ing. Wolfgang Lenz  
 TU „Otto von Guericke“  
 Sektion Maschinenbau  
 PSF 124  
 Magdeburg  
 3 0 1 0