

# Finite-Element-Modelle der Vibrationsdämpfung bei Schichtplatten

R. Rikards, A. Chate, M. Kenser

## 1. Einführung

Konstruktionen, die dynamischen Belastungen ausgesetzt sind, werden u. a. nach ihrer Fähigkeit, Vibrationsenergie abzubauen, beurteilt. Konstruktionselemente wie Balken, Platten und Schalen werden daher mit speziellen viskoelastischen, vibrationsdämpfenden Schichten projiziert. Die allgemeinen Probleme der Vibrationsdämpfung sind in ausreichender Weise in der Monografie [1] dargelegt. Eine Übersicht der klassischen Arbeiten zur Vibrationsdämpfung enthält [2], wobei auch einige jüngere Arbeiten zur Finite-Element-Modellierung der Dämpfung bei Schichtkonstruktionen enthalten sind.

Zwei Modellierungsniveaus sind zu unterscheiden: Modellierung einfacher Konstruktionselemente (Balken, Platten, Schalen) und Modellierung realer Konstruktionen. Im letzteren Fall treten neben Verlusten im Werkstoff der dämpfenden, viskoelastischen Schichten auch konstruktive Verluste in den Verbindungselementen, Lagern usw. auf. Diese konstruktiven Verluste lassen sich nur schwer genau auf der Basis einer mathematischen Modellierung berechnen, daher wird in der Methode der Finiten Elemente bei der Berechnung realer Konstruktionen die proportionale Rayleighsche Dämpfung verwendet. Für diesen Fall ist die Dämpfungsmatrix  $C$  der Massenmatrix  $M$  und der Steifigkeitsmatrix  $K$  der Konstruktion proportional:

$$C = \alpha(\omega) M + \beta(\omega) K \quad (1)$$

$\alpha, \beta$  – experimentell zu ermittelnde Koeffizienten, die von der Frequenz abhängen können.

Die Dämpfungsmatrix  $C$  wird in der Finite-Element-Bewegungsgleichung für die Konstruktion verwendet

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = F(t) \quad (2)$$

$q, F(t)$  – Vektor der Knotenverschiebungen und -kräfte.

Das erste Modellierungsniveau für einfache Konstruktionselemente geht von genaueren mathematischen Modellen aus. Es dient zur Ermittlung der optimalen Schichtanordnung sowie der Auswahl optimaler Parameter für die dämpfenden Schichten. Bei der Untersuchung harmonischer Vibrationen ist es besonders günstig, den komplexen Elastizitätsmodul  $E^*$  und den komplexen Schubmodul  $G^*$  zu verwenden. Beispielsweise gilt für isotropes Material mit elastischer Volumendeformation

$$E^* = E(1 + \eta_E i) \quad (3)$$

$$G^* = G(1 + \eta_G i)$$

$E, G$  – Elastizitäts- und Schubmodul,  $\eta$  – Verlustkoeffizient.

Der frequenzabhängige Verlustkoeffizient  $\eta_E = \eta_E(\omega)$  kann experimentell bestimmt werden. Er hängt mit den Kernen der integralen Viskoelastizitätsbeziehungen zusammen [3]. Für anisotrope Materialien ist der Verlustkoeffizient eine tensorielle Größe.

Im Falle der komplexen Darstellung der Steifigkeit des Materials (3) ergibt sich eine komplexe Bewegungsgleichung für die Konstruktion

$$M \ddot{q} + K^* \dot{q} = F(t) \quad (4)$$

$K^*$  – komplexe Steifigkeitsmatrix der Konstruktion.

Dabei gilt

$$K^* = K + iK^I \quad (5)$$

$K$  – Realanteil der Steifigkeitsmatrix der Konstruktion, der unter Verwendung der elastischen Kennwerte  $E, G$  bestimmt wird,

$K^I$  – Imaginäranteil der Steifigkeitsmatrix, der unter Verwendung der imaginären Anteile der komplexen Kennwerte  $E^I = \eta_E E, G^I = \eta_G G$  ermittelt wird.

Bei freien Schwingungen  $F(t) = 0$  läßt sich die Lösung der Gl. (4) in folgender Form angeben

$$q = q_0 e^{\omega_* t} \quad (6)$$

Damit erhält man ein verallgemeinertes Eigenwertproblem mit einer Hermiteschen Bandmatrix  $K^*$  und einer symmetrischen Bandmatrix  $M$

$$K^* q_0 - \omega_*^2 M q_0 = 0 \quad (7)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt ein Spektrum komplexer Frequenzen

$$\omega_* = \omega + i\omega^I \quad (8)$$

Für jede Frequenz  $\omega_*^n$  wird ein modaler Verlustkoeffizient ermittelt

$$\eta_n = 2\omega_n^I / \omega_n \quad (9)$$

Bei geringer Dämpfung kann der Verlustkoeffizient einfacher bestimmt werden. Dabei werden die elastischen Eigenformen  $\Phi_n$  verwendet, die ohne Berücksichtigung der Dämpfung ermittelt werden. In diesem Fall wird der modale Verlustkoeffizient nach folgender Gleichung berechnet

$$\eta_n = 1/(2\pi) \Delta W/W = (\Phi_n^T K^I \Phi_n) / (\Phi_n^T K \Phi_n) \quad (10)$$

Dabei ist  $\Delta W$  – die abgebaute Energie je Schwingungszyklus und  $W$  – die elastische Schwingungsenergie der n-ten Form.

In dieser Arbeit wird unter Verwendung der komplexen Darstellung der Steifigkeitsmatrix (5) der Verlustkoeffizient der Konstruktion nach Gl. (10) ermittelt. Die elastischen Frequenzen und Schwingungsformen wurden mit der Methode der Iterationen im Unterraum [4] bestimmt.

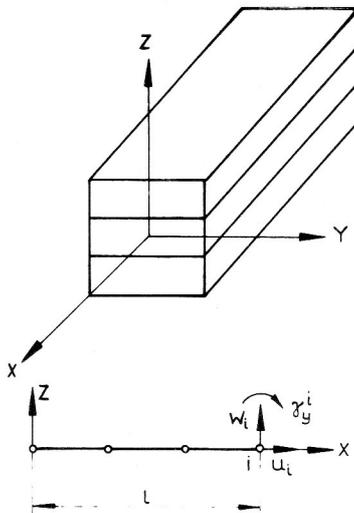
## 2. Ein Finites Element und ein Superelement für einen Sandwichbalken

Zur FEM-Analyse von Schichtbalken mit weichen Schichten werden 2 Modelle vorgeschlagen – das Timoshenko-Modell für das gesamte Schichtpaket und ein Superelement für den Schichtaufbau, bei dem jede Schicht als Timoshenko-Balken betrachtet und die Stetigkeit der Verschiebungen zwischen den Schichten verwendet wird. Im ersten Fall wird zur adäquaten Modellierung der Querschubsteifigkeit des Balkens der Koeffizient  $k$  verwendet. Seine physikalische Interpretation ist jedoch nur für elastische Schichten klar. Im viskoelastischen Fall muß man daher das Superelementmodell einsetzen.

Es wird ein Finites Element 3. Ordnung für den Timoshenko-Balken (Schichtbalken oder homogener Balken) betrachtet. Das Koordinatensystem und die verallgemeinerten Verschiebungen  $u, w, \gamma_y$  sind auf Bild 1 dargestellt. Das Funktional für die Deformationsenergie und die kinetische Energie lautet dann [5]:

$$U = 1/2 \int_0^l \left\{ \langle EA \rangle (\partial u / \partial x)^2 + 2 \langle B \rangle (\partial \gamma_y / \partial x) (\partial u / \partial x) + \langle D \rangle (\partial \gamma_y / \partial x)^2 + k \langle GA \rangle (\gamma_y + \partial w / \partial x)^2 \right\} dx \quad (11)$$

$$T = 1/2 \int_0^l \left\{ \langle \rho \rangle (u^2 + w^2) + 2 \langle \rho z \rangle u \cdot \gamma_y + \langle \rho z^2 \rangle \gamma_y^2 \right\} dx$$



**Bild 1**  
Finites Element für den Timoshenko-Balken

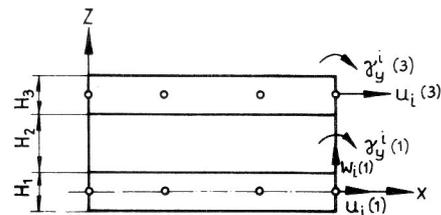
Die effektiven Steifigkeiten und Massen werden wie folgt ermittelt

$$\begin{aligned} \langle EA \rangle &= \int_A E dA, \quad \langle B \rangle = \int_A E z dA, \quad \langle D \rangle = \int_A E z^2 dA, \\ \langle \rho \rangle &= \int_A \rho dA, \quad \langle \rho z \rangle = \int_A \rho z dA, \quad \langle \rho z^2 \rangle = \int_A \rho z^2 dA \end{aligned} \quad (12)$$

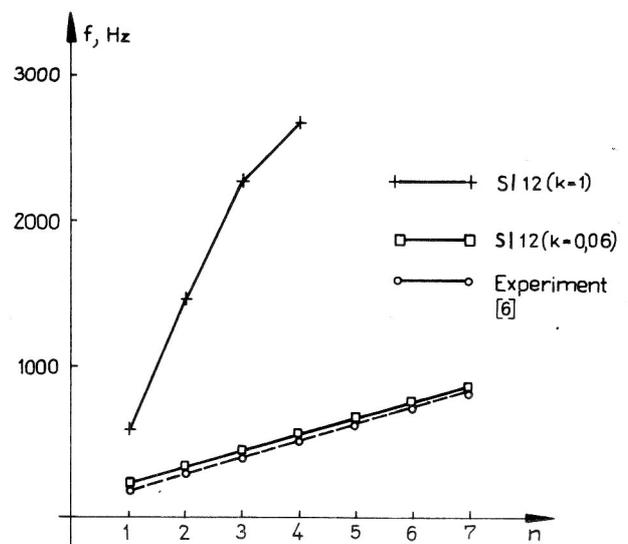
$\rho$  – Dichte des Werkstoffs.

Weiterhin wird die kubische Approximation für alle Verschiebungen  $u, w, \gamma_y$  verwendet. Damit ergeben sich Steifigkeitsmatrix  $K_e$  und die  $M_e$  für das 4-Knoten-Element (Bild 1) des Timoshenko-Balkens in der üblichen Form. Das Finite Element hat den Freiheitsgrad 12. Es wird daher mit SI12 bezeichnet.

Nachfolgend wird ein dreischichtiger, nichtsymmetrischer Sandwichbalken mit viskoelastischen Schichten betrachtet (Bild 2). Das Koordinatensystem wird mit dem Schwerpunkt einer der äußeren Schichten verbunden (Schichtnummer 1). Die Durchbiegung  $w$  ist in allen Schichten gleich, die Verschiebungen  $u$  sind an den Schichtgrenzen stetig. Die Querschubdeformation  $\gamma_y$  tritt in jeder Schicht auf, jedoch aufgrund der Stetigkeit sind nur zwei unabhän-



**Bild 2**  
Superelement für einen Sandwichbalken



**Bild 3**  
Eigenfrequenzen für einen symmetrischen, dreischichtigen Balken: Vergleich von Theorie und Experiment

gig. Wenn man die Knoten der Mittelschicht ausschließt, gibt es in den Schnittflächen in der ersten Schicht Knoten mit dem Freiheitsgrad 3 ( $u_1^{(1)}, w_1^{(1)}, \gamma_y^{(1)}$ ), während in der dritten Schicht die Knoten den Freiheitsgrad 2 haben ( $u_1^{(3)}, \gamma_y^{(3)}$ ). Die Steifigkeitsmatrix des Superelements ergibt sich aus der Steifigkeitsmatrix des Finiten Elements SI12, welches die Verformung jeder Schicht beschreibt. Dieses Superelement wird mit SI20 bezeichnet, da es einen Freiheitsgrad von 20 aufweist.

Die Untersuchung des vorgeschlagenen Finiten Elements erfolgte für die Bestimmung des Eigenfrequenzspektrums eines symmetrischen, dreischichtigen Balkens mit sehr weicher Mittelschicht. Das Experiment wurde für einen freien Balken durchgeführt [6]

$$\begin{aligned}
 l &= 1,08 \text{ m}, H_1 = H_3 = 2,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}, H_2 = 8,02 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \\
 E_1 = E_3 &= 7,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}, E_2 = 22 \text{ MPa}, \\
 G_2 &= 8,365 \text{ MPa}, \nu_2 = 0,315, \\
 G_1 = G_3 &= 2,7 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \nu_1 = \nu_3 = 0,315, \\
 \rho_1 = \rho_3 &= 2700 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 40 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Die Ergebnisse sind für eine Vernetzung von  $N = 16$  Finiten Elementen auf Bild 3 dargestellt. Die numerischen Ergebnisse für die 1., 3., 5. und 7. Eigenfrequenz sind in Tabelle 1 enthalten. Der Querschubkoeffizient  $k$  wurde nach der Reissnerschen Methodik [5] ermittelt. Aus Tabelle 1 ist zu erkennen, daß eine Berechnung auf der Grundlage eines Querschubkoeffizienten von  $k = 0.006$  entsprechend der Timoshenko-Theorie und mit dem Superelement-Modell ähnliche Resultate liefert. In der untersten Zeile sind zum Vergleich experimentelle Werte nach [6] angeführt. Die Timoshenko-Theorie mit  $k = 1$  liefert falsche Ergebnisse.

**Tabelle 1**  
Eigenfrequenzen für einen dreischichtigen Balken

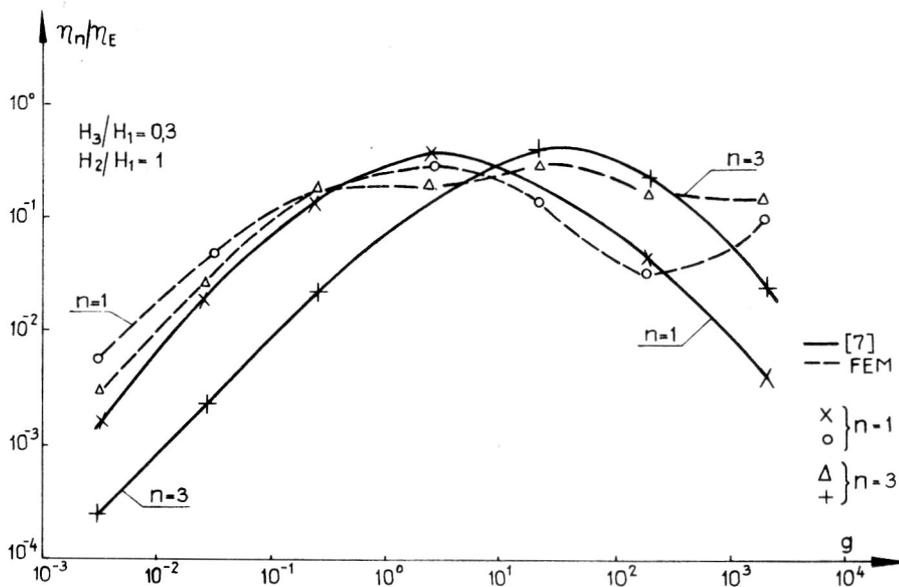
Finites Element	Querschubkoeffizient $k$	Eigenfrequenz, $f_n$ [Hz]			
		1	3	5	7
SI12	1	543	2107	3689	4987
SI12	0.006	191	399	603	806
SI20	-	190	400	612	830
Experiment [6]		124	357	580	869

Ungeachtet der Tatsache, daß das Finite Element für den einfachen Timoshenko-Balken SI12 mit einer Querschubkorrektur gut das Deformationsverhalten von Sandwich-Balken wiedergibt, ist seine Anwendung bei Berechnungen viskoelastischer Konstruktionen schwierig, da in diesem Fall unklar ist, wie der Querschubkorrekturfaktor zu ermitteln ist.

Zur Berechnung viskoelastischer Balken wird daher das Superelement SI20 eingesetzt. Zur Illustration werden die Ergebnisse der Bestimmung des Verlustkoeffizienten für einen dreischichtigen, unsymmetrischen Balken mit einer dämpfenden Mittelschicht angeführt. Entsprechende Vergleichsergebnisse sind in [7] enthalten. Zum besseren Vergleich der Ergebnisse von [7] und den nach der hier vorgestellten Methodik ermittelten Ergebnisse werden folgende dimensionslosen Größen (vgl. Bild 2) eingeführt:

$$g = G_2^2 / (K H_2), K = K_1 K_3 / (K_1 + K_3), K_i = E_i H_i \tag{14}$$

Hier ist  $G_2$  der Schubmodul der dämpfenden Schicht. Die Berechnung erfolgte unter Verwendung des Finiten Elements SI20 für einen gelenkig gelagerten, nichtsymmetrischen Dreischichtbalken. Der Verlustkoeffizient für die innere dämpfende Schicht betrug  $\eta_2 = \eta_E$ , für die Außen-



**Bild 4**  
Abhängigkeit des Verlustkoeffizienten von der Steifigkeit der Mittelschicht:

———— Näherungsformel [7],      - - - - FEM

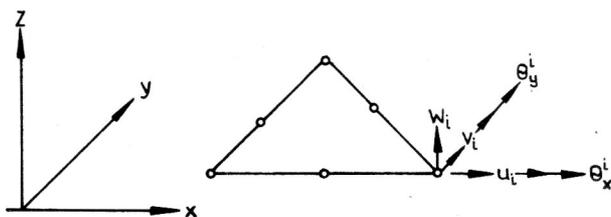
schichten wurde  $\eta_1 = \eta_3 = 0$  angenommen. Entsprechend Gl. (10) wurde der Verlustkoeffizient für den Balken  $\eta_n$  für die jeweilige  $n$ -te Frequenz ermittelt. Die Ergebnisse sind für die erste und dritte Eigenfrequenz logarithmisch auf Bild 4 abgetragen. Die geometrischen Parameter lauten:  $H_3/H_1 = 0,3$ ;  $H_2/H_1 = 1$ . Es ist zu sehen, daß die Näherungsformel aus [7] zu große Werte für den Verlustkoeffizienten liefert, jedoch der Ort der Maxima in Abhängigkeit von der Querschubsteifigkeit richtig wiedergegeben wird. Die Richtigkeit des betrachteten Dämpfungsmodells kann nur experimentell bestätigt werden. Zur Gegenüberstellung von Modell und Experiment werden von den Autoren weitere Publikationen vorbereitet.

### 3. Ein Finites Element und ein Superelement für eine Sandwichplatte

Die Finiten Elemente für die Platte werden in Analogie zum Balken formuliert. Das Basiselement hat gleichfalls seinen Ausgangspunkt im Timoshenko-Modell. Das Finite Dreieckselement 2. Ordnung (vgl. Bild 5) hat 6 Knoten mit dem Freiheitsgrad 5 pro Knoten:  $u_i, v_i, w_i$  und 2 Verdrehfreiheitsgrade  $\Theta_x^i, \Theta_y^i$ , die das Querschubdeformationsverhalten charakterisieren. Ausführlich ist die Steifigkeitsmatrix für dieses Finite Element mit der Bezeichnung PLW30 in [5] abgeleitet.

In Analogie zum Dreischichtbalken wird ein Superelement für die dreischichtige Platte auf der Basis des Elements PLW30 formuliert. Dieses hat einen Freiheitsgrad von 54 und wird daher mit PLW54 bezeichnet.

Zur Austestung des Elements PLW30 wurden eine Reihe von Aufgaben zum Vibrationsverhalten von Rechteckplatten, die in der Arbeit [8] analysiert worden sind, betrachtet. In Tabelle 2 sind die Ergebnisse zu den ersten 3 Eigenfrequenzen einer isotropen, allseitig eingespannten, quadratischen Platte mit der Seitenlänge  $a$  und der Dicke  $h$  bei einem Verhältnis von  $h/a = 0,1$  dargestellt. Aufgrund der Symmetrie der Randbedingungen wurde nur eine Viertel-



**Bild 5**  
Finites Element für die Timoshenko-Platte

**Tabelle 2**  
Normierte Eigenfrequenzen ( $\bar{\lambda}_{mn} = \omega \sqrt{2(1 + \nu)\rho a^2/E}$ ) für eine dicke, eingespannte Quadratplatte

Schwingungsform	eigene Ergebnisse	[8]	[9]	[10]	[11]
$\bar{\lambda}_{11}$	1,5840	1,579	1,588	1,588	1,756
$\bar{\lambda}_{12}$	2,9987	3,004	3,029	3,029	3,581
$\bar{\lambda}_{22}$	4,1345	4,149	4,256	4,258	5,280

platte betrachtet, jedoch wurden für jede Schwingform die Randbedingungen an den Symmetrieachsen geändert. Die Ergebnisse der Tabelle 2 entsprechen einer gleichmäßigen Vernetzung bei 128 Dreieckselementen auf der Viertelplatte. Der Korrekturfaktor für den Querschub betrug wie in [8]  $k = \pi^2/12 = 0,822$ . Zum Vergleich sind in Tabelle 2 auch die Lösungen nach dem Ritzschen Verfahren unter Verwendung der Eulerschen Balkenfunktionen [8] und des Timoshenko-Balkens [9] sowie nach der Finiten-Streifen-Methode [10] und die Lösung nach der klassischen Plattentheorie [11] angeführt.

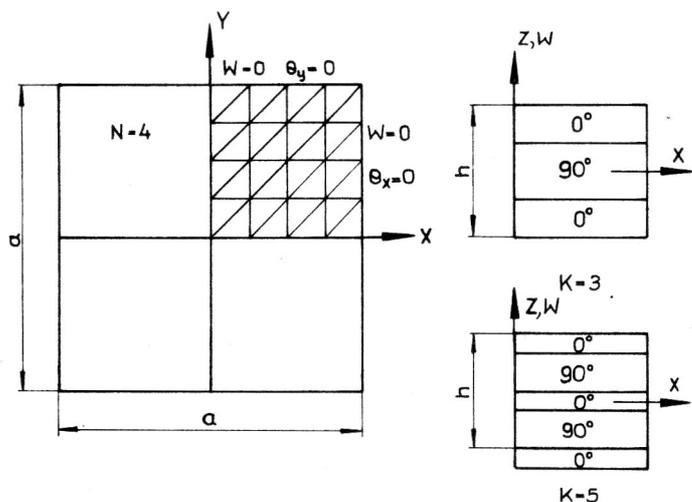
Das Finite Element wurde auch bei der Schwingungsrechnung von Schichtplatten aus Kompositen eingesetzt. In [12] sind die Berechnungsergebnisse für dreischichtige und fünfschichtige, orthogonal armierte, gelenkig gelagerte Platten (Bild 6) dargestellt. Es sei angemerkt, daß in den Randbedingungen die Verdrehungen um die Normale entlang der Kontur eingeschränkt waren. Die entsprechenden Einzelschichten wurden aus in einer Richtung armierten Kompositen gebildet. Die Gesamtdicke der Schichten unter einem Winkel von  $0^\circ$  und  $90^\circ$  war für den dreischichtigen ( $k = 3$ ) und den fünfschichtigen ( $k = 5$ ) Verbund gleich. Die Einzelschichten haben folgende Eigenschaften

$$E_L/E_T = 10,40; G_{LT}/E_T = 0,6; G_{TT}/E_T = 0,5;$$

$$\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0,25; \rho = 1 \quad (15)$$

Dabei ist L die Faserrichtung und T die Querrichtung. Die Werte für die 1. Eigenfrequenz sind in Tabelle 3 dargestellt ( $a/h = 0,1$ ).

Bei der Berechnung wurde eine Vernetzung mit 32 Finiten Dreieckselementen für eine Viertelplatte verwendet. Entsprechend der Reissnerschen Methodik wurden die Korrekturfaktoren für den Querschub  $k_{13}$  und  $k_{23}$  in x- und y-Richtung ermittelt. Aus Tabelle 3 ist jedoch zu erkennen, daß die Anwendung der Reissnerschen Methodik zur Berechnung des Querschubkorrekturfaktors in der Timoshenko-Platte verminderte Frequenzwerte im Vergleich zur



**Bild 6**  
Mehrschichtige Quadratplatte aus orthogonal-armiertem Kompositwerkstoff

**Tabelle 3**

Normierte erste Eigenfrequenz  $\bar{\omega} = \omega(\rho h^2/E_T)^{1/2}$  für eine gelenkig gelagerte Quadratplatte aus Kompositwerkstoff

Anzahl der Quelle Schichten	$E_L/E_T$		
	10	10	
3	PLW30	0,33206 $k_{13}=k_{23}=5/6$ 0,31886	0,43426 $k_{13}=k_{23}=5/6$ 0,38122
	[12]	$k_{13}=0,824; k_{23}=0,296$ 0,33364	$k_{13}=0,827; k_{23}=0,0857$ 0,43062
	[13]	0,33087	0,43149
	[14]	0,32841	0,43006
	CPT [12]	0,41264	0,73196
5	PLW30	0,33953 $k_{13}=k_{23}=5/6$ 0,30919	0,45938 $k_{13}=k_{23}=5/6$ 0,37099
	[12]	$k_{13}=0,868; k_{23}=0,202$ 0,34103	$k_{13}=0,872; k_{23}=0,0555$ 0,45380
	[13]	0,33998	0,45917
	[14]	0,34089	0,45374
	CPT [12]	0,41264	0,73196

Elastizitätstheorie [14], zur verbesserten Plattentheorie mit verdrehter Normalen [13] und zur Lösung unter Verwendung eines hybriden FEM-Berechnungsverfahrens unter Verwendung von unabhängigen Approximationen für die Spannungen und die Verschiebungen in der Schichten [12] liefert. Dies hängt damit zusammen, daß entsprechend der Reissnerschen Methodik die Schubspannungen durch Integration der Gleichgewichtsbeziehungen der Elastizitätstheorie unter Verwendung eines hybriden FEM-Berechnungsverfahrens unter Verwendung von unabhängigen Approximationen für die Spannungen und die Verschiebungen in den Schichten [12] liefert. Dies hängt damit zusammen, daß entsprechend der Reissnerschen Methodik die Schubspannungen durch Integration der Gleichgewichtsbeziehungen der Elastizitätstheorie unter Verwendung von Normalspannungen in den Schichten, die nach der Plattentheorie ermittelt werden, gewonnen werden. Für Schichten gleicher Dicke unterscheidet sich im Falle von dicken Platten damit die ermittelte Verteilung der Schubspannungen wesentlich von der genauen Verteilung, die man aus der Lösung nach der Elastizitätstheorie erhält. Daher gibt der Korrekturfaktor keine vollständig richtige Korrektur. Aus Tabelle 3 ist zu sehen, daß man die besten Ergebnisse erhält, wenn man den gleichen Korrekturwert wie für die homogene Platte ansetzt:  $k_{13} = k_{23} = 5/6$ . Gleichzeitig kann man jedoch sehen, daß die Reissnersche Methodik für den Sandwichbalken bei dünnen Außenschichten und weicher Füllschicht einen guten Korrekturwert für die Querschubsteifigkeit liefert.

In Tabelle 3 ist auch die Lösung nach der klassischen Plattentheorie (CPT) angeführt. Diese liefert eindeutig zu große Werte.

Es sei noch angemerkt, daß für alle Beispiele (Balken, Platte) zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix die Deformationsenergie des Querschubs mit Hilfe der Gauß-Integration verringerter Ordnung, d. h. mit Hilfe der verkürzten Integration, ermittelt wurde. Wenn dies nicht erfolgt, erhält

man für dünne Balken sowie Platten mittlere Dicke eine künstlich vergrößerte Steifigkeit. In dieser Arbeit wurde nur konsistente Massenmatrizen verwendet. Vergleichsrechnungen zeigten jedoch, daß auch die Verwendung diagonalen Massenmatrizen hinreichend genaue Ergebnisse bei den betrachteten Aufgaben liefert.

## LITERATUR

- [1] Нашиф, А., Джоунс, Д., Хендерсон, Дж.: Демпфирование колебаний. — Москва, Мир, 1988, — 448 с.
- [2] Moser, K., Lumassegger, M.: Ermittlung dynamischer Kennwerte und Möglichkeiten zur Dämpfungsverbesserung geschichteter Strukturen. In: Universität Innsbruck, Institute für Baustatik und Verstärkte Kunststoffe, Berichte 5, 1989, S. 1 — 68.
- [3] Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. — Москва: Наука, 1977. — 383 с.
- [4] Bathe, K. J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. — New Jersey: Prentice-Hall, 1982. — 736 p.
- [5] Рикардс, Р. Б.: Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. — Рига: Зинатне, 1988. — 284 с.
- [6] Fages, A., Verchery, G.: Influence de la prise en compte du cisaillement transversal sur le calcul des fréquences propres de poutres sandwiches. — In: J. Méc. theor. appl. — Paris 5 (1986) 1. — p. 73 - 93.
- [7] Okazaki, A., Urata, Y., Ookuchi, T., Tatemichi, A.: A Vibration Analysis of a Sandwich Beam Applying the Two-Dimensional Theory of the Deformation of a Constrained Viscoelastic Layer. — In: Trans. JSME — Tokyo 53 (1987) 495. — p. 2177 — 2182 (in Jap.).
- [8] Ganesan, N., Dhatarad, M. S.: Vibration analysis of Mindlin plates. — In: J. Sound & Vibr. — Vol. 87, No. 4. — p. 643 — 645.
- [9] Dawe, D. J., Roufaeil, O. L.: Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates. — In: J. Sound & Vibr. — 69 (1980). — p. 345 — 359.
- [10] Roufaeil, O. L., Dawe, D. J.: Vibration analysis of rectangular Mindlin plates by the finite strip method. — In: Comput. & Struct. — 12 (1980). — p. 833 — 842.
- [11] Leissa, A. W.: The free vibration of rectangular plates. — In: J. Sound & Vibr. — 31 (1973). — p. 257 — 293.
- [12] Sun, C. T., Lion, W. J.: A Three Dimensional Hybrid-Stress finite Element Formulation for free Vibrations of Laminated Composite Plates. — In: J. Sound & Vibr. — 119 (1987) 1. — p. 1 — 14.
- [13] Putcha, N. S., Reddy, J. N.: On dynamics of laminated plates using a refined mixed plate element. — In: ASME Winter Annual Meeting, 1984, New Orleans. — p. 161 — 169.
- [14] Noor, A. K.: Free vibrations of multilayered composite plates. — In: AIAA-Journal. — 11 (1973). — p. 1038 — 1039.

## Аншрфт дер Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. R. Rikards  
Dr.-Ing. A. Chate  
Dipl.-Math. M. Kenser  
Rigaer Polytechnisches Institut  
SU — 226 047 Riga  
Lenina iela 1  
UdSSR