TECHNISCHE MECHANIK 11 (1990) Heft 4
Manuskripteingang: 10. 3. 1990

Zur Darstellung der kinematischen Verfestigung

G. Backhaus

In [1] wird die differentielle Standardformulierung nach Bergander auf die Darstellung der kinematischen Verfestigung nach Backhaus [3] angewandt. Zu den in [1] enthaltenen Ausführungen sollen im folgenden einige Ergänzungen bzw. Klarstellungen erfolgen.

1. Zur Verwendung objektiver Spannungsgeschwindigkeiten

Bei der Verwendung objektiver Spannungsgeschwindigkeiten zur Gewährleistung der Objektivität inkrementeller Spannungs-Dehnungs-Beziehungen ist die Eigenschaft der Objektivität dieser Spannungsgeschwindigkeiten allein im allgemeinen nicht ausreichend, um zu physikalisch gerechtfertigten Ansätzen zu kommen. Im Falle der materialgebundenen Anisotropie, wie sie bei der kinematischen Verfestigung vorliegt, ist als physikalisch begründete Forderung die nach Abspaltung der Starrkörperdrehung zu beachten. Darauf ist bereits in [2] und ausführlich in [3] eingegangen. Diese Forderung wird bei den in [1] in Erwägung gezogenen Spannungsgeschwindigkeiten nur von der folgenden Form der zeitlichen Ableitung der Bauschinger-Spannung α erfüllt:

$$\overset{R}{\underline{\alpha}} = \underline{R}\,\underline{\dot{\alpha}}^*\,\underline{R}^T = \underline{\dot{\alpha}} + \underline{\alpha}\,\underline{\Omega} - \underline{\Omega}\,\underline{\alpha} \tag{1}$$

(Green-Naghdi).

Hierin ist $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}^T$ die Starrkörperdrehung und $\boldsymbol{\alpha}^*$ der Spannungstensor der kinematischen Verschiebung in dem mit der Starrkörperdrehung mitgeführten kartesischen Bezugssystem $x_i^* = R_{ij}\,x_j$.

Die weiteren in [1] genannten Spannungsgeschwindigkeiten (nach Jaumann, Truesdell, Oldroyd) erfüllen die Forderung nach Abspaltung der Starrkörperdrehung nicht, da in den zugehörigen Ausdrücken neben der Starrkörperdrehung auch noch verformungsbedingte Drehungs- und Deformations-Größen auftreten. Sie scheiden daher für Ansätze zur unmittelbaren Darstellung der zeitlichen Änderung der Bauschinger-Spannung aus, auch ohne daß ein Vergleich mit dem Experiment erforderlich wäre.

2. Erweiterung des Ansatzes nach Dienes

Für die objektive Darstellung der kinematischen Verfestigung auf der Grundlage der Pragerschen Regel $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = c\,\mathbf{D}$ wird von Dienes [4] (in einem etwas anderen Zusammenhang) die objektive Spannungsgeschwindigkeit nach Gl. (1) benutzt:

$$\boldsymbol{\dot{\alpha}}^* = c\,\underline{R}^T\,\underline{D}\,\underline{R} = c\,\underline{D}^*. \tag{2}$$

Hierbei ist eine Relaxation der Bauschinger-Spannung mit zunehmender Verformung nicht berücksichtigt. Ihre Berücksichtigung kann wie folgt geschehen:

Ausgehend von dem Integral

$$\boldsymbol{\alpha}^*(t) = \int_0^t c(\bar{t})\,\underline{D}^*(\bar{t})\,d\bar{t} \quad \text{und mit}$$

$$c(\bar{t}) = \frac{\partial b(\bar{t})}{\partial \bar{t}}; \; b(0) = 0$$

ergibt sich die gleichwertige Darstellung

$$\underline{\alpha}^*(t) = b(t)\,\underline{D}^*(t) - \int_0^t b(\bar{t})\,\underline{\dot{D}}^*(\bar{t})\,d\bar{t}$$

und mit Einführung einer Relaxations-Funktion $\varphi(t-\bar{t})$ der Ausdruck:

$$\underline{\alpha}^*(t) = b(t)\,\underline{D}^*(t) - \int_0^t b(\bar{t})\,\underline{\dot{D}}^*(\bar{t})\,\varphi(t-\bar{t})\,d\bar{t}. \tag{3}$$

Bei Annahme einer Exponentialfunktion $\varphi = e^{-\tau(t-\bar{t})}$ (bzw. der Darstellung von φ durch eine Exponentialreihe) läßt sich in der zeitlichen Ableitung von (3) der Integralausdruck eliminieren, und man erhält als Erweiterung des Ansatzes von Dienes durch Berücksichtigung der Bauschinger-Relaxation anstelle von Gl. (2):

$$\underline{\dot{\alpha}}^* = (\dot{b} + \tau b)\,\underline{D}^* - \tau\,\underline{\alpha}^* \tag{4.1}$$

oder für das raumfeste Bezugssystem:

$$\underline{R}\,\underline{\dot{\alpha}}^*\,\underline{R}^T = (\dot{b} + \tau b)\,\underline{D} - \tau\,\underline{\alpha} \tag{4.2}$$

mit $\underline{R}\,\underline{\dot{\alpha}}^*\,\underline{R}^T$ nach Gl. (1).

3. Ansatz nach Backhaus

Im erweiterten Ansatz (4) nach Dienes ist die Starrkörperdrehung $\mathbf{\Omega}$ abgespalten. Es verbleibt jedoch ein nicht berücksichtigter Anteil der gesamten Materialdrehung, der gegeben ist durch:

$$\underline{R}\,\underline{W}^*\,\underline{R}^T = \underline{W} - \underline{\Omega} \quad \text{mit} \quad \underline{W} = \frac{1}{2}\,(\underline{L} - \underline{L}^T). \tag{5}$$

($\mathbf{W}^*$ ist die Materialdrehung in dem der Starrkörperdrehung nachgeführten Bezugssystem x_i^*).

Im Ansatz Backhaus [3] wird der Einfluß dieses Drehungsanteiles dadurch erfaßt, daß in Gl. (3) die zeitliche Änderung des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit $\mathbf{D}^*$ ersetzt wird durch die Zeitableitung, die die im Bezugssystem x_i^* noch vorhandene Materialdrehung $\mathbf{W}^*$ berücksichtigt. Diese „co-rotational rate" ist mit der Kurzbezeichnung $\overset{W}{\mathbf{D}}{}^*$ gegeben durch:

$$\overset{W}{\underline{D}}{}^* = \dot{\underline{D}}^* + \underline{D}^*\,\underline{W}^* - \underline{W}^*\,\underline{D}^* = \underline{R}^T\,\overset{W}{\underline{D}}\,\underline{R}\,. \quad (6.1)$$

$$\text{mit } \overset{W}{\underline{D}} = \dot{\underline{D}} + \underline{D}\,\underline{W} - \underline{W}\,\underline{D}. \quad (6.2)$$

Mit der objektiven zeitlichen Ableitung $\overset{W}{\mathbf{D}}$ ist die gesamte Materialdrehung $\mathbf{W}$ erfaßt. Die Forderung nach Abspalten der Starrkörperdrehung wird durch die Transformation von $\overset{W}{\mathbf{D}}$ auf das die Starrkörperdrehung mitmachende Bezugssystem x_i^* erfüllt.

An die Stelle von Gl. (3) tritt jetzt:

$$\underline{\alpha}^*(t) = b(t)\,\underline{D}^*(t) - \int_0^t b(\bar{t})\,\overset{W}{\underline{D}}{}^*(\bar{t})\,\varphi(t-\bar{t})\,d\bar{t}. \quad (7)$$

Die zeitliche Ableitung liefert unter der obigen Annahme für die Relaxationsfunktion φ den folgenden Ausdruck (vgl. Gl. (61) in [4]):

$$\dot{\underline{\alpha}}^* = (\dot{b} + \tau b)\underline{D}^* - b(\underline{D}^*\underline{W}^* - \underline{W}^*\underline{D}^*) - \tau\,\underline{\alpha}^* \quad (8.1)$$

$$\underline{R}\,\dot{\underline{\alpha}}^*\,\underline{R}^T = (\dot{b} + \tau b)\underline{D} - b(\underline{D}\,\underline{R}\,\underline{W}^*\,\underline{R}^T - \underline{R}\,\underline{W}^*\,\underline{R}^T\underline{D}) - \tau\,\underline{\alpha}. \quad (8.2)$$

Die entsprechenden Beziehungen in [1] (Gl. (5.4) und (5.5)) enthalten den mittleren Term der rechten Seite nicht. Damit entsprechen sie nicht der Theorie Backhaus, sondern der von Dienes, bei der der mittlere Term nicht auftritt, vgl. Gl. (4).

4. Zur Differenz der Ansätze von Dienes bzw. Backhaus

Die in den Gl. (4) bzw. (8) auftretende Differenz zwischen den Ansätzen von Dienes bzw. Backhaus ist, wie bereits dargestellt, auf die Verwendung unterschiedlicher Zeitableitungen des Deformationsgeschwindigkeits-Tensors $\mathbf{D}$ im Integral der Gl. (3) zurückzuführen, die gegeben sind durch

$$\dot{\underline{D}}^* = \underline{R}^T\,\overset{R}{\underline{D}}\,\underline{R} \quad \text{bzw.} \quad \overset{W}{\underline{D}}{}^* = \underline{R}^T\,\overset{W}{\underline{D}}\,\underline{R},$$

wobei die erstere die Starrkörperdrehung, die letztere die gesamte Materialdrehung berücksichtigt.

Ohne Berücksichtigung der Bauschinger-Relaxation, d. h. für den Grenzfall $\varphi = 1$, ergeben sich die beiden folgenden Ansätze:

$$\dot{\underline{\alpha}}^* = c\,\underline{D}^* \; (c = \dot{b}) \; \text{nach Dienes} \quad (9)$$

$$\dot{\underline{\alpha}}^* = \dot{b}\,\underline{D}^* - b\,(\underline{D}^*\underline{W}^* - \underline{W}^*\underline{D}^*) \; \text{nach Backhaus.} \quad (10)$$

In [1] wird die Auffassung vertreten, daß die Differenz beider Formulierungen als reine Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit und somit durch die Materialfunktion b erfaßt werden kann. Das trifft offenbar nicht zu.

LITERATUR

[1] Knauer, U.: Die differentielle Standardformulierung für einen speziellen Ansatz der kinematischen Verfestigung, Techn. Mechanik 10 (1989), 4, S. 219 – 224.

[2] Balke, H.: Zur Anisotropie deformierbarer Körper bei großen Verformungen, ZAMM 66 (1986), 6, S. 227 – 232.

[3] Backhaus, G.: On the analysis of kinematic hardening at large plastic deformations, Acta Mechanica 75 (1988), S. 133 – 151.

[4] Dienes, J. K.: On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies, Acta Mechanica 32 (1979), S. 217 – 232.

Anschrift des Verfassers:
Prof. em. Dr.-Ing. G. Backhaus
Herkulesstr. 3
Dresden
8020