

Tensorielle Verallgemeinerung einachsiger Stoffgesetze¹⁾

Josef Betten

1. Einleitung

Im isotropen Fall kann das Stoffverhalten allgemein durch eine tensorwertige Funktion der Form

$$Y_{ij} = f_{ij}(\underline{X}) = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 X_{ij} + \varphi_2 X_{ij}^{(2)} \quad (1.1)$$

mit $X_{ij}^{(2)} \equiv X_{ik} X_{kj}$ dargestellt werden. Die Darstellung (1.1) beruht bekanntlich auf dem Hamilton-Cayleyschen Theorem. Die Koeffizienten $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ in (1.1) sind im allgemeinen skalare Funktionen der drei Invarianten des Argumentensors \underline{X} . Man kann die Invariantenfunktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ durch die Hauptwerte X_I, \dots, X_{III} und Y_I, \dots, Y_{III} ausdrücken, indem man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Y_I &= \varphi_0 + \varphi_1 X_I + \varphi_2 X_I^2 \\ Y_{II} &= \varphi_0 + \varphi_1 X_{II} + \varphi_2 X_{II}^2 \\ Y_{III} &= \varphi_0 + \varphi_1 X_{III} + \varphi_2 X_{III}^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

das aus (1.1) hervorgeht, nach der Cramerschen Regel auflöst:

$$\varphi_0 = \sum_{\alpha=I}^{III} \omega_{\alpha} X_{(\alpha+1)} X_{(\alpha+II)} Y_{\alpha} \quad (1.3a)$$

$$\varphi_1 = \sum_{\alpha=I}^{III} \omega_{\alpha} [X_{(\alpha+1)} + X_{(\alpha+II)}] Y_{\alpha} \quad (1.3b)$$

$$\varphi_2 = \sum_{\alpha=I}^{III} \omega_{\alpha} Y_{\alpha} \quad (1.3c)$$

Darin sind zur Abkürzung die von den Funktionswerten Y_{α} unabhängigen Produkte ω_{α} gemäß

$$\omega_{\alpha} := \prod_{\substack{\beta=I \\ \beta \neq \alpha}}^{III} 1/(X_{\alpha} - X_{\beta}) \quad (1.4)$$

definiert.

Wegen (1.4) können die skalaren Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ nur bei unterschiedlichen Hauptwerten $X_I \neq X_{II} \neq X_{III} \neq X_I$ in der angegebenen Weise (1.3a, b, c) bestimmt werden. Im folgenden wird gezeigt, wie man die skalaren Funktionen bestimmen kann, wenn zwei Hauptwerte zusammenfallen. Sind alle drei Hauptwerte gleich, $X_I = X_{II} = X_{III} \equiv X$, so ist \underline{X} ein Kugeltensor. Dann vereinfacht sich die Tensorfunktion (1.1) zu $Y_{ij} = Y \delta_{ij}$ mit $Y \equiv Y_I = Y_{II} = Y_{III}$.

Darüber hinaus soll im folgenden an Beispielen gezeigt werden, daß man die skalaren Funktionen nicht durch die Hauptwerte ausdrücken muß. Hingegen gelingt eine un-

mittelbare Bestimmung der skalaren Funktionen aus einem vorgegebenen einachsigen Stoffgesetz. Dann braucht man in die für $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ gefundenen Formeln nur die aus einachsigen Grundversuchen gefundenen experimentellen Daten einzusetzen. Die Aufstellung solcher Formeln soll Kernpunkt dieser Untersuchung sein.

2. Interpolationsmethode für Tensorfunktionen

Eine andere Darstellung als (1.1) ist durch

$$Y_{ij} = \sum_{\alpha=I}^{III} \alpha L_{ij} Y_{\alpha} + R_{ij}(\underline{X}) \quad (2.1)$$

gegeben mit den Tensorpolynomen

$$\alpha L_{ij} := \omega_{\alpha} (X_{ik} - X_{(\alpha+1)} \delta_{ik})(X_{kj} - X_{(\alpha+II)} \delta_{kj}) \quad (2.2)$$

und einem Restgliedtensor R , der aufgrund des Hamilton-Cayleyschen Theorems verschwindet, wie in [1] gezeigt wird. Die Darstellung (2.1) ist eine tensorielle Erweiterung der *Lagrangeschen Interpolationsformel* [1], [2]. Bei dieser Betrachtungsweise werden die Hauptwerte $X_{\alpha}, \alpha = I, II, III$, als „Stützstellen“ und die Y_{α} als die vorgeschriebenen „Stützwerte“ aufgefaßt.

Eine sehr ähnliche Darstellung benutzt Sobotka in [3], die auf dem Sylvesterschen Satz der Matrizenrechnung beruht.

Alternativ zu (2.1) wird in [1] auch die Newtonsche Interpolationsformel tensoriell erweitert:

$$Y_{ij} = a_0 \delta_{ij} + a_1 (X_{ij} - X_I \delta_{ij}) + a_2 (X_{ik} - X_I \delta_{ik})(X_{kj} - X_{II} \delta_{kj}). \quad (2.3)$$

Weitere Terme sind aufgrund des Hamilton-Cayleyschen Theorems nicht möglich. Die Koeffizienten ergeben sich zu:

$$a_0 = Y_I, \quad a_1 = (Y_I - Y_{II})/(X_I - X_{II}), \quad (2.4a, b)$$

$$a_2 = \frac{a_1 - (Y_{III} - Y_I)/(X_{III} - X_I)}{X_{II} - X_{III}} \quad (2.4c)$$

1) Plenarvortrag auf der 6. Informationstagung „Theoretische und experimentelle Baumechanik“ vom 12. – 14. September 1989 in Dresden

Die Funktion (2.3) führt auf dieselbe Standardform (1.1) wie (2.1), d. h. auf dieselbe *isotrope Tensorfunktion* (1.1) mit den skalaren Koeffizienten

$$\varphi_0 \equiv a_0 - a_1 X_I + a_2 X_{II}, \quad (2.5a)$$

$$\varphi_1 \equiv a_1 - a_2(X_I + X_{II}), \quad \varphi_2 \equiv a_2. \quad (2.5b, c)$$

Grundsätzlich gilt, daß es zu vorgegebenen *Stützstellen* und entsprechenden *Stützwerten* nur ein *Interpolationspolynom* niedrigsten Grades gibt. Die zahlreichen in der numerischen Mathematik bekannten *Interpolationsformeln* sind lediglich verschiedene Algorithmen oder Darstellungen ein und derselben polynomialen *Interpolationsfunktion* (*Minimalpolynom*).

Die Interpolation tensorwertiger Funktionen kann auch bei gleichen Hauptwerten („*konfluente Stützstellen*“) durchgeführt werden. Dazu benötigt man bei zwei gleichen Hauptwerten die erste Ableitung an der konfluenten Stützstelle. Die erste Ableitung der isotropen Tensorfunktion (1.1) wird in [1] gemäß

$$f'_{ij} \equiv \partial Y_{ip} / \partial X_{pj} = \varphi_1 \delta_{ij} + 2\varphi_2 X_{ij} \quad (2.6)$$

definiert, und für den Fall $X_I \neq X_{II} = X_{III}$ ermittelt man in [1] die Koeffizienten

$$a_0 = Y_I, \quad a_1 = (Y_I - Y_{II}) / (X_I - X_{II}), \quad (2.7a, b)$$

$$a_2 = (a_1 - f'_{ij}) / (X_I - X_{II}), \quad (2.7c)$$

die zur Bestimmung der skalaren Funktionen (2.5a, b, c) benötigt werden.

3. Tensorielle Verallgemeinerung des Norton-Baileyschen Kriechgesetzes

Das Norton-Baileysche Kriechgesetz

$$\dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_0 = (\sigma / \sigma_0)^n \quad \text{bzw.} \quad \dot{\epsilon} = K \sigma^n, \quad (3.1a, b)$$

das zur Beschreibung des sekundären Kriechbereichs bei einachsiger Belastung (σ) häufig benutzt wird, soll tensoriell erweitert werden. d. h., es wird eine isotrope Tensorfunktion

$$\dot{\epsilon}_{ij} = f_{ij}(\underline{\sigma}) = \varphi_0^* \delta_{ij} + \varphi_1^* \sigma_{ij} + \varphi_2^* \sigma_{ij}^{(2)} \quad (3.2)$$

gesucht, die das Werkstoffverhalten bei allgemeiner mehraxialer Belastung beschreibt. Dabei sollen die skalaren Funktionen φ_0^* , φ_1^* , φ_2^* als Funktionen der experimentellen Daten (K , n) ausgedrückt werden.

Alternativ kann die Stoffgleichung auch im Spannungsdeviator $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$ angesetzt werden:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = f_{ij}(\underline{\sigma}') = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \sigma'_{ij} + \varphi_2 \sigma_{ij}^{(2)}. \quad (3.3)$$

Für den *inkompressiblen* Sonderfall ($\dot{\epsilon}_{kk} = 0$) folgt daraus:

$$3\varphi_0 + \varphi_2 \sigma_{kk}^{(2)} = 0 \Rightarrow \varphi_0 = -2\varphi_2 J_2^{(2)} / 3 \quad (3.4)$$

mit $J_2 \equiv \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} / 2$, so daß sich (3.3) zu

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \varphi_1 \sigma'_{ij} + \varphi_2 (\sigma_{ij}^{(2)})', \quad (3.5)$$

vereinfacht. Darin sind die spurlosen Tensoren gemäß

$$\sigma'_{ij} \equiv \partial J_2^{(2)} / \partial \sigma_{ij} \quad \text{und} \quad (\sigma_{ij}^{(2)})' \equiv \partial J_3^{(2)} / \partial \sigma_{ij} \quad (3.6a, b)$$

mit $J_3 \equiv \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} / 3$ definiert.

Der einachsige Vergleichszustand (Index V) ist durch die Tensorvariablen

$$(\sigma_{ij})_V = \text{diag} \left\{ \sigma, 0, 0 \right\}, \quad (3.7a)$$

$$(\sigma'_{ij})_V = \text{diag} \left\{ \frac{2}{3} \sigma, -\frac{1}{3} \sigma, -\frac{1}{3} \sigma \right\}, \quad (3.7b)$$

$$(\dot{\epsilon}_{ij})_V = \text{diag} \left\{ \dot{\epsilon}, -\nu \dot{\epsilon}, -\nu \dot{\epsilon} \right\} \quad (3.7c)$$

gekennzeichnet. Letztere gilt bei Isotropie mit der Querszahl ν .

Im folgenden werden die Diagonalelemente (Hauptwerte) des Vergleichszustandes (3.7a, b, c) als „*Stützwerte*“ aufgefaßt und der in Ziffer 2 beschriebenen Interpolation zugrunde gelegt. Somit geht das einachsige Stoffgesetz, wie beispielsweise (3.1a, b), unmittelbar in die Bestimmung der gesuchten skalaren Funktionen φ_0 , φ_1 , φ_2 der isotropen Tensorfunktion (3.3) ein.

Es hat sich herausgestellt, daß die Darstellung (3.3) gegenüber (3.2) im Hinblick auf die Bestimmung der gesuchten skalaren Koeffizienten Vorteile bietet, da im einachsigen Vergleichszustand der Deviator (3.7b) zwei zusammenfallende Hauptwerte („*konfluente Stützstellen*“) besitzt, die von Null verschieden sind. Der Spannungstensor selbst (3.7a) besitzt hingegen zwei zusammenfallende Hauptwerte, die verschwinden. Dies führt auf formale Schwierigkeiten bei der Ermittlung der Ableitung (2.6), die in (2.7c) benötigt wird.

Der Deviator Darstellung (3.3) muß anstelle von (3.1a, b) das einachsige Stoffgesetz

$$\dot{\epsilon} = K(3/2)^n (\sigma')^n \quad (3.8)$$

mit der deviatorischen Größe $\sigma' = 2\sigma/3$ zugrunde gelegt werden.

Nach (2.7a) bestimmt man unter Berücksichtigung von (3.7b), d. h. $X_{II} = X_{III} \equiv -\sigma/3$, und (3.8) den Koeffizienten a_0 zu:

$$a_0 = Y_I \equiv K(3/2)^n (\sigma')^n = K \sigma^n \quad (3.9a)$$

Wegen $Y_{II} = -\nu \dot{\epsilon} = -\nu K \sigma^n$ und unter Berücksichtigung von (3.7b) und (3.9a) ermittelt man den Koeffizienten a_1 gemäß (2.7b) zu:

$$a_1 = (1 + \nu) K \sigma^{n-1}. \quad (3.9b)$$

Die in (2.7c) auftretende Ableitung f_{ij} an der konfluenten Stützstelle II/III wird folgendermaßen ausgedrückt. Aus (3.8) folgt:

$$f' \equiv d\dot{\epsilon}/d\sigma' = nK(3/2)^n(\sigma')^{n-1} = n\dot{\epsilon}/\sigma' \quad (3.10a)$$

bzw.

$$f_{ij} = n\dot{\epsilon}_{ij}/\sigma'_{ij} \quad (3.10b)$$

Wegen (3.7b, c) gilt:

$$\sigma'_{II} = -\sigma/3 \text{ und } \dot{\epsilon}_{II} = -\nu\dot{\epsilon}_I \equiv -\nu\dot{\epsilon}_I = -\nu K\sigma^n,$$

so daß (3.10b) durch

$$f_{ij} = 3\nu n K\sigma^{n-1} \quad (3.10c)$$

ausgedrückt werden kann. Damit erhält man wegen (3.7b) und (3.9b) nach (2.7c) den Koeffizienten a_2 zu:

$$a_2 = (1 + \nu - 3\nu n) K\sigma^{n-2}. \quad (3.9c)$$

Mit (3.9a, b, c) ermittelt man nach (2.5a, b, c) schließlich die skalaren Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ der isotropen Tensorfunktion (3.3) zu:

$$\varphi_0 = \frac{1}{9}(1 - 8\nu + 6\nu n) K\sigma^n \quad (3.11a)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{3}(1 + \nu + \frac{3}{2}\nu n) K\sigma^{n-1} \quad (3.11b)$$

$$\varphi_2 = (1 + \nu - 3\nu n) K\sigma^{n-2}. \quad (3.11c)$$

Zur Überprüfung der Ergebnisse (3.11a, b, c) sollen im folgenden einige „notwendige“ Kontrollen durchgeführt werden.

Für den *einachsigen Vergleichszustand* ($i = j = 1$) geht die Stoffgleichung (3.3) wegen (3.7b) in die Beziehung

$$\dot{\epsilon} = \varphi_0 + 2\varphi_1\sigma/3 + 4\varphi_2\sigma^2/9 \quad (3.12)$$

über, die mit (3.11a, b, c) unmittelbar auf das Norton-Baileysche Kriechgesetz (3.1b) führt.

Die isotrope *Querkontraktionszahl*

$$\nu := -(\dot{\epsilon}_{22}/\dot{\epsilon}_{11})_{\nu} = -(\dot{\epsilon}_{33}/\dot{\epsilon}_{11})_{\nu} \quad (3.13)$$

kann mit (3.3) durch

$$\nu = -(\varphi_0 - \frac{1}{3}\varphi_1\sigma + \frac{1}{9}\varphi_2\sigma^2)/(\varphi_0 + \frac{2}{3}\varphi_1\sigma + \frac{4}{9}\varphi_2\sigma^2) \quad (3.14)$$

ausgedrückt werden. Setzt man darin die Ergebnisse (3.11a, b, c) ein, so erhält man die Identität $\nu = \nu$.

Der *inkompressible* Fall (3.4) führt mit (3.7b) und (3.11a, c) auf

$$(1 - 8\nu + 6\nu n) K\sigma^n = -2(1 + \nu - 3\nu n) K\sigma^n,$$

woraus unmittelbar $\nu = 1/2$ folgt.

Die *Volumendehnung* erhält man aus (3.3) durch Spurbildung:

$$\dot{\epsilon}_{kk} = 3\varphi_0 + \varphi_2\sigma'_{kk}^{(2)} = 3\varphi_0 + 2\varphi_2J_2'. \quad (3.15a)$$

Im einachsigen Fall (3.7b) geht sie mit (3.11a, c) über in:

$$\dot{\epsilon}_{kk} = (1 - 2\nu) K\sigma^n \equiv (1 - 2\nu)\dot{\epsilon}. \quad (3.15b)$$

Das Ergebnis stimmt mit der Spur von (3.7c) überein.

Die *Dissipationsleistung*

$$\dot{D} = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \quad (3.16)$$

kann unter Berücksichtigung der Stoffgleichung (3.3) in der Form

$$\dot{D} = J_1\varphi_0 + 2J_2'\varphi_1 + (3J_3' + 2J_1J_2'/3)\varphi_2 \quad (3.17)$$

ausgedrückt werden und geht im einachsigen Fall (3.7a, b) mit $J_1 \equiv \sigma, J_2' \equiv \sigma^2/3, J_3' \equiv 2\sigma^3/27$ unter Berücksichtigung der Ergebnisse (3.11a, b, c) in

$$\dot{D} = K\sigma^{n+1} \equiv \sigma\dot{\epsilon} \quad (3.18)$$

über. Mithin ist die Lösung (3.11a, b, c) mit der Hypothese von der Gleichheit der Dissipationsleistung im allgemeinen Zustand und im Vergleichszustand,

$$\dot{D} = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \equiv \sigma\dot{\epsilon}, \quad (3.19)$$

verträglich. Aus (3.19) kann man auch eine Beziehung für die Vergleichsspannung σ herleiten, wie weiter unten gezeigt wird.

Im *inkompressiblen* Fall (3.4) vereinfacht sich (3.17) zu

$$\dot{D} = 2J_2'\varphi_1 + 3J_3'\varphi_2 \quad (3.20)$$

und enthält nur Deviatorinvarianten. Für den einachsigen Fall (3.7b) folgt aus (3.20) mit (3.11b, c) und wegen $\nu = 1/2$ wieder (3.18).

Die *lineare Theorie* bei *Inkompressibilität* ist durch $\varphi_0 = \varphi_2 = 0$ gekennzeichnet. Mit $\varphi_2 = 0$ ist nach (2.5c) auch $a_2 = 0$, so daß sich (2.5b) zu $\varphi_1 = a_1$ vereinfacht. Mithin geht (3.3) in die lineare Form

$$\dot{\epsilon}_{ij} = a_1\sigma'_{ij} \quad (3.21a)$$

über. Setzt man darin (3.9b) mit $\nu = 1/2$ ein, so folgt unmittelbar die Stoffgleichung

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} K\sigma^{n-1}\sigma'_{ij}, \quad (3.21b)$$

die auch in [4] angegeben wird.

Setzt man in (3.3) den Deviator $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}J_1\delta_{ij}$ mit seinem Quadrat

$$\sigma'_{ij}{}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} - \frac{2}{3}J_1\sigma_{ij} + \frac{1}{9}J_1^2\delta_{ij} \quad (3.22)$$

ein, so erhält man die Darstellung (3.2) mit den skalaren Funktionen

$$\varphi_0^* = \varphi_0 - \frac{1}{3} J_1 \varphi_1 + \frac{1}{9} J_1^2 \varphi_2 \quad (3.23a)$$

$$\varphi_1^* = \varphi_1 - \frac{2}{3} J_1 \varphi_2 \quad (3.23b)$$

$$\varphi_2^* \equiv \varphi_2. \quad (3.23c)$$

Nach der Darstellungstheorie tensorwertiger Funktionen sind die $\varphi_1, \varphi_1, \varphi_2$ skalare Funktionen der Invarianten. Dieser Einfluß ist in (3.11a, b, c) durch die Vergleichsspannung σ gegeben. Um das zu zeigen, kann man von der Hypothese (3.19) ausgehen und erhält mit (3.1b), (3.3), (3.11a, b, c) die kubische Gleichung

$$\sigma^3 + A\sigma^2 + B\sigma + C = 0. \quad (3.24)$$

Darin sind zur Abkürzung gesetzt:

$$A \equiv \frac{1}{9} (1 - 8\nu + 6\nu n) J_1, \quad (3.25a)$$

$$B \equiv -\frac{4}{3} (1 + \nu + \frac{3}{2}\nu n) J_2, \quad (3.25b)$$

$$C \equiv -(1 + \nu - 3\nu n)(3J_3 + \frac{2}{3} J_1 J_2). \quad (3.25c)$$

Mithin werden die $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ in (3.11a, b, c) von der Integritätsbasis beeinflusst und enthalten darüber hinaus die Werkstoffparameter K und n :

$$\varphi_0 = \varphi_0(J_1, J_2, J_3; K, n), \dots, \varphi_2 = \varphi_2(J_1, J_2, J_3; K, n).$$

4. Tensorielle Verallgemeinerung der Ramberg-Osgood-Beziehung

Nichtlinear elastisches Verhalten kann durch die Beziehung

$$\varepsilon = \sigma/E + k(\sigma/E)^n \quad (4.1)$$

beschrieben werden, die auf Ramberg und Osgood zurückgeht [5].

Für das Beispiel (4.1) ermittelt man analog (3.9a, b) mit $Y_{II} = -\nu\varepsilon$ die Koeffizienten a_0 und a_1 zu

$$a_0 = \sigma/E + k(\sigma/E)^n, \quad (4.2a)$$

$$a_1 = (1 + \nu) [1 + k(\sigma/E)^{n-1}] / E. \quad (4.2b)$$

Wegen $\sigma = 3\sigma'/2$ kann das Stoffgesetz (4.1) auch in der Form

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\sigma'}{E} + \left(\frac{3}{2}\right)^n k \left(\frac{\sigma'}{E}\right)^n \quad (4.3)$$

dargestellt werden, so daß damit die Ableitung

$$f' := \frac{df}{d\sigma'} = \frac{1}{\sigma'} \left[\frac{3}{2} \frac{\sigma'}{E} + n \left(\frac{3}{2}\right)^n k \left(\frac{\sigma'}{E}\right)^{n-1} \right] \quad (4.4a)$$

folgt. Darin kann man den zweiten Term in der eckigen Klammer wegen (4.3) gemäß

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n k \left(\frac{\sigma'}{E}\right)^n = \varepsilon - \frac{3}{2} \frac{\sigma'}{E} \quad (4.3^*)$$

ersetzen, so daß man erhält:

$$f' = 3(l - n)/2E + n\varepsilon/\sigma'. \quad (4.4b)$$

An der „konfluenten Stützstelle“ II folgt daraus wegen $\sigma'_{II} = -\sigma/3$ und $\varepsilon_{II} = -\nu\varepsilon$ die gesuchte Ableitung unter Berücksichtigung von (4.1) zu:

$$f'_{II} = \frac{3}{2} \frac{l - n}{E} + \frac{3\nu n}{E} \left[1 + k \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{n-1} \right]. \quad (4.5)$$

Damit kann der Koeffizient (2.7c) analog (3.9c) bestimmt werden:

$$a_2 = \frac{1}{E\sigma} \left\{ (1 + \nu - 3\nu n) \left[1 + k \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{n-1} \right] - \frac{3}{2} (1 - n) \right\}. \quad (4.2c)$$

Mit den Koeffizienten (4.2a, b, c) ermittelt man schließlich die gesuchten skalaren Funktionen (2.5a, b, c) der isotropen Tensorfunktion (3.3) zu:

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} (1 - n) \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{9} (1 - 8\nu + 6\nu n) \left[\frac{\sigma}{E} + k \left(\frac{\sigma}{E}\right)^n \right] \quad (4.6a)$$

$$\varphi_1 = \frac{1 - n}{2E} + \frac{2(1 + \nu)/3 + \nu n}{E} \left[1 + k \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{n-1} \right] \quad (4.6b)$$

$$\varphi_2 = a_2 \quad \text{gemäß (4.2c),} \quad (4.6c)$$

Zur Ermittlung der skalaren Funktionen $\varphi_0^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*$ der Darstellung (3.2) können wieder die Beziehungen (3.23a, b, c) mit (4.6a, b, c) benutzt werden.

Weitere Beispiele lassen sich nach obigen Mustern routinemäßig behandeln. Von großem Interesse für die Ingenieurpraxis sind auch Stoffgleichungen, die den elastisch-plastischen Übergang bei mehraxialer Beanspruchung beschreiben. Man erhält diese Stoffgleichungen wiederum nach der tensoriellen Interpolationsmethode aus empirischen einachsigen Stoffgesetzen, wie in [6] gezeigt.

LITERATUR

- [1] Betten, J.: Interpolation Methods for Tensor Functions, in: Avula, X. J. R. et al. (Herausg.), Mathematical Modelling in Science and Technology, Pergamon Press, New York / ... / Frankfurt 1984, S. 52 – 57, vorgetragen auf der „Fourth International Conference on Mathematical Modelling“ in Zürich, August 1983.

- [2] Betten, J.: Elastizitäts- und Plastizitätslehre, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1985, zweite Aufl. 1986. oder: Betten, J.: Tensorrechnung für Ingenieure, Teubner-Verlag, Stuttgart 1987.
- [3] Sobotka, Z.: Tensorial Expansions in Non-Linear Mechanics, Academia Nakladatelstvi Ceskoslovenské, Akademie VED, Praha 1984.
- [4] Leckie, F. A. und Hayhurst, D. R.: Constitutive Equations for Creep Rupture, *Acta Metallurgica* **25** (1977), S. 1059–1070.
- [5] Ramberg, W. und Osgood, W. R.: Description of stress-strain curves by three parameters, NACA Technical Note No. 902 (July 1943).
- [6] Betten, J.: Generalization of nonlinear material laws found in experiments to multi-axial states of stress, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, **8** (1989), S. 325 – 339.

Anschrift des Verfassers:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. J. Betten
Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Modelle in der Werkstoffkunde
Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen
Templergraben 55
Aachen
D – 5100