

# Zur Berechnung der Laufradströmung in Turbopumpen

Ingo Kosmowski, Norbert Jäger

## 1. Einleitung

Wichtigstes Funktionselement der Turbopumpe ist die Stufe. Sie besteht aus einem Laufrad und einer beschau- felten oder unbeschau felten Leiteinrichtung. Das Fluid passiert damit innerhalb der Stufe ein rotierendes und ein ruhendes System. Deshalb ist es zweckmäßig, die Strömung abschnittsweise zu betrachten. Besondere Bedeutung kommt dabei der Strömung im Laufrad zu. Hier erfolgt die eigentliche Energieübertragung, womit sowohl an die konstruktive Gestaltung als auch die technologische Ausführung der Laufräder hohe Anforderungen zu stellen sind.

Laufräder lassen sich grundsätzlich auf zwei verschiedenen Wegen dimensionieren. Es wird

- entweder die Zirkulationsverteilung
- oder die Geometrie der Laufradbeschau felung

vorgegeben.

Wird von einer Zirkulationsverteilung ausgegangen, so ist die daraus ermittelte Schau felform den technologischen und festigkeitsmäßigen Erfordernissen anzupassen, was sich durch Variation der Eingabewerte realisieren läßt.

Im allgemeinen erweist es sich als zweckmäßiger, aufbauend auf Erfahrungswerten zur Geometrie des Laufrades den zweiten Weg zu beschreiten. In diesem Fall ist eine Nachrechnung der Strömung durchzuführen. Da die Navier-Stokessche Bewegungsgleichung nur das Momentanbild einer turbulenten Strömung beschreiben kann, müßte zur Berechnung der turbulenten Laufradströmung die Reynoldssche Bewegungsgleichung die Ausgangsgleichung bilden. Durch die Dreidimensionalität der Strömung in Verbindung mit dem räumlich gekrümmten Verlauf der Laufradkanäle sind jedoch die Möglichkeiten für eine komplette Durchrechnung stark eingeschränkt. Da ein dreidimensionales Strömungsgebiet bereits bei einer Vernetzung mit 50 Gitterpunkten in jeder Koordinatenrichtung auf ein Gleichungssystem mit 750 000 Unbekannten führt, wird schnell die Leistungsgrenze vorhandener Rechenanlagen erreicht. Deshalb bereitet die numerische Lösung der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichung große Probleme, womit mehr oder weniger eingreifende Näherungen in Kauf genommen werden müssen. Ein bevorzugter Weg zur Berechnung von Turbomaschinenströmungen ist das Kernströmungsgrenzschichtmodell.

## 2. Möglichkeiten zur Voro ptimierung

Turbopumpen haben heute einen hohen Entwicklungsstand erreicht, womit sich ihr Wirkungsgrad nur noch mit erheblichem Aufwand überbieten läßt. Dies verdankt die Pumpe der Tatsache, daß in ihre Auslegung empirische Daten einfließen, die auf der statistischen Auswertung

einer Vielzahl von unterschiedlichen Ausführungen und der Auswirkungen der einzelnen konstruktiven Besonderheiten auf das Betriebsverhalten der Pumpen basieren. Die Voraussetzungen, um die vorliegenden Erfahrungen umfassend und effektiv für die Konstruktion nutzen zu können, sind insbesondere durch den Einsatz von CAD-Systemen gegeben. In der Phase der Lösungsfindung können sie zwar nicht vollends die schöpferischen Fähigkeiten des Konstrukteurs ersetzen. CAD-Arbeitsplätze mit grafischem Bildschirm, Digitalisiertablett und Plotter bieten jedoch die Voraussetzungen, um die sich anschließenden Konstruktionsphasen, wie Entwurf, Detaillierung und Änderung, wesentlich rationeller zu gestalten [1].

Wichtig ist der modulare Aufbau des CAD-Systems, der einen Dialog zuläßt, um vorteilhaft Variantenuntersuchungen durchführen zu können und dem Konstrukteur den erforderlichen Entscheidungsspielraum zu gewähren.

Da durch den Konturverlauf der strömungsführenden Bauteile ein Optimum in der Energieumwandlung oder -übertragung erzielt werden soll, muß die Auslegung der Pumpe iterativ vorgenommen werden, was im wesentlichen in zwei Etappen erfolgt. Bevor anspruchsvolle Verfahren zur Strömungs-, Festigkeits- und Schwingungsberechnung angewendet werden, ist ein Grobkonzept erforderlich.

Für das Grobkonzept zur Entwicklung einer Pumpe dienen als wesentlichste Parameter der Volumenstrom, die spezifische Förderarbeit, die Drehzahl und der NPSH-Wert (Net Positive Suction Head zur Charakterisierung der Anforderungen hinsichtlich Saugfähigkeit und Kavitation). Davon ausgehend sind die spezifische Drehzahl (und damit die Laufradform) und der maximal mögliche Wirkungsgrad zu ermitteln. Nach der Entscheidung über die notwendige Anzahl der Stufen und Fluten sind die Hauptabmessungen festzulegen. Hierfür gibt es mehrere Methoden [2].

Gewisse Anhaltspunkte zur Dimensionierung eines Laufrades bietet in Form einer Ein- oder Mehrschnittrechnung die Stromfadentheorie, woraus sich u. a. Orientierungen für die Wahl der Schau felwinkel ergeben. Einige Informationen erhält man auch durch die Pumpenmodellierung, der bestimmte Bedingungen der geometrischen und dynamischen Ähnlichkeit zugrunde liegen. Mit Hilfe der Dimensionsanalyse werden zwischen dem Vorläufertyp oder einem Modell und dem Prototyp Beziehungen aufgestellt, in die wesentliche Parameter, wie der Volumenstrom und die spezifische Förderarbeit, eingehen. Da sich keine vollständige Ähnlichkeit herstellen läßt, sind in die Modellierung Korrekturen einzubeziehen, durch die z. B. die Einflüsse unterschiedlicher Reynolds-Zahlen und Rauigkeiten auf den Wirkungsgrad sowie weitere Leistungsparameter Berücksichtigung finden. Eine Erweiterung erfährt die Modellierung durch die Modifikation. Hierbei fließen in Ergänzung zu den prinzipiellen Bedingungen der Ähnlich-

keit Erfahrungen aus Vorläufermaschinen und Testuntersuchungen in den Entwurf ein, um durch konstruktive Details bestimmte Fördereigenschaften zu gewährleisten. Typische Veränderungen beziehen sich auf die Eintrittsgeometrie (Durchmesser) des Laufrades, die Schaufelwinkel und -zahl, die Form der Ein- und Austrittskanten der Beschauflung, die Austrittsbreite und den Austrittsdurchmesser des Laufrades (Abdrehung) und die Querschnittsflächen des Gehäuses. Ein spezielles Problem ist die Saugmünddimensionierung, nach der im Sinne eines günstigen Kavitationsverhaltens ein bestimmter Zusammenhang zwischen dem Durchmesser und dem Schaufelwinkel einzuhalten ist. Weitere Anhaltspunkte zur konstruktiven Gestaltung der Pumpe liefert die Flächenverhältnis- und die Koeffizientenmethode. Die Flächenverhältnismethode geht von der Zuordnung bestimmter Querschnittsflächen aus. Die Grundlage für die Koeffizientenmethode sind empirisch ermittelte Zusammenhänge zwischen ausgewählten Kennzahlen, insbesondere zwischen der Energieübertragungszahl und der Durchfließzahl.

Aus der Vielfalt der Methoden, die offensichtlich im einzelnen strittig und in ihrer Anwendung differenziert zu bewerten sind, und den speziellen gespeicherten Informationen bieten sich meist mehrere Realisierungsmöglichkeiten an, womit in der Regel gewisse Kompromisse nicht zu vermeiden sind. Im Ergebnis muß jedoch erreicht werden, daß eine voroptimierte Formgebung der strömungsführenden Bauteile vorliegt, durch die die technologischen und strömungstechnischen Anforderungen berücksichtigt und insbesondere günstige Geschwindigkeitsverläufe ermöglicht werden. Verfügt man über eine voroptimierte Form, so läßt sich die Strömungsanalyse durchführen, was nur auf der Basis mehrdimensionaler Berechnungen erfolgen kann.

### 3. Nachrechnungsaufgabe

Die Nachrechnungsaufgabe beinhaltet die Berechnung der Geschwindigkeiten und Drücke in jedem Punkt des Strömungsfeldes. Da die Nachrechnungsverfahren einen hohen Rechen- und Zeitaufwand erfordern, ist es nicht zweckmäßig, sie bereits in die Voroptimierung einzubeziehen. Eine detailliertere Berechnung der Strömung sollte erst dann vorgenommen werden, wenn eine nach den vorgestellten Methoden ermittelte Konfiguration und damit die Startgeometrie vorliegt. Wünschenswert sind dreidimensionale Berechnungen, da nur sie uneingeschränkt den Einfluß räumlich gekrümmter Schaufelformen auf das Strömungsfeld erfassen können. Als echt dreidimensional gelten die Verfahren, die im Ergebnis Aussagen über die drei Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren als Funktion von allen drei Koordinaten liefern. In vielen Fällen sind jedoch auch zwei-, quasizwei- oder quasidreidimensionale Berechnungen ausreichend. Je nach der gewählten Näherung ist von unterschiedlichen Differentialgleichungen auszugehen. Dabei ist zu beachten, daß in Abhängigkeit von ihrem Typ Randbedingungen zu formulieren sind, die sowohl den physikalischen Vorgängen als auch den mathematischen Forderungen hinsichtlich Eindeutigkeit der Lösung und Stabilität der Rechnung gerecht zu werden [3].

Zur Lösung der Strömungsaufgabe stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, die sich im wesentlichen in exakte und numerische Verfahren unterteilen lassen. Exakte Lösungen ergeben sich aus der Anwendung der Methode der konformen Abbildungen, indem das Strömungsbild analytisch aus einer Abbildung in einer komplexen Ebene und ihrer Transformation in eine neue komplexe Ebene gewonnen wird, wie es z. B. in [4] und [5] dargelegt ist.

Obwohl sich auch mit dieser Methode, z. B. nach der Theorie von Gostelow [6], durch Ketten von konformen Abbildungen Gitterströmungen nachbilden lassen, wird hiervon nur noch vereinzelt, wie in [7], zum Vergleich mit numerischen Verfahren, Gebrauch gemacht. Hierzu gehören die Singularitätenverfahren. In diesem Fall wird von Singularitäten ausgegangen, mit denen punktförmig Konturen oder flächenhaft Oberflächen belegt werden. Hierüber gibt es eine Reihe von Veröffentlichungen, worunter z. B. [8] bis [10] zu erwähnen wären. Über die in letzter Zeit durchgeführten Arbeiten wird durch [11] ein guter Überblick gegeben.

Die Methode der konformen Abbildungen und die verschiedenen Formen von Singularitätenverfahren sind ausgereifte Verfahren. Sie sind zwar theoretisch von gewissem Interesse, so zu Vergleichszwecken, wie in [12]. Sie zählen aber nicht mehr zu den bestimmenden Verfahren, da sie einerseits Reibungsfreiheit voraussetzen und sich zum anderen nur mit gewissen Einschränkungen auf die gesamte Stromfläche oder das gesamte Strömungsfeld anwenden lassen. Zur Beschreibung von Strömungsfeldern eignen sich wesentlich besser die Feldmethoden, wofür sich mit Erfolg Differenzenverfahren, die Finite-Elemente-Methode und das Zeitschrittverfahren einsetzen lassen. Sie erfordern jedoch im Vergleich zu den älteren Verfahren eine erheblich höhere Speicherkapazität.

Die Nachrechnungsaufgabe ist sinnvoll in die numerische Entwicklung eines Laufrades eingeordnet, wenn sie nach der Approximation der gesamten Schaufelfläche erfolgt [13].

Nach Realisierung der strömungstechnischen Nachrechnung muß dann anhand von Kriterien entschieden werden, ob Profil- und Flächenänderungen erforderlich sind, womit anschließend die Strömung erneut nachgerechnet werden muß, oder ob bereits auf der Grundlage der voroptimierten Formgebung mit der Aufstellung des CNC-Fräsprogrammes und der Fertigung begonnen werden kann.

### 4. Ausgewählte Näherungen zur Strömungsberechnung

Da der Durchrechnung einer dreidimensionalen Laufradströmung mit Reibung und Turbulenz selbst bei super-schnellen Großrechnern Grenzen gesetzt sind, realisiert man eine als zweckmäßig erscheinende Näherung. Sie kann beispielsweise in einer Reduzierung des Problems auf eine zweidimensionale Aufgabenstellung bestehen, wobei die Navier-Stokessche Bewegungsgleichung zugrunde gelegt wird [14]. Es existieren aber auch Arbeiten, durch die auf der Basis eines Zwei-Parameter-Modells die Turbulenz berücksichtigt wird, wie z. B. [15]. Auch in diesem Fall ist von einer zweidimensionalen Betrachtung ausgegangen worden, wobei rein radiale, unendlich dünne

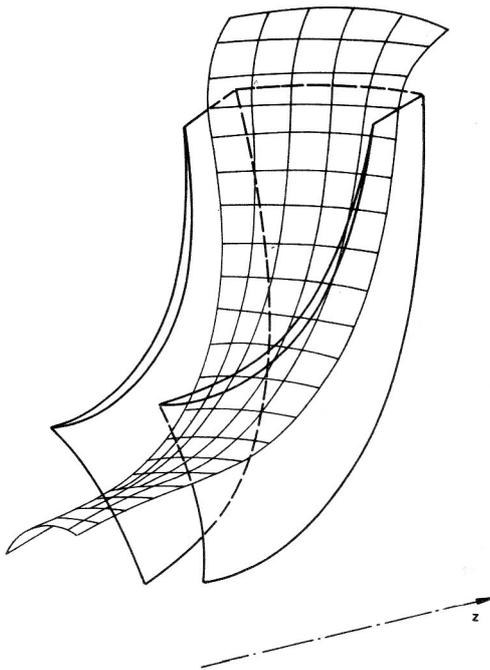
Schaufeln vorausgesetzt werden. Derartige Berechnungen sind insofern von Interesse, daß sie gewisse Orientierungen in bezug auf die Einflüsse von Schaufelzahl, Reynolds-Zahl und Ablösung ergeben. Allerdings sind die derzeit bekannten Berechnungen, die bezogen auf das Strömungsfeld Turbulenzeinflüsse erfassen, nicht auf beliebige Schaufformen anwendbar. Deshalb ist zur Berechnung von Laufradströmungen das Kernströmungsgrenzschichtmodell weiterhin von grundlegender Bedeutung. Auch in diesem Zusammenhang ist zu beachten, daß die Aussagefähigkeit zweidimensionaler Berechnungsverfahren eingeschränkt ist.

Vor allem bei den Radial- und den Diagonalrädern wird durch sie nur unzureichend die dreidimensionale Eintrittsströmung erfaßt. Zur Berechnung der dreidimensionalen Kernströmung in den Laufrädern von Turbomaschinen den vorzugsweise Stromflächenverfahren angewendet. Sie beruhen auf den von Wu [16] definierten zwei Arten von Relativstromflächen. Die Stromfläche 1. Art (S1) erstreckt sich zwischen den Schaufeloberflächen zweier benachbarter Schaufeln (Bild 1), womit die Gitterströmung beschrieben wird. Die Stromfläche 2. Art (S2) verläuft zwischen der Nabe und der Gehäusewand (Bild 2), was der Meridianströmung entspricht. Die geometrische Lage einer Relativstromfläche ist durch die Strömung, d. h. durch den örtlichen Vektor der Relativgeschwindigkeit  $\underline{w}$ , festgelegt und bildet mit dem Normalenvektor der Stromflächen  $\underline{n}$  einen rechten Winkel, so daß sich für die Komponenten im Zylinderkoordinatensystem

$$n_r w_r + n_\varphi w_\varphi + n_z w_z = 0$$

ergibt.

Die Strömung auf beiden Arten von Stromflächen kann als zweidimensional angesehen werden. Um dreidimensionale Strömungseffekte zu erfassen, ist die Lösung von



**Bild 1**  
Orthogonales Raster auf einer Stromfläche 1. Art (S1)

zwei zweidimensionalen Problemen erforderlich, wobei die Abhängigkeit der beiden Stromflächen voneinander zu beachten ist.

Die iterative Kombination der beiden Teilergebnisse ermöglicht eine quasidreidimensionale Näherung.

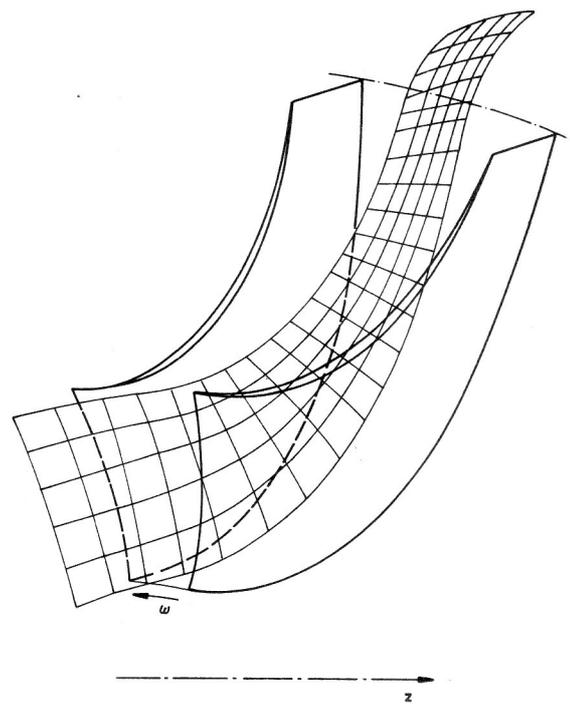
Zur Lösung der sich für die beiden Arten von Stromflächen ergebenden Gleichungen sind verschiedene Berechnungsmethoden anwendbar. Gegenwärtig werden am häufigsten die Matrixmethode, z. B. [17], und das Stromlinienkrümmungsverfahren, z. B. [18], genutzt.

Die Matrixmethode koppelt die Bewegungs- und die Kontinuitätsgleichung über die Einführung der Stromfunktion. Die resultierende nichtlineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit der Stromfunktion als Hauptunbekannte wird iterativ innerhalb eines festen orthogonalen oder konturangepaßten Netzgitters gelöst.

Beim Stromlinienkrümmungsverfahren wird der Stromlinienverlauf unmittelbar berechnet, indem ein ursprünglich angenommenes Stromlinienbild solange iterativ verändert wird, bis alle Bedingungen hinreichend erfüllt sind.

Aus der Literatur und eigenen Untersuchungen [19] konnten keine Hinweise gefunden werden, die einen eindeutigen Vorteil eines der beiden genannten Verfahren erkennen lassen.

Neben den Berechnungsverfahren zur Ermittlung des quasidreidimensionalen Strömungsfeldes kommen auch Durchströmflächenverfahren zur Anwendung [20], [21]. Hierbei erfolgt die Berechnung der Strömung auf Flächen quer zur Strömungsrichtung. Sie sind für solche Fälle geeignet, bei denen eine Hauptströmungsrichtung vorliegt. Die Berechnung erfolgt ausgehend von einem am Eintritt des Strömungskanals vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil schrittweise auf Durchströmflächen. Ein Vorteil des



**Bild 2**  
Orthogonales Raster auf einer Stromfläche 2. Art (S2)

Verfahrens besteht im relativ geringen Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf, da die sich ergebenden algebraischen Gleichungen nicht für das gesamte Strömungsfeld, sondern nur für jeweils eine Ebene gelöst werden müssen. Schwierig ist die Berücksichtigung von stromabwärts auf das Fluid wirkenden Einflüssen, da diese durch die schrittweise Berechnung keine Rückwirkung stromaufwärts haben. Eine Lösungsmöglichkeit hierfür besteht darin, das gesamte dreidimensionale Druckfeld durch wiederholte schrittweise Durchrechnung des Lösungsgebietes so lange zu korrigieren, bis die Bewegungs- und die Kontinuitätsgleichung erfüllt sind.

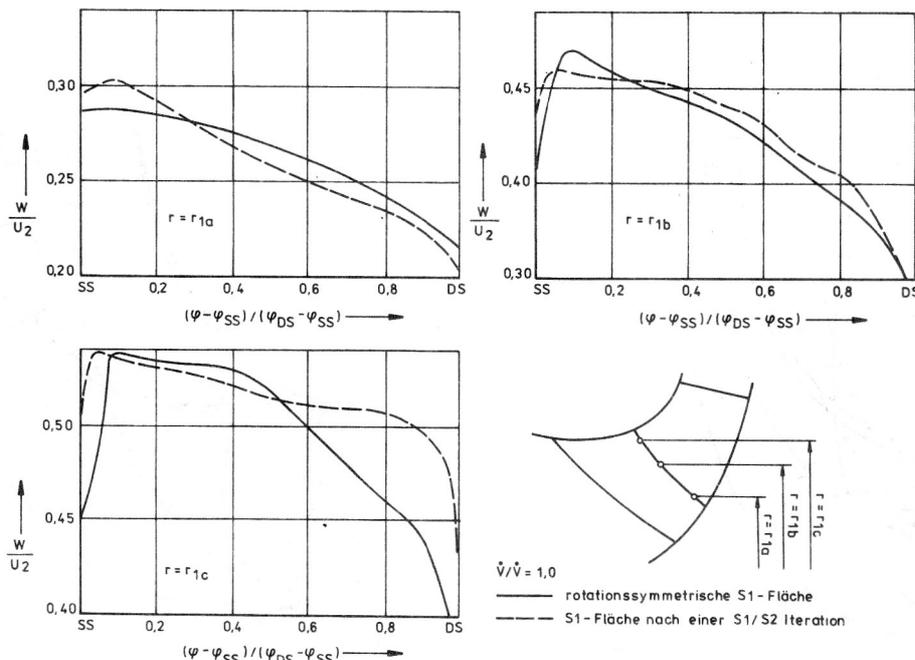
Mit der Durchrechnung der Kernströmung lassen sich jedoch die Einflüsse der Grenzschichten, Sekundärströmungen, Ablösungen u. a. nicht erfassen. Ein vielfach erfolgreich beschrittener Weg zur Erfassung der Reibungsverluste ist die getrennte Behandlung der Reibungseffekte und die Verbindung mit der reibungsfreien Rechnung. Neben vorzugebenden Verlustkoeffizienten und -korrelationen auf der Basis von Messungen kommt dabei der Berechnung der Grenzschichten zur Erfassung der Reibung an den Kanalwänden eine besondere Bedeutung zu [22]. Eine Berechnung der Grenzschichten erweist sich als numerisch wesentlich weniger aufwendig als die direkte Berechnung der reibungsbehafteten Strömung.

Die Ursachen und die Bedeutung der Sekundärströmung sowie der Einfluß der Grenzschicht auf die Kernströmung in den Laufradkanälen von Turbopumpen wird in [23] analysiert. Es werden Möglichkeiten zur Berechnung dargestellt.

## 5. Anwendungsmöglichkeiten der quasidreidimensionalen Näherung

Wie bereits dargestellt, muß zur Erfassung dreidimensionaler Strömungseffekte bei der Anwendung eines Stromflächenverfahrens die gegenseitige Abhängigkeit beider Stromflächen beachtet werden. Der Aufwand für die dazu notwendige Iteration wird aber wesentlich dadurch beeinflusst, ob die Stromfläche 1. Art (S1) als rotationssymmetrisch oder nichtrotationssymmetrisch behandelt wird. Für Radialräder mit kleinen Verhältnissen  $b/d$  (Laufradbreite/Laufradaußendurchmesser) ist es vertretbar, auf einer rotationssymmetrischen S1 zu rechnen [24]. Bei der Behandlung von axialen oder diagonalen Laufrädern sowie des Eintrittsbereiches von Radialrädern kann jedoch die Annahme rotationssymmetrischer Flächen vor allem bei kompressiblen Fluiden zu Fehlern führen. Hier ist zur Erfassung der dreidimensionalen Effekte eine Rechnung auf nichtrotationssymmetrischen Flächen notwendig, wodurch jedoch der Aufwand (Rechenzeit) durch die S1/S2-Iteration beträchtlich anwächst.

Um die Notwendigkeit der S1/S2-Iteration zu überprüfen, wurden in [25] Vergleichsrechnungen durchgeführt. Dazu wurden für drei Laufräder (zwei Radialräder und ein Diagonalrad) bei gleichen Eingabedaten Rechnungen auf rotationssymmetrischen und den sich nach einer S1/S2-Iteration ergebenden nichtrotationssymmetrischen Flächen durchgeführt. Die Ergebnisse wurden für  $r = \text{konst}$  und  $z = \text{konst}$  zwischen der Saug- und der Druckseite des Strömungskanals interpoliert. Damit konnten eindeutig die Veränderungen in den Geschwindigkeitsverläufen nach einer S1/S2-Iteration bestimmt werden.



**Bild 3**

Verlauf der Relativgeschwindigkeit im Schaufelkanal entsprechend Berechnung auf der rotationssymmetrischen S1 und der S1 nach einer S1/S2-Iteration

Für das Diagonalrad sind die Ergebnisse auszugsweise im Bild 3 dargestellt. Wie das Bild zeigt, werden die Unterschiede zwischen beiden Rechnungen in Richtung zur Deckscheibe und Druckseite größer, d. h., hier gibt es die größten Veränderungen in der Lage der Stromflächen.

Für die beiden Radialräder konnten keine großen Veränderungen der Lage der Stromflächen ermittelt werden. Die Abweichungen waren so klein, daß sie in den üblichen Darstellungsmaßstäben nicht erkennbar sind.

Die durchgeführten Vergleichsrechnungen bestätigen Aussagen der Literatur, daß bei Radialrädern mit kleinen Verhältnissen Laufradbreite/Laufradaußendurchmesser eine Rechnung auf rotationssymmetrischen Flächen vertretbar ist. Jedoch treten bereits beim inkompressiblen Fluid für Diagonalräder nach der ersten S1/S2-Iteration solche Lageänderungen der S1 auf, daß eine Rechnung auf rotationssymmetrischen Flächen zu größeren Fehlern führen kann.

Die durchgeführten Variantenuntersuchungen lassen die Schlußfolgerung zu, daß zur Berechnung von Radialrädern Programme angewendet werden sollten, die sich auf die Behandlung rotationssymmetrischer Flächen beschränken (z. B. GEMIF [18], GISTRO 3R [20]), da diese weniger Rechenzeit und Speicherplatz erfordern. Werden jedoch Diagonal- oder Axialräder behandelt, muß eine vollständige Durchrechnung unter Einbeziehung nichtrotationssymmetrischer Flächen angestrebt werden, was beispielsweise mit dem Programm Q3DLS1 [17] möglich ist. Offensichtlich sind alle Näherungen mit mehr oder weniger einschneidenden Unzulänglichkeiten verbunden. Deshalb besteht in der weiteren Entwicklung das Ziel in der numerischen Lösung der kompletten Bewegungsgleichung auf der Basis aussagefähiger Turbulenzmodelle.

## LITERATUR

- [ 1 ] Mahn, U.: Erfahrungen beim praktischen Einsatz von CAD-Systemen in Entwicklung und Konstruktion. Maschinenbautechnik, Berlin 37 (1988) 8, 360 – 362.
- [ 2 ] Kosmowski, I., Prager, R.: Anforderungen der Entwicklung und des Einsatzes von Pumpen und Verdichtern. Maschinenbautechnik, Berlin 25 (1986) 6, 247 – 251.
- [ 3 ] Voetter, M.: Beiträge zur numerischen Berechnung des räumlichen Strömungsfeldes in hydraulischen Turbomaschinen. Dissertation, TH München 1968.
- [ 4 ] Bammert, K. et al: Berechnung der Potential- und Druckverteilung beliebiger Schaufelgitter von Turbomaschinen mit Hilfe konformer Abbildungen. Arch. Eisenhüttenwesen 36 (1965), 75 – 86.
- [ 5 ] Koch, E.: Berechnung der ebenen inkompressiblen Potentialströmung durch gerade Schaufelgitter. VDI-Forschungsheft 528 (1968).
- [ 6 ] Gostelow, J. P.: Potential Flow through Cascades – a Comparison between Exakt and Approximate Solutions. ARC CP 807 (1965).
- [ 7 ] Schilling, R. et al: Leistungsfähigkeit von Verfahren der Strömungsrechnung zur Beurteilung der Kavitation von Axialpumpen und Vergleich mit Modellversuchen. Pumpentagung Karlsruhe, 1984.
- [ 8 ] Martensen, E.: Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholm'schen Integralgleichung. Arch. Ration. Mech. Analys. 3 (1959), 235 – 270.

- [ 9 ] Imbach, H. E.: Die Berechnung der kompressiblen, reibungsfreien Unterschallströmung durch räumliche Gitter auch großer Dicke und starker Wölbung. Dissertation, ETH Zürich 1964.
- [ 10 ] Schwering, W.: Beitrag zur Berechnung von ebenen, geraden Schaufelgittern in inkompressibler, reibungsfreier Potentialströmung. Dissertation, RWTH Aachen, 1969.
- [ 11 ] Lewis, R. I.: The Vorticity Method – a Natural Approach to Flow Modelling. Proc. of the International Seminar on Engineering Applications of the Vorticity Methods, Wroclaw (1986) part 1, 3 – 36.
- [ 12 ] Xia, Y.: Programm zur Berechnung der quasidreidimensionalen Strömung durch Diagonalventilatoren. Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen, Karlsruhe 39 (1988), 175 – 182.
- [ 13 ] Schilling, R. et al: Anwendung numerischer Methoden in der hydraulischen Forschung und Entwicklung. Voith Forschung und Konstruktion (1984) 30, 4.1. – 4.9.
- [ 14 ] Koller, A.: Berechnung der verwirbelten Strömung in der rotierenden Kreiselpumpe. Siemens F/E-Berichte 13 (1984) 1, 38 – 42.
- [ 15 ] Schädlér, G.: Berechnung der zweidimensionalen turbulenten Strömung durch rotierende Radialgitter. Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen, Karlsruhe 36 (1985), 1 – 24.
- [ 16 ] Wu, Ch.-H.: A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomaschinen of Axial- and Mixed-Flow Types. Trans. ASME 74 (1952).
- [ 17 ] Jäger, N.: Das Programmsystem Q3DLS1 zur quasidreidimensionalen Berechnung der Laufradströmung von Turbopumpen. 6. Symposium Pumpen und Verdichter Magdeburg, 1989.
- [ 18 ] Schütte, V.: GEMIF – Programm zur Berechnung reiner und gasbeladener Flüssigkeitsströmungen in Laufradkanälen von Turbopumpen. 6. Symposium Pumpen und Verdichter Magdeburg, 1989.
- [ 19 ] Kosmowski, I., Schütte, V., Jäger, N.: Vergleich zwischen einem Matrix- und einem Stromlinienkrümmungsverfahren bei gleicher Laufradgeometrie. Pumpentagung Karlsruhe, 1988.
- [ 20 ] Fister, W. et al: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Rückführkanälen hydraulischer Strömungsmaschinen. VDI-Berichte 424 (1981).
- [ 21 ] Pratap, V. S., Spalding, D. B.: Fluid Flow and Heat Transfer in Three-Dimensional Duct Flow. Int. J. of Heat and Mass Transfer 19 (1976), 11893 – 1188.
- [ 22 ] Will, G.: Die Anwendung des Kernströmungsgrenzschichtmodells auf Schaufelgitter von Turbomaschinen. Dissertation B, TU Dresden 1989.
- [ 23 ] Schütte, V.: Modellierung von Laufradströmungen unter besonderer Beachtung der Sekundärströmungen. Technische Mechanik, Magdeburg 9 (1988) 4, 291 – 294.
- [ 24 ] Vavra, N. H.: Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomaschinen. New York/London Wiley 1960.
- [ 25 ] Jäger, N.: Quasidreidimensionale Berechnung der Laufradströmung von Turbopumpen unter Berücksichtigung nichtrotationssymmetrischer S1-Stromflächen und der Reibung. Dissertation A, TU Magdeburg 1989.
- [ 26 ] Programm MH291 "GISTRO3R" (Version Febr. 1988) VEB KPV-WTZ Halle.

### Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Ingo Kosmowski  
 Dr.-Ing. Norbert Jäger  
 TU „Otto von Guericke“ Magdeburg  
 Sektion Dieselmotoren, Pumpen und Verdichter  
 PSF 124  
 Magdeburg  
 3 0 1 0