

# Nichtlineare Verformung von dickwandigen Schalen mit rechteckigem Grundriß aus Werkstoffen, deren Eigenschaften von der Belastungsrichtung abhängig sind

Jurij S. Kozmin, Aleksandr A. Zoločevskij

## 0. Einleitung

Die Untersuchung der nichtlinearen Eigenschaften von Werkstoffen bei verschiedenen Belastungsbedingungen ist eine der aktuellen Forschungsrichtungen in der Festkörpermechanik. Dabei spielt eine besondere Rolle die Formulierung und Begründung entsprechender Theorien für das Verformungs- und Bruchverhalten bei belastungsabhängigen Werkstoffeigenschaften. Beispiele für entsprechende Materialien sind insbesondere Geomaterialien, aber auch Konstruktionswerkstoffe: hochfeste Stähle, Grauguß, leichte Legierungen, Graphit, Betone, Polymere und polymere Komposite, Keramikwerkstoffe u. a. Die belastungsabhängigen Eigenschaften dieser Werkstoffe treten bei unterschiedlichen physikalischen Zuständen auf: Elastizität, Plastizität, Kriechen, Bruch. Die Belastungsabhängigkeit kann dabei noch von Anisotropie überlagert werden.

Die Formulierungsmöglichkeiten von konstitutiven Gleichungen für Werkstoffe mit belastungsabhängigen Eigenschaften wurden von verschiedenen Autoren untersucht. Der aktuelle Stand der Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet kann beispielsweise den Arbeiten [1] bis [4] entnommen werden. Relativ selten findet man Arbeiten, die der Berechnung von Konstruktionen aus solchen Werkstoffen gewidmet sind.

Verschiedene Konstruktionselemente moderner Maschinen lassen sich als Schalen und Platten mit rechteckigem Grundriß modellieren. Nachfolgend wird sich auf die Betrachtung des nichtlinearen Deformationsverhaltens solcher Konstruktionselemente aus Werkstoffen mit belastungsabhängigen Eigenschaften beschränkt. Die zu dieser Problematik erschienenen Publikationen ([5] bis [18]) lassen einige Fragen offen. Die entsprechenden Untersuchungen gehen nicht von einer räumlichen Formulierung aus, sondern beruhen auf kinematischen Hypothesen, auf deren Grundlage die dreidimensionale Aufgabe in eine zweidimensionale überführt wird. Außerdem werden (bis auf wenige Ausnahmen) physikalische Beziehungen verwendet, die nicht auf den realen Verformungsdiagrammen beruhen, sondern auf entsprechenden abschnittsweise-linearen Approximationen bei Zug und Druck.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, die Formulierung, die Lösungsmethodik und Ergebnisse dreidimensionaler Randwertaufgaben für das nichtlineare elastische Verhalten dickwandiger Schalen und Platten mit rechteckigem Grundriß aus Werkstoffen mit belastungsabhängigen Eigenschaften darzulegen.

## 1. Physikalische Beziehungen

Auf Bild 1 ist das Verformungsdiagramm bei Zug (1) und Druck (2) von Grauguß G30 [19] dargestellt. Das Verhalten dieses Werkstoffs ist typisch für die hier betrachtete Werkstoffklasse. Es konnte festgestellt werden, daß dieser Grauguß über gleiche elastische Charakteristika bei Zug und Druck auf den Anfangsabschnitten der Deformationsdiagramme verfügt. Hinter der Proportionalitätsgrenze werden die Unterschiede bei Zug und Druck in den Diagrammen wesentlich. Analoge Zusammenhänge gelten auch für andere Werkstoffe [20] bis [22].

Die entsprechenden konstitutiven Gleichungen lassen sich für diese Werkstoffe wie folgt formulieren. Die Komponenten des Verzerrungstensors  $\epsilon_{ij}$  setzen sich aus einem linearen ( $e_{ij}$ ) und einem nichtlinearen ( $\epsilon_{ij}^*$ ) Anteil zusammen

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \epsilon_{ij}^* \quad (1.1)$$

Die Komponenten  $e_{ij}$  lassen sich über das verallgemeinerte Hookesche Gesetz bestimmen

$$e_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (1.2)$$

Die Komponenten des Tensors  $\epsilon_{ij}^*$  sind mit den Komponenten des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  über folgende tensorielle Gleichung [1] verbunden

$$\epsilon_{ij}^* = \sigma_e^N (A_{ijkl} \sigma_{kl} / \sigma_0 + B_{ij}) \quad (1.3)$$

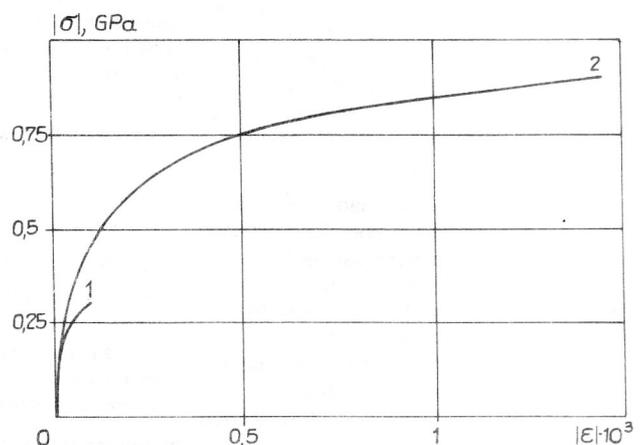


Bild 1  
 Deformationsdiagramm für Gußeisen bei Zug und Druck

Dabei bedeuten

$$\sigma_e = \sigma_0 + \sigma$$

$$\sigma_0^2 = A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

$$\sigma = B_{ij} \sigma_{ij}$$

Die Summation erfolgt entsprechend der Einsteinschen Konvention über sich wiederholende Indizes; die Indizes können die Werte 1, 2, 3 annehmen.  $A_{ijkl}$ ,  $a_{ijkl}$ ,  $B_{ij}$  sind Tensoren, die die Werkstoffkennwerte enthalten,  $N$  ist eine Konstante. Die Gln. (1.1) – (1.3) gelten für anisotrope Werkstoffe.

Bei kleinem Belastungsniveau arbeitet der Werkstoff unterhalb der Proportionalitätsgrenze; folglich ist  $\varepsilon_{ij}^* \ll e_{ij}$  und  $\varepsilon_{ij} \approx e_{ij}$ . Damit muß der Elastizitätsmodul bei Zug gleich dem bei Druck sein. Bei höherem Belastungsniveau gilt  $\varepsilon_{ij}^* > e_{ij}$ ; folglich wird die Deformation nichtlinear und belastungsabhängig.

## 2. Formulierung der Randwertaufgabe

Betrachtet werden dicke Schalen mit rechteckigem Grundriß. Die Beschreibung erfolgt mit Hilfe der orthogonalen krummlinigen Koordinaten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Die Rechteckseiten sind  $a$  und  $b$ . Damit kann man annehmen [23], daß die innere Geometrie der Koordinatenfläche mit der Geometrie der Ebenen zusammenfällt und sich jeder beliebige Punkt der Schale mit den kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  beschreiben läßt. Für die Laméschen Parameter erhält man damit

$$H_1 = 1 + K_1 z, \quad H_2 = 1 + K_2 z, \quad H_3 = 1 \quad (2.1)$$

$K_1, K_2 = \text{konst}$  – Hauptkrümmungen der Schale

Unter Einbeziehung dieser Annahmen kann man die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in kartesischen Koordinaten wie folgt formulieren

$$\begin{aligned} (H_2 \sigma_x)_{,x} + (H_1 \tau_{xy})_{,y} + (H_1 H_2 \tau_{xz})_{,z} \\ + K_1 H_2 \tau_{xz} + H_1 H_2 F_x &= 0 \\ (H_1 \sigma_y)_{,y} + (H_2 \tau_{xy})_{,x} + (H_1 H_2 \tau_{yz})_{,z} \\ + K_2 H_1 \tau_{yz} + H_1 H_2 F_y &= 0 \\ (H_1 H_2 \sigma_z)_{,z} + (H_2 \tau_{xz})_{,x} + (H_1 \tau_{yz})_{,y} \\ - K_1 H_2 \sigma_x - K_2 H_1 \sigma_y + H_1 H_2 F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei sind  $F_x, F_y, F_z$  die entsprechenden Volumenkräfte und  $( )_{,i}$  stellt die Ableitung nach der Koordinate  $i$  dar ( $i = x, y, z$ ).

b) geometrische Beziehungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x}/H_1 + K_1/H_1 w \\ \varepsilon_y &= v_{,y}/H_2 + K_2/H_2 w \\ \varepsilon_z &= w_{,z} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xy} = H_1/H_2 (u/H_1)_{,y} + H_2/H_1 (v/H_2)_{,x} \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xz} = 1/H_1 w_{,x} + H_1 (u/H_1)_{,z}$$

$$\gamma_{yz} = H_2 (v/H_2)_{,z} + 1/H_2 w_{,y}$$

$u, v, w$  sind die Verschiebungen in den Richtungen  $x, y, z$ .

Die Schalen sollen aus anisotropem Werkstoff mit belastungsabhängigen Eigenschaften bestehen. Folglich kann man die konstitutiven Gleichungen (1.1) – (1.3) verwenden. Dabei ist es günstiger, den Materialtensor 4. Stufe  $a_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ) durch einen Tensor der Stufe 2  $a_{st}$  ( $s, t = 1, \dots, 6$ ) zu ersetzen. Unter der Voraussetzung der Symmetrie der entsprechenden Tensoren lassen sich die konstitutiven Beziehungen (1.1)–(1.3) wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{23} \sigma_z + \varepsilon_y^* \\ \varepsilon_z &= a_{13} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + a_{33} \sigma_z + \varepsilon_z^* \\ \gamma_{xy} &= a_{66} \tau_{xy} + \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{xz} &= a_{55} \tau_{xz} + \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz} &= a_{44} \tau_{yz} + \gamma_{yz}^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die nichtlinearen Komponenten in Gl. (2.4) werden aus den folgenden Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \sigma_e^N [A_{1111} \sigma_x + A_{1122} \sigma_y + A_{1133} \sigma_z] / \sigma_0 + B_{11} \\ \varepsilon_y^* &= \sigma_e^N [A_{2211} \sigma_x + A_{2222} \sigma_y + A_{2233} \sigma_z] / \sigma_0 + B_{22} \\ \varepsilon_z^* &= \sigma_e^N [A_{3311} \sigma_x + A_{3322} \sigma_y + A_{3333} \sigma_z] / \sigma_0 + B_{33} \\ \gamma_{xy}^* &= 4 \sigma_e^N A_{1212} \tau_{xy} / \sigma_0 \\ \gamma_{xz}^* &= 4 \sigma_e^N A_{1313} \tau_{xz} / \sigma_0 \\ \gamma_{yz}^* &= 4 \sigma_e^N A_{2323} \tau_{yz} / \sigma_0 \end{aligned}$$

Dabei bedeuten

$$\begin{aligned} \sigma &= B_{11} \sigma_x + B_{22} \sigma_y + B_{33} \sigma_z \\ \sigma_0^2 &= A_{1111} \sigma_x^2 + A_{2222} \sigma_y^2 + A_{3333} \sigma_z^2 \\ &\quad + 2A_{1133} \sigma_x \sigma_z + 2A_{2233} \sigma_y \sigma_z + 2A_{1122} \sigma_x \sigma_y \\ &\quad + 4A_{1212} \tau_{xy}^2 + 4A_{1313} \tau_{xz}^2 + 4A_{2323} \tau_{yz}^2 \\ \sigma_e &= \sigma + \sigma_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Das Gleichungssystem (2.2), (2.3) und (2.4) läßt sich in folgende Form überführen

$$\begin{aligned} \sigma_{z,z} &= -(K_2/H_2 + K_1/H_1) \sigma_z - (1/H_1) \tau_{xz,x} - (1/H_2) \tau_{yz,y} \\ &\quad + (K_1/H_1) \sigma_x + (K_2/H_2) \sigma_y - F_z \\ \tau_{xz,z} &= -(2K_1/H_1 + K_2/H_2) \tau_{xz} - (1/H_1) \sigma_{x,x} \\ &\quad - (1/H_2) \tau_{xy,y} - F_x \\ \tau_{yz,z} &= -(K_1/H_1 + 2K_2/H_2) \tau_{yz} - (1/H_2) \sigma_{y,y} \\ &\quad - (1/H_1) \tau_{xy,x} - F_y \\ w_{,z} &= \varepsilon_z \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$u_{,z} = \gamma_{xz} - (1/H_1) w_{,x} + (K_1/H_1) u$$

$$v_{,z} = \gamma_{yz} - (1/H_2) w_{,y} + (K_2/H_2) v$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (1/H_1) u_{,x} + (K_1/H_1) w \\ \varepsilon_y &= (1/H_2) v_{,y} + (K_2/H_2) w \\ \gamma_{xz} &= a_{55} \tau_{xz} + \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz} &= a_{44} \tau_{yz} + \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{xy} &= (H_1/H_2) (u/H_1)_{,y} + (H_2/H_1) (v/H_2)_{,x} \\ \tau_{xy} &= (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*) / a_{66} \\ \Delta &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= [(\epsilon_x - a_{13}\sigma_z - \epsilon_x^*)a_{22} - (\epsilon_y - a_{23}\sigma_z - \epsilon_y^*)a_{12}]/\Delta \\ \sigma_y &= [(\epsilon_y - a_{23}\sigma_z - \epsilon_y^*)a_{11} - (\epsilon_x - a_{13}\sigma_z - \epsilon_x^*)a_{12}]/\Delta \\ \epsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + \epsilon_z^*\end{aligned}$$

### 3. Separation der Variablen in der Randwertaufgabe

Folgende Variante der Randbedingungen läßt eine Separation der Variablen im Gleichungssystem (2.9), (2.10) zu

$$\begin{aligned}\sigma_x = w = v = 0 \quad \text{für } x = 0, a \\ \sigma_y = w = v = 0 \quad \text{für } y = 0, b\end{aligned} \quad (3.1)$$

Damit können die partiellen Differentialgleichungen der dreidimensionalen Randwertaufgabe in eine Reihe von eindimensionalen Aufgaben überführt werden. Die Randbedingungen (3.1) entsprechen dem Fall der gelenkigen Lagerung in der Theorie dünner Schalen.

Den Randbedingungen (3.1) kann man mit folgenden Ansatzfunktionen genügen

$$\begin{aligned}X(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(z) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \\ Y(x, y, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(z) \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y \\ \Phi(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{mn}(z) \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y \\ \Psi(x, y, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{mn}(z) \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y\end{aligned} \quad (3.2)$$

mit

$$\begin{aligned}\lambda_m &= m\pi/a, \quad \lambda_n = n\pi/b \\ X &= \{ \sigma_z, \sigma_x, \sigma_y, w, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, F_z, \epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \epsilon_z^* \} \\ Y &= \{ u, \tau_{xz}, F_x, \gamma_{xz}, \gamma_{xz}^* \} \\ \Phi &= \{ v, \tau_{yz}, F_y, \gamma_{yz}, \gamma_{yz}^* \} \\ \Psi &= \{ \tau_{xy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xy}^* \}\end{aligned} \quad (3.3)$$

Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned}y_1 = \sigma_z^{mn}, \quad y_2 = \tau_{xz}^{mn}, \quad y_3 = \tau_{yz}^{mn}, \\ y_4 = w^{mn}, \quad y_5 = u^{mn}, \quad y_6 = v^{mn}\end{aligned} \quad (3.4)$$

erhält man für jedes Indexpaar  $m = 1, 2, 3, \dots$  und  $n = 1, 2, 3, \dots$  aus den Gleichungen (2.9), (2.10) ein System von 6 gewöhnlichen inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned}y_{1,z} &= -(K_1/H_1 + K_2/H_2)y_1 + \lambda_m y_2/H_1 \\ &\quad + \lambda_n y_3/H_2 + (K_1/H_1)\sigma_x^{mn} + (K_2/H_2)\sigma_y^{mn} - F_z^{mn} \\ y_{2,z} &= -(2K_1/H_1 + K_2/H_2)y_2 - (\lambda_m/H_1)\sigma_x^{mn} \\ &\quad + (\lambda_n/H_2)\tau_{xy}^{mn} - F_x^{mn} \\ y_{3,z} &= -(K_1/H_1 + 2K_2/H_2)y_3 + (\lambda_m/H_1)\tau_{xn}^{mn} \\ &\quad - (\lambda_n/H_2)\sigma_y^{mn} - F_y^{mn} \\ y_{4,z} &= \epsilon_z^{mn} \\ y_{5,z} &= \gamma_{xz}^{mn} - (\lambda_m/H_1)y_4 + (K_1/H_1)y_5 \\ y_{6,z} &= \gamma_{yz}^{mn} - (\lambda_n/H_2)y_4 + (K_2/H_2)y_6\end{aligned} \quad (3.5)$$

mit

$$\begin{aligned}\epsilon_x^{mn} &= -(\lambda_m/H_1)y_5 + (K_1/H_1)y_4 \\ \epsilon_y^{mn} &= -(\lambda_n/H_2)y_6 + (K_2/H_2)y_4 \\ \gamma_{xy}^{mn} &= (\lambda_n/H_2)y_5 + (\lambda_m/H_1)y_6 \\ \Delta &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\ \sigma_x^{mn} &= [(\epsilon_x^{mn} - a_{13}y_1 - \epsilon_x^{*mn})a_{22} \\ &\quad - (\epsilon_y^{mn} - a_{23}y_1 - \epsilon_y^{*mn})a_{12}]/\Delta \\ \sigma_y^{mn} &= [(\epsilon_y^{mn} - a_{23}y_1 - \epsilon_y^{*mn})a_{11} \\ &\quad - (\epsilon_x^{mn} - a_{13}y_1 - \epsilon_x^{*mn})a_{12}]/\Delta \\ \epsilon_z^{mn} &= a_{13}\sigma_x^{mn} + a_{23}\sigma_y^{mn} + a_{33}y_1 + \epsilon_z^{*mn} \\ \gamma_{xz}^{mn} &= a_{55}y_2 + \gamma_{xz}^{*mn} \\ \gamma_{yz}^{mn} &= a_{44}y_3 + \gamma_{yz}^{*mn} \\ \tau_{xy}^{mn} &= (\gamma_{xy}^{mn} - \gamma_{xy}^{*mn})/a_{66}\end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Amplitudenwerte in den Gln. (3.6) werden als bekannt vorausgesetzt; sie lassen sich wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned}\epsilon_x^{*mn} &= (4/ab) \int_0^a \int_0^b \epsilon_x^{*mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \, dx dy \\ \epsilon_x^{*mn} &= (4/ab) \int_0^a \int_0^b \epsilon_y^{*mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \, dx dy \\ \epsilon_x^{*mn} &= (4/ab) \int_0^a \int_0^b \epsilon_z^{*mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \, dx dy \\ \gamma_{xy}^{*mn} &= (4/ab) \int_0^a \int_0^b \gamma_{xy}^{*mn} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y \, dx dy \\ \gamma_{xz}^{*mn} &= (4/ab) \int_0^a \int_0^b \gamma_{xz}^{*mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y \, dx dy \\ \gamma_{yz}^{*mn} &= (4/ab) \int_0^a \int_0^b \gamma_{yz}^{*mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y \, dx dy\end{aligned} \quad (3.7)$$

Wenn man den Differentialgleichungen (3.5), (3.6), (3.10) die entsprechenden Randbedingungen für  $z = h_1$  und  $z = h_2$  ( $z \in [h_1, h_2]$ ) hinzufügt, ist die Randwertaufgabe in eindimensionalen Gln. für die betrachtete Schale formuliert.

Die Trennung der Variablen für die Werte  $m = 0$ ,  $n > 0$  oder  $n = 0$ ,  $m > 0$  führt auf ein System von 2 gewöhnlichen inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\tau_{xz,z}^{0n} &= -(2K_1/H_1 + K_2/H_2)\tau_{xz}^{0n} + (\lambda_n/H_2)\tau_{xy}^{0n} - F_x^{0n} \\ u_{,z}^{0n} &= \gamma_{xz}^{0n} + (K_1/H_1)u^{0n}\end{aligned} \quad (3.8)$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^{0n} &= a_{55}\tau_{xz}^{0n} + \gamma_{xz}^{*0n} \\ \tau_{xy}^{0n} &= (\gamma_{xy}^{0n} - \gamma_{xy}^{*0n})/a_{66} \\ \gamma_{xy}^{0n} &= (\lambda_n/H_2)u^{0n}\end{aligned} \quad (3.9)$$

sowie

$$\begin{aligned}\tau_{yz,z}^{m0} &= -(K_1/H_1 + 2K_2/H_2)\tau_{yz}^{m0} + (\lambda_m/H_1)\tau_{xy}^{m0} - F_y^{m0} \\ v_{,z}^{m0} &= \gamma_{yz}^{m0} + (K_2/H_2)v^{m0}\end{aligned}\quad (3.10)$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_{yz}^{m0} &= a_{44}\tau_{yz}^{m0} + \gamma_{yz}^{*m0} \\ \tau_{xy}^{m0} &= (\gamma_{xy}^{m0} - \gamma_{xy}^{*m0})/a_{66} \\ \gamma_{xy}^{m0} &= (\lambda_m/H_1)u^{m0}\end{aligned}\quad (3.11)$$

## 4. Numerische Lösung

Die formulierte Randwertaufgabe ist physikalisch nichtlinear. Zur Linearisierung der Aufgabe wird die Methode der Parameterfortsetzung eingesetzt, wobei für den Parameter  $t \in [t_0, t]$  gilt. Als Parameter kann die Belastung (Volumen- oder Flächenlast) verwendet werden. Die Konkretisierung des Parameters sollte aufgabenbezogen sein.

Für den Fall, daß die Belastung von den kartesischen Koordinaten und  $t$  abhängt, kann man mit dem vorgeschlagenen Verfahren die Spannungen, Verformungen und Verschiebungen in der Konstruktion bei vorgegebener Belastung für den Maximalwert des Parameters  $t = t^*$  ermitteln. Als Anfangswert  $t = t_0$  wird die Schale mit Belastungen genommen, welche ein Verformungsverhalten des Werkstoffs im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie voraussetzt.

Zunächst wird die Randwertaufgabe zum linearen Verformungsverhalten der Schale bei  $t = t_0$  betrachtet. Diese wird auf der Grundlage der Beziehungen (3.5), (3.6), (3.8) bis (3.11) formuliert, wobei die nichtlinearen Anteile Null gesetzt werden. Die Amplitudenwerte der äußeren Belastungen werden in Analogie zu (3.7) ermittelt. Die lineare Randwertaufgabe wird mit dem numerisch stabilen Verfahren der diskreten Orthogonalisierung nach S. K. Godunov gelöst, wobei die Koeffizienten der trigonometrischen Doppelreihen (3.2) zu bestimmen sind. Anschließend wird entsprechend (3.2) summiert, wodurch man die gesuchten Funktionen für die Schale zum Zeitpunkt  $t = t_0$  erhält.

Die ermittelten Spannungen werden zur Berechnung der nichtlinearen Komponenten der Verformungen für den nächsten Wert des Parameters  $t > t_0$  sowie für die Doppelintegrale (3.7) nach der Integrationsformel von Gauss verwendet. Nachfolgend wird die Randwertaufgabe mit dem Verfahren von S. K. Godunov gelöst. Die Spannungen, Verformungen und Verschiebungen der Schale ergeben sich dann durch Summation nach (3.2). Die gefundenen Werte werden für die iterative Verbesserung der Lösung für den Parameter  $t$  verwendet. Als Abbruchkriterium wird ein Spannungskriterium für die Spannungen in zwei aufeinanderfolgenden Schritten gewählt, dessen Maximalwert darf eine vorgegebene Genauigkeit nicht überschreiten. Anschließend wird der Wert des Parameters  $t$  weiter erhöht. Dieser Prozeß wiederholt sich bis zum Erreichen des Endwertes  $t = t^*$ .

Das Schema der Diskretisierung nach den räumlichen Koordinaten und dem Parameter  $t$ , die Anzahl der Glieder in den Reihenentwicklungen (3.2), die Anzahl der Iterationen pro  $t$ -Wert werden durch numerische Experimente ermittelt. Der dargelegte Algorithmus wurde auf einem ESER-Rechner realisiert.

## 5. Berechnungsbeispiele

Als erstes Beispiel wird eine lineare Aufgabe über eine Rechteckplatte der Dicke  $h$  aus isotropem Material mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu = 0,3$  betrachtet. In der Ebene  $z = h/2$  wirken nur normalgerichtete Belastungen

$$\sigma_z^{h/2}(x, y) = -16q/(mn\pi^2)\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b),$$

die Ebene  $z = -h/2$  sei belastungsfrei. In Tabelle 1 sind die Werte für die Durchbiegungen  $w$  und die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y$  in der Plattenmitte bei  $z = -h/2, h/2$  für  $m = 1$ , für drei verschiedene  $n$ -Werte ( $n = 1, 3, 5$ ) und 2 verschiedene Dicken sowie Plattenabmessungen  $a$  und  $b$  angeführt. Die Ergebnisse der Rechnung fielen vollständig mit den in [23] angeführten zusammen. Diese wurden mit einem analogen Verfahren für lineare Aufgaben erhalten. In den Rechnungen wurden 10 Stützpunkte über die Plattendicke verwendet.

Als zweites Beispiel soll das nichtlineare elastische Verformungsverhalten einer quadratischen Platte mit den Maßen  $a = b = 0,1$  m, der Dicke  $h = 0,01$  m analysiert werden. Die Platte steht in der Ebene  $z = h/2$  unter der Einwirkung einer normalgerichteten Belastung

$$\sigma_z^{h/2}(x, y) = -q\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b)$$

und in der Ebene  $z = -h/2$  ist sie unbelastet. Das Plattenmaterial sei Grauguß C4 15-32. Dieser Werkstoff ist im elastischen Zustand isotrop [21]. Der Elastizitätsmodul beträgt  $E = 107$  GPa, die Querkontraktionszahl  $\nu = 0,22$ , die Konstanten in den Gln. (4.4) nehmen die Werte  $N = 4,4$  und  $r = 1/(n+1)$  an. Damit folgt

$$A_{1111} = A_{2222} = A_{3333} = 7,96 \cdot 10^{-(6N+4)r} \text{MPa}^{-2Nr}$$

$$A_{1122} = A_{2233} = A_{1133} = -4,34 \cdot 10^{-(6N+4)r}$$

$$A_{1212} = A_{1313} = A_{2323} = 6,15 \cdot 10^{-(6N+4)r} \text{MPa}^{-2Nr}$$

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = 7,49 \cdot 10^{-(4N+3)r} \text{MPa}^{-Nr}$$

Bei der numerischen Lösung wurden die unendlichen Summen (3.2) durch endliche ersetzt, wobei  $m = 1, \dots, m^*$ ,  $n = 1, \dots, n^*$  gilt. Über die Plattendicke wurden 10 Orthogonalisierungspunkte angenommen. Beim Berechnen der Integrale (3.7) wurden die Intervalle  $[0, a]$  und  $[0, b]$  in  $m^*$  bzw.  $n^*$  Abschnitte unterteilt. In jedem Abschnitt wurde mit drei oder vier Gausspunkten gearbeitet.

Die Tabellen 2 und 3 zeigen den Einfluß der Auswahl der Größen  $m^*, n^*$  in den Reihen (3.2) auf die Berechnungsergebnisse für eine Platte bei einer Belastung von  $q = 8$  MPa. Die I bezieht sich auf  $m^* = n^* = 1$ , die II auf  $m^* = n^* = 3$ , die III auf  $m^* = n^* = 5$ ,  $\zeta = 2z/h$ . Die Linearisierung der Aufgabe erfolgte nur unter Verwendung der iterativen Lösungsverbesserung ohne Parameterveränderung. Als Anfangsnäherung diente die lineare Lösung für  $q = 8$  MPa. Danach wird so lange iteriert, bis die größte relative Abweichung in den Spannungen bei zwei aufeinanderfolgenden Näherungen nicht kleiner als eine vorgegebene Fehler-schranke  $\epsilon$  wird. Durch numerische Experimente wurde gezeigt, daß für  $\epsilon = 0,01$  im Fall I 16 Iterationen notwendig waren, im Fall II – 11 und im Fall III – 16. Aus den Tabellen 2 und 3 folgt die Begründung für die Auswahl der Werte  $m^* = n^* = 3$  in den Berechnungen. Alle nachfolgenden Ergebnisse wurden für diese Werte ermittelt.

**Tabelle 1**  
Ergebnisse der Lösung der linearen Aufgabe für Platten bei 2 Varianten der Abmessungen

z	wE/(qa)		$\sigma_x/q$		$\sigma_y/q$	
	b/a=1	b/a=2	b/a=1	b/a=2	b/a=1	b/b/a=2
	h/a=0,1		n = 1			
-h/2	-47,21	-119,2	32,33	68,08	32,33	34,83
h/2	-47,28	-119,2	-32,49	-68,19	-32,49	-35,23
	h/a=0,06		n = 1			
-h/2	-213,3	-543,3	89,18	188,6	89,18	96,5
h/2	-213,4	-543,3	-89,43	-188,7	-89,43	-96,9
	h/a=0,1		n = 3			
-h/2	-0,7188	-6,097	1,249	5,262	3,140	8,011
h/2	-0,7433	-6,121	-1,411	-5,382	-3,196	-8,072
	h/a=0,06		n = 3			
-h/2	-3,00	-27,16	3,414	14,53	8,581	22,11
h/2	-3,015	-27,18	-3,566	-14,64	-8,612	-22,17
	h/a=0,1		n = 5			
-h/2	-0,07742	-0,7865	0,2607	1,101	0,776	2,508
h/2	-0,09205	-0,8012	-0,375	-1,192	-0,8415	-2,538
	h/a=0,06		n = 5			
-h/2	-0,2925	-3,364	0,7064	3,019	2,103	6,879
h/2	-0,3014	-3,373	-0,8079	-3,106	-2,130	-6,899

Bild 2 zeigt die Konvergenz des Iterationsprozesses für die Spannungen  $\sigma_x$  in zwei Punkten der Platte ( $x = 0,5 a$ ,  $y = 0,5 b$ ,  $z = \pm 0,5 h$ ) bei  $q = 8$  MPa. Im Punkt  $z = 0,5 h$  wird der Maximalwert der Druckspannungen  $\sigma_x$  erreicht, im Punkt  $z = -0,5 h$  – das Maximum der Zugspannungen  $\sigma_x$ . Es wurden 3 Varianten der iterativen Lösung analysiert. Variante I verwendet als Anfangsnäherung die Lösung der linearen Aufgabe bei  $q = 8$  MPa, Variante II – die Lösung der nichtlinearen Aufgabe für  $q = 7,5$  MPa und Variante III – die Lösung der nichtlinearen Aufgabe bei  $q = 7,8$  MPa. Bei einer Genauigkeit von  $\epsilon = 0,01$  wurde die Konvergenz im Fall I bei 11 Iterationen erreicht, im Fall II und III – bei 9 Iterationen. Es sei angemerkt, daß für die Ermittlung der

Anfangsnäherungen in den Fällen II und III 11 Iterationen notwendig waren. Dabei war im Fall II die 0. Iteration die lineare Lösung für 7,5 MPa, im Fall III die lineare Lösung bei  $q = 7,8$  MPa. Folglich kann man feststellen, daß erstens unabhängig von der Linearisierungsmethode die gleichen Ergebnisse für  $q = 8$  MPa erreicht wurden und zweitens die Kombination mit dem Parameterfortsetzungsverfahren für  $t = q$  bis zum Wert  $q = 8$  MPa mit iterativen Verbesserungen der Lösungen bei jedem t-Wert (Variante II und III) zu einer wesentlichen Aufwandserhöhung im Vergleich zur Variante I führt. Ungeachtet dessen kann der Iterationsprozeß im Rahmen der Variante I bei großen q-Werten divergieren.

**Tabelle 2**

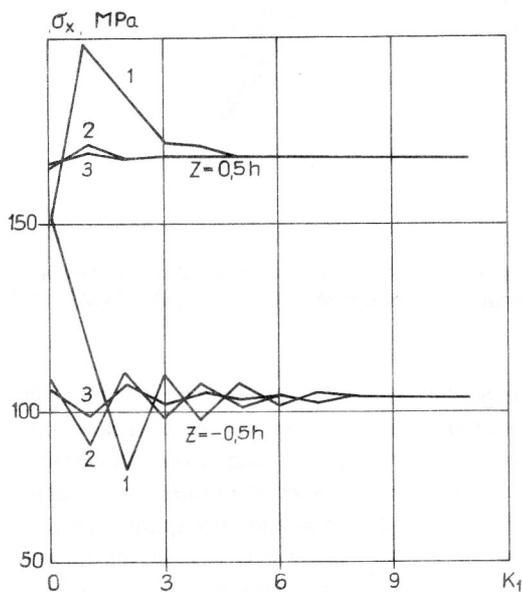
Verteilung der Spannung  $\sigma_x$  und Verschiebung  $w$  im Punkt  $y = 0,5b$ ,  $z = -h/2$  entlang der Koordinaten  $x$  bei einer Belastung  $q = 8 \text{ MPa}$

$x/a$	$\sigma_x$ , MPa			$w \cdot 10^5$ , m		
	I	II	III	I	II	III
0,1	34,1	43,3	43,3	-8,34	-7,90	-7,90
0,2	64,9	76,4	75,7	-15,9	-15,1	-15,1
0,3	89,3	95,0	93,7	-21,8	-20,9	-20,9
0,4	105	102	104	-25,7	-24,7	-24,7
0,5	110	103	107	-27,0	-26,0	-0,26

**Tabelle 3**

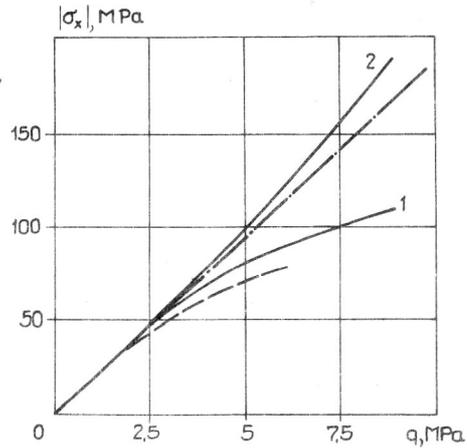
Spannungsverteilung über die Dicke  $\sigma_x$  und  $\sigma_\theta$  im Punkt  $x = 0,5a$ ,  $y = 0,5b$  für  $q = 8 \text{ MPa}$

$\zeta$	$\sigma_x$ , MPa			$\sigma_\theta \cdot 10^{-7}$ , MPa		
	I	II	III	I	II	III
-1	110	103	107	0,463	0,433	0,449
-0,5	78,9	78,5	77,5	0,333	0,331	0,327
0	9,05	10,9	10,7	0,0469	0,0533	0,0528
0,5	-79,6	-77,8	-77,8	0,0682	0,0670	0,0668
1	-171	-168	-168	0,172	0,169	0,168



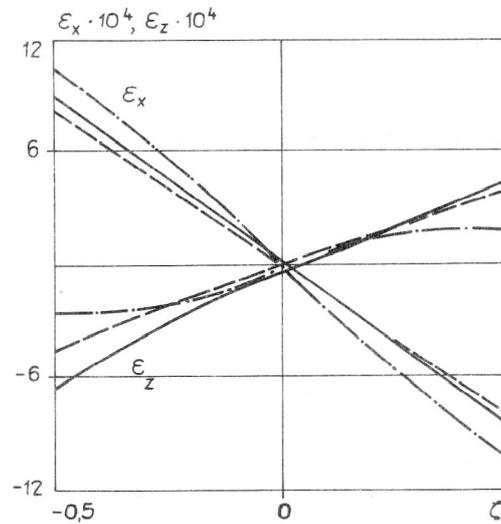
**Bild 2**

Abhängigkeit der Spannung in der Plattenmitte von der Anzahl der Iterationen bei  $q = 8 \text{ MPa}$



**Bild 3**

Abhängigkeit der Spannung in der Plattenmitte vom Amplitudenwert der Belastung



**Bild 4**

Verteilung der Deformationen über die Dicke in der Plattenmitte bei  $q = 6 \text{ MPa}$

Auf den Bildern 3 bis 8 sind mit Volllinien die Ergebnisse verschiedener Berechnungen für Platten aus Material, welches von der Belastungsrichtung abhängt, dargestellt. Zum Vergleich wurden Ergebnisse analoger Rechnungen, die auf der Grundlage anderer Modelle durchgeführt wurden, angegeben. Die Strich-Punkt-Linie gibt die lineare Rechnung an, die Punkt-Linie entspricht einer nichtlinearen elastischen Rechnung unter der Voraussetzung des identischen Zug-Druck-Verhaltens

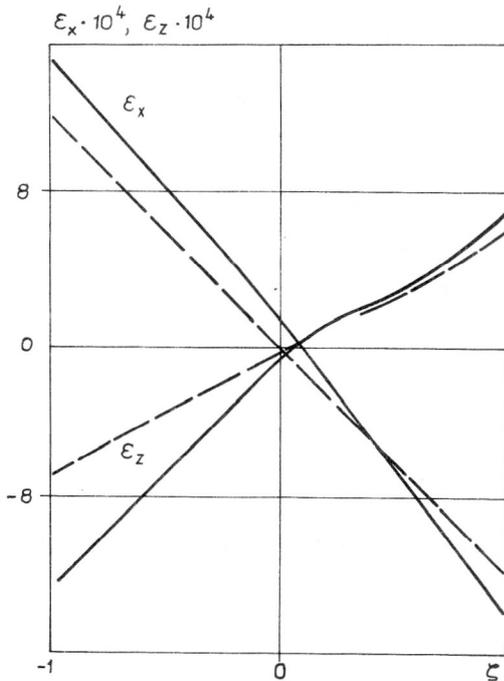
$$N = 4,4, \quad r = 1/(N+1)$$

$$A_{1111} = A_{2222} = A_{3333} = 1,28 \cdot 10^{-(3+2Nr)} \text{MPa}^{-2Nr}$$

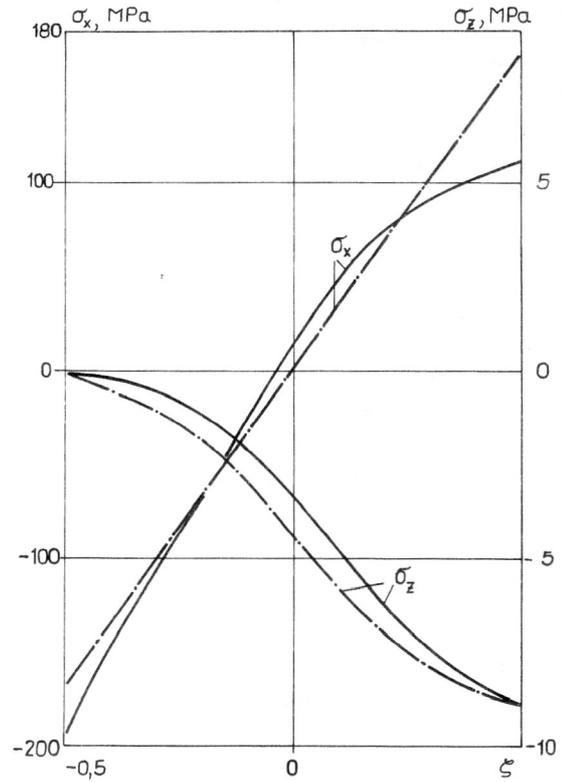
$$A_{1122} = A_{2233} = A_{1133} = 5,00 \cdot 10^{-(5+2Nr)}$$

$$A_{1212} = A_{1313} = A_{2323} = 6,15 \cdot 10^{-(4+2Nr)} \text{MPa}^{-2Nr}$$

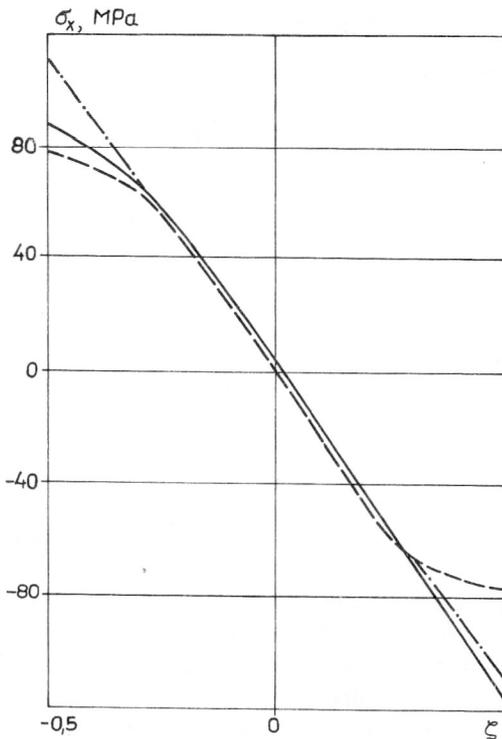
$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = 0$$



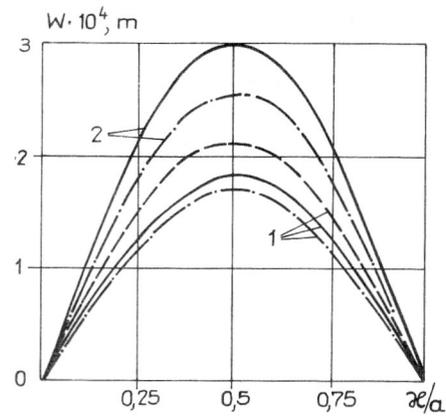
**Bild 5**  
Änderungen der Deformationen über die Dicke in der Plattenmitte bei  $q = 8,92 \text{ MPa}$



**Bild 7**  
Änderungen der Spannungen über die Dicke in der Plattenmitte bei  $q = 8,92 \text{ MPa}$

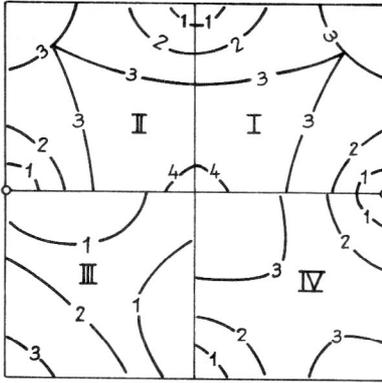


**Bild 6**  
Spannungsverteilung über die Dicke in der Plattenmitte bei  $q = 6 \text{ MPa}$



**Bild 8**  
Verteilung der Normalverschiebungen bei  $z = 0, y = b/2$  entlang der  $x$ -Koordinaten bei  $q = 6 \text{ MPa}$  (1) und  $q = 8,92 \text{ MPa}$  (2)

Aus Bild 3 folgt, daß der Einfluß der Belastungsrichtung in den wesentlichen Unterschieden der Absolutwerte der Spannungen für den Zug(1)- und Druck(2)-Bereich ( $z = \pm 0,5 h$ ) zum Ausdruck kommt. Komplizierte Effekte treten auch für die übrigen Parameter des Spannungs-Deformationszustandes der Platte auf. U. a. wirkt sich die Abhängigkeit von der Belastungsrichtung stärker auf die Dehnungen  $\epsilon_z$  als auf die Dehnungen  $\epsilon_x$  aus. Auf Bild 9 sind in den 4 Quadranten unterschiedliche Berechnungsergebnisse für die äquivalenten Spannungen  $\sigma_e$  angegeben. Die Quadranten I, II entsprechen einer Rechnung unter vor-



**Bild 9**  
 Isolinen  $\sigma_e \cdot 10^{-1-r} = \text{konst}$  bei  $q = 6 \text{ MPa}$  ( $[\sigma_e] = \text{MPa}$ )

ausgesetzter Belastungsrichtungsunabhängigkeit, III, IV bei Belastungsrichtungsabhängigkeit (I, IV –  $z = -0,5 h$ , II, III –  $z = 0,5 h$ ). Charakteristisch ist, daß die Ergebnisse für die Fälle I, II praktisch zusammenfallen, während die Fälle III, IV wesentliche Unterschiede aufweisen. In den Fällen I, II, IV wird das Maximum in der Plattenmitte erreicht, im Fall III im Eckpunkt.

Die Beispiele zeigen die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Belastungsrichtungsabhängigkeit bei Berechnungen von Konstruktionselementen aus Werkstoffen mit belastungsrichtungsabhängigem Verhalten in räumlicher Formulierung.

#### LITERATUR

- [1] Soločevskij, A., Konkin, V., Moračkovskij, O., Koczyk, S.: Eine Theorie zur nichtlinearen Verformung anisotroper Körper und ihre Anwendung auf die Berechnung des Kriechverhaltens dünner Schalen. – In: Technische Mechanik. – Magdeburg 6 (1985) 4. – S. 27 – 36.
- [2] Soločevskij, A. A.: Kriechen von Konstruktionselementen aus Materialien mit von der Belastung abhängigen Charakteristiken. – In: Technische Mechanik. – Magdeburg 9 (1988) 3. – S. 177 – 184.
- [3] Altenbach, H., Dankert, M., Soločevskij, A. A.: Konstitutive Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie auf der Grundlage von 3 Invarianten des Spannungstensors. – In: Technische Mechanik. – Magdeburg 10 (1989) 4. – S. 211 – 217.
- [4] Altenbach, H., Dankert, M., Soločevskij, A. A.: Anisotrope mathematisch-mechanische Modelle für Werkstoffe mit von der Belastung abhängigen Eigenschaften. – In: Technische Mechanik. – Magdeburg 11 (1990) 1. – S. 5 – 13.
- [5] Амбарцумян, С. А.: Разномодульная теория упругости. – Москва: Наука, 1982. – 320 с.
- [6] Бригадиров, Г. В.: Толоконников, Л. А.: Вариант построения разномодульной теории изгиба пластинок. – В: Сборник работ по теории упругости. – Тула: Тул ПИ, 1968. – с. 21 – 30.
- [7] Ломакин, Е. В., Гаспарян, Г. О.: Поперечный б згиб разномодульных пластин. – В: Механика композитных материалов. – Рига (1984) 1. – с. 67 – 73.
- [8] Трещев, А. А.: Поперечный изгиб прямоугольных пластин, выполненных из материалов, механические характеристики которых зависят от вида напряженного состояния. – В: Известия вузов. Строительство и архитектура. – Новосибирск: (1988) 1. – с. 25 – 29.

- [9] Петров, В. В., Макеев, А. Ф., Овчиников, И. Г.: Изгиб прямоугольных пластин из нелинейно-упругого разносопротивляющегося растяжению и сжатию материала. – В: Известия вузов. Строительство и архитектура. – Новосибирск: (1980) 8. – с. 42 – 47.
- [10] Bert, C. W., Reddy, V. S., Kincannon, S. K.: Deflection of thin rectangular plates of cross-plyed bimodulus material. – In: Journal of Structural Mechanics. – New York 8 (1980) 4. – p. 347 – 364.
- [11] Bert, C. W., Reddy, J. N., Reddy, V. S., Chao, W. C.: Bending of thick rectangular plates laminated of bimodulus composite materials. – In: AIAA Journal. – Easton 19 (1981) 10. – p. 1342 – 1349.
- [12] Bert, W. C., Reddy, V. S.: Cylindrical shells of bimodulus composite material. – In: Trans. ASCE. J. Eng. Mech. Div – New York 108 (1982) 5. – p. 675 – 688.
- [13] Reddy, J. N., Chao, W. C.: Finite-element analysis of laminated bimodulus composite material plates. – In: Computer and Structures. – New York 12 (1980) 2. – p. 245 – 251.
- [14] Reddy, J. N., Bert, C. W., Hsu, Y. S., Reddy, V. S.: Thermal bending of thick rectangular plates of bimodulus composites materials. – In: Institution of Mech. Engineers. Proc. Part C: Mechanical Engineering Science. – Suffolk 22 (1980) 6. – p. 297 – 304.
- [15] Reddy, J. N., Chao, W. C.: Nonlinear bending of bimodular-material plates. – In: Int. J. Solids Structures. – New York 19 (1983) 3. – p. 229 – 237.
- [16] Kamiya, N.: An energy method applied to large elastic deflection of a thin plate of bimodulus material. – In: Journal of Structural Mechanics. – New York 3 (1975) 3. – p. 317 – 329.
- [17] Venkatesh, A., Ramana Murthy, P. V., Rao, K. P.: Finite element analysis of bimodulus composite stiffened thin shells of revolution. – In: Computers and Structures. – New York 22 (1986) 1. – p. 13 – 24.
- [18] Turvey, G. J.: Study of the nonlinear elastic flexure of bimodular composite strips. – In: Fibre Science and Technology. – Barking 16 (1982) 2. – p. 121 – 147.
- [19] Nechtelberger, F.: Raumtemperaturkriechen und Spannungsabhängigkeit des E-Moduls von Graugußwerkstoffen. – In: Österr. Ing.- und Archit. Z. – Wien 130 (1985) 1. – S. 29 – 36.
- [20] Жуков, А. М.: Сопротивление некоторых материалов чистому растяжению и сжатию. – В: Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – Москва (1986) 4. – с. 197 – 202.
- [21] Паняев, В. А.: Экспериментальное исследование деформации серого чугуна. – В: Сложная деформация твердого тела. – Фрунзе: Илим, 1969. – с. 126 – 135.
- [22] Упитис, З. Т., Удрис, А. О.: Деформирование углепластика с перекрестным армированием  $45^\circ$  при плоском напряженном состоянии. – В: Механика композитных материалов. – Рига (1988) 5. – с. 852 – 861.
- [23] Григоренко, Я. М., Василенко, А. Т., Панкратова, Н. Д.: Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Киев: Виша школа, 1985. – 190 с.

#### Anschrift der Autoren:

к. т. н., доц. Александр Алексеевич Золочевский  
 инж. Юрий Семенович Козьмин  
 каф. „Динамика и прочность машин“  
 Харьковский политехнический институт им. В. И. Ленина  
 ул. Фрунзе, 21  
 310002 Харьков-2  
 СССР