

Numerische Simulation des stationären 2D- und 3D-Wärme- und Stofftransports mittels Stromliniendiffusion – FEM

G. Lube, D. Weiß

1. Einleitung

Wir betrachten die numerische Simulation von stationären Diffusions- und Konvektions-Reaktions-Vorgängen

$$(Lu)(x) := -\epsilon \operatorname{div}(a(x) \operatorname{grad} u) + b(x) \cdot \operatorname{grad} u + c(x) u = f(x) \text{ in } \Omega$$

$$u|_{\Gamma_1} = g_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_a} \right|_{\Gamma_2} = g_2(x), \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n_a} + h(x) [u - g_3(x)] \right|_{\Gamma_3} = 0$$

mit $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$

dem äußeren Normaleneinheitsvektor $n = (n_1, n_2, n_3)$ und

$$\frac{\partial u}{\partial n_a} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i$$

in einem beschränkten, zusammenhängenden Gebiet Ω des \mathbb{R}^3 . Hinsichtlich spezieller Beispiele verweisen wir z. B. auf [19]. Ferner entstehen Probleme (1) bei der iterativen Auflösung von gekoppelten Wärme-Stofftransport-Vorgängen (vgl. z. B. [4]).

Es wird eine robuste Finite-Element-Methode (FEM) angestrebt, die sowohl im diffusionsdominanten Grenzfall (etwa für die Poisson-Gleichung) als auch im konvektionsdominanten Fall (im Grenzfall $\epsilon = 0$ das reine Konvektion-Reaktion-Problem) gute Näherungswerte liefert. Als dazu geeignet haben sich in letzter Zeit stabilisierte Galerkin-Verfahren erwiesen, bei denen zur Standard-Galerkin-Variationsformulierung bestimmte Zusatzterme addiert werden. In diesen Zusatztermen wird der Defekt $Lu - f$ elementweise durch Testfunktionen der Form $\delta_\kappa b \cdot \nabla w_h$ (Stromliniendiffusion-FEM [8], [9], [13], [18]) bzw. SUPG ([7], [11]) oder $\delta_\kappa Lw_h$ (Galerkin/least squares [7], [10], [12]) geteilt.

An den angegebenen Literaturstellen findet man Aussagen für konforme FEM zur mathematischen Absicherung der Verfahren (Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität, Konvergenzaussagen). Besonders wertvoll sind lokale Fehlerabschätzungen außerhalb von Grenzschichtbereichen, die gleichmäßig bezüglich des Parameters ϵ gelten [13] bis [15], [18].

Gegenstand vorliegender Mitteilung ist der Test der Stromliniendiffusion-FEM an 3D-Modellaufgaben, insbesondere um Aussagen über die Wahl der Parameter δ_κ zu gewinnen.

Aus der Literatur (z. B. [6], [8], [9], [11], [16], [18], [20]) sind den Autoren nur 2D-Testrechnungen bekannt. Ferner werden stückweise lineare Ansatzfunktionen sowohl für konforme als auch nichtkonforme Tetraedervernetzungen untersucht. Erstmals konnte in [2], [3] für die Poisson-Gleichung die Voraussetzung abgeschwächt werden, daß Tetraeder der Vernetzung, die mehr als einen Punkt gemeinsam haben, sich in entsprechenden Kanten vollständig berühren müssen. Es zeigt sich, daß dieser Effekt mit gewisser Vorsicht auch im konvektionsdominanten Fall richtig bleibt.

2. Finite-Element-Methode

Die üblichen Galerkin-FEM (vergl. [1]) gehen von der Variationsformulierung der Aufgabe (1) aus:

$$\left. \begin{aligned} a(u, v) &= f(v) & \forall v \in V_0 \\ u - \tilde{g}_1 &\in V_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dabei ist V der Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ der Funktionen über Ω , deren (verallgemeinerte) Ableitungen quadratisch integrierbar sind, d. h.

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

und V_0 die Teilmenge von V von Funktionen, die auf Γ_1 verschwinden. \tilde{g}_1 ist eine glatte Fortsetzung der Randwerte g_1 auf Γ_1 in Ω .

Ferner bezeichnen

$$\begin{aligned} a(u, v) := & \epsilon \int_{\Omega} \sum_{ij=1}^3 a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \\ & + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u \right) v dx + \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_3} h(x) u v ds \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(v) := & \int_{\Omega} f(x) v dx + \epsilon \int_{\Gamma_3} h(x) g_3(x) v ds + \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_2} g_2(x) v ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Für die numerische Lösung von (1) bzw. (2) gehen wir von einer Zerlegung τ_h^* des Gebietes Ω in Superelemente (Hexaeder) K^* aus

$$\bar{\Omega} = \cup K^*, \quad K^* \in \tau_h,$$

wobei jedes Hexaeder im Normalfall wieder in fünf Tetraeder K zerlegt wird (vgl. Bild 1).

Bemerkung 1: Zur Anpassung an das Grundgebiet können dabei einzelne Superelemente entarten, wobei mehrere Tetraederecken zusammenfallen. Im Netz ist dabei praktisch der Übergang zwischen Superelementen mit vier bis acht Eckpunkten sinnvoll. Je nach Entartung wird dann ein Element K^* in bis zu vier Tetraeder zerlegt, so daß

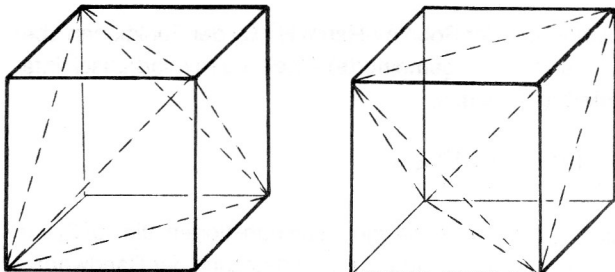
$$\bar{\Omega} = \cup K, \quad K \in \tau_h.$$

Bemerkung 2: Der ebene Fall wird dadurch als Spezialfall im 3D-Programm realisiert, daß man mit einer „Schicht“ von Superelementen rechnet und auf der Unter- sowie Oberseite der Schicht die Bedingung $\partial u / \partial n_a = 0$ stellt.

Wir unterscheiden zwei verschiedene Zerlegungen (vgl. Bild 1) und wählen stückweise lineare Ansatzfunktionen gemäß

$$V_h = \{v_h \in V_0 : v_h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \tau_h\}$$

(d. h. die Einschränkung aller v_h auf jedes einzelne Tetraeder ist ein Polynom 1. Grades).



Typ A

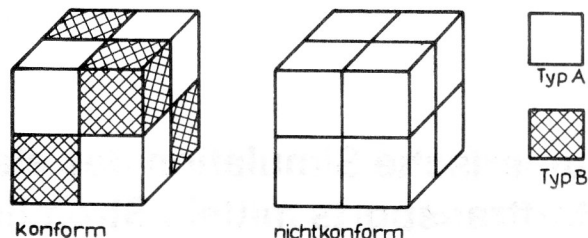
Typ B

Bild 1

Für konforme Verfahren, d. h. $V_h \subseteq V_0$ hat man die Stetigkeit aller Elemente von V_h zu sichern über die Annahmen

- Die Freiheitsgrade der Ansätze sind die Funktionswerte in den Eckpunkten. Funktionswerte benachbarter Tetraeder stimmen in den Eckpunkten überein.
- Zwei verschiedene Tetraeder mit gemeinsamen Eckpunkten haben entweder genau einen Eckpunkt oder genau eine Kante oder genau eine Tetraederfläche gemeinsam.

Diese Bedingungen gelten innerhalb der oben konstruierten Superelemente. Die Zusammensetzung gleichartiger Superelemente vom Typ A bzw. Typ B verletzt aber Forderung b), da die Diagonalen benachbarter Hexaeder (Tetraederkanten) sich kreuzen. Eine solche Vernetzung bezeichnen wir als nichtkonform (vgl. Bild 2). Für konforme



konform

nichtkonform

Bild 2

Varianten werden schachbrettartig räumlich abwechselnd Superelemente vom Typ A und B aneinandergesetzt (vgl. Bild 2).

Da die nichtkonformen Ansatzfunktionen nicht stetig sind, sind ihre Gradienten nicht integrierbar. Statt (2) – (4) betrachten wir das Näherungsproblem

$$a_0^h(u_h, v_h) = f_0^h \quad \forall v_h \in V_h \quad \left. \begin{array}{l} \\ u_h \in V_h \end{array} \right\} \quad (5)$$

mit

$$a_0^h(u, v) := \sum_{K^* \in \tau_h^*} \int_{K^*} [\epsilon \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + (\sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u) v] dx + \sum_{K^* \in \tau_h^*} \int_{\Gamma_3 \cap \partial K^*} \epsilon h u v ds \quad (6)$$

$$f_0^h(v) := \sum_{K^* \in \tau_h^*} \left[\int_{K^*} f v dx + \epsilon \int_{\Gamma_3 \cap \partial K^*} h g_3 v ds + \epsilon \int_{\Gamma_2 \cap \partial K^*} g_2 v ds \right]. \quad (7)$$

Die Stromliniendiffusion-Modifikation der Galerkin-Formulierung (5) – (7) besteht in der Addition eines gewichteten Defektermes:

$$a_\delta^h(u_h, v_h) = f_\delta^h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad \left. \begin{array}{l} \\ u_h \in V_h \end{array} \right\} \quad (8)$$

mit

$$a_\delta^h(u, v) := a_0^h(u, v) + \sum_{K^* \in \tau_n^*} \int_{K^*} (Lu) \delta_K(b \cdot \nabla v) dx \quad (9)$$

$$f_\delta^h(v) := f_0^h(v) + \sum_{K^* \in \tau_n^*} \int_{K^*} f \delta_K(b \cdot \nabla v) dx, \quad (10)$$

Das Problem (8) – (10) stellt eine konsistente Änderung des Galerkin-Problems (5) – (7) dar, denn für hinreichend glatte Lösungen von (1) bzw. (2) verschwindet der Defekt $Lu - f$ elementweise.

Im konformen Fall fallen für $u, v \in V_0$ $a_0^h(u, v)$ und $a_0(u, v)$ zusammen. Zur Bewertung des Verfahrens (8) – (10) benutzen wir die folgenden Normen:

$$\|u\|_{1,h}^2 := \sum_{K^* \in \tau_n^*} \int_{K^*} |\nabla u|^2 dx,$$

$$\|u\|_0^2 := \int_{\Omega} (u(x))^2 dx \quad (11)$$

$$\|u\|_{\delta}^2 := \epsilon \|u\|_{1,h}^2 + \|u\|_0^2 + \sum_{K^* \in \tau_n^*} \int_{K^*} \delta_K [b \cdot \nabla u]^2 dx \quad (12)$$

$$\|u\|_{\infty} := \sup_{\Omega} |u(x)|, \quad (13)$$

die für alle Funktionen aus V_0 oder V_h definiert sind.

Im konformen Fall wurden bereits in [18] folgende Resultate für $\partial\Omega = \Gamma_1$, $g_1 = 0$ erzielt: Für $c - 1/2 \operatorname{div} b \geq c_0 > 0$ gilt bei der Wahl der upwind-Faktoren δ_K gemäß $0 < \epsilon \delta_K < C h_K^2$ (mit hinr. kleinem C)

die Stabilitätsabschätzung

$$\|u_h\|_{\delta} \leq C \|f\|_0 \quad (15)$$

und das Konvergenzresultat

$$\|u - u_h\|_{\delta} \leq C h^{3/2} |u|_2, \quad (16)$$

falls zusätzlich die (verallgemeinerten) 2. Ableitungen quadratisch integrierbar sind, d. h.

$$|u|_2^2 := \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 dx < \infty.$$

Bei Lösungen mit Grenzschichten hat man im allgemeinen Fall nur die Abschätzung $|u|_2 \leq C \epsilon^{-3/2}$, so daß (16) für $\epsilon \leq h$ unbrauchbar wird. Daher sind lokale Fehlerabschätzungen außerhalb von Grenzschichtbereichen von besonderem Wert [13] bis [15], [18]. Sie zeigen, daß sich lokale (tatsächlich auftretende) Oszillationen in Grenzschichten nicht beliebig ins Gebietsinnere fortpflanzen. Letzteres ist für das Galerkin-Verfahren ($\delta_K = 0$) oft zu beobachten (vgl. Beispiel 1).

Offen sind im 3D-Fall optimale L_{∞} -Abschätzungen. In [16] wurde auch der Effekt numerischer Integration betrachtet. Interpoliert man die Funktionen $a_{ij}(\cdot)$, $c(\cdot)$ und $f(\cdot)$ elementweise konstant und $b_i(\cdot)$ elementweise linear und integriert die entstehenden Integrale mittels geeigneter Quadraturformeln exakt, so bleibt die Fehlerordnung (16) gültig.

Die mathematische Absicherung der nichtkonformen Methode wurde für die Poisson-Gleichung in [2], [3] betrachtet. Man findet die Stabilitätsaussage $\|u_h\|_{1,h} \leq C \|f\|_0$ und das Konvergenzresultat

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq C h |u|_2 \quad (17)$$

im Spezialfall $\partial\Omega = \Gamma_1$. Eine Übertragung der Stabilitätsresultate (15), (16) auf den konvektionsdominanten Fall wird in [17] betrachtet.

Man beachte, daß die Stabilitäts- und Konvergenzaussagen (15), (16) auf dem vollen (ϵ, h) -Spektrum gelten, sofern nur Bedingung (14) erfüllt ist.

3. Wahl der upwind-Parameter δ_K

Die Robustheit der Stromliniendiffusion-FEM wird wesentlich durch die Wahl der upwind-Parameter δ_K beeinflusst. Einerseits genügt der für die mathematische Untersuchung notwendigen Bedingung (14) eine große Klasse von Parametern δ_K , so z. B. die in [18] vorgeschlagene Wahl

$$\delta_K \equiv \delta = Ch, \text{ falls } \epsilon \leq h;$$

$$\delta_K \equiv \delta = 0, \text{ falls } \epsilon > h \quad \forall K^* \in \tau_n^*. \quad (18)$$

Andererseits kann man für sehr einfache ein- und zweidimensionale Probleme mit konstanten Koeffizienten zeigen, daß die Wahl $\delta_K = \delta_K(\rho_K)$ in Abhängigkeit von der lokalen Peclet-Zahl $\rho_K := h_K |b| / (2\epsilon)$ sogar zu knotenexakten Lösungen führen kann mit

$$\delta_K := \frac{h_K}{2|b|} (\coth \rho_K - \rho_K^{-1}). \quad (19)$$

In vorliegender Arbeit wurde in Anlehnung an [19] ein Bildungsgesetz der Form

$$\delta_K := \delta^* \frac{h_K}{2|b|} (\coth \rho_K - \rho_K^{-1}) \quad (20)$$

mit dem Anpassungsfaktor δ^* zugrunde gelegt (vgl. Bild 3). Somit paßt sich das Verfahren (8) – (10) lokal an das Verhältnis von Diffusions- und konvektiven Einflüssen an.

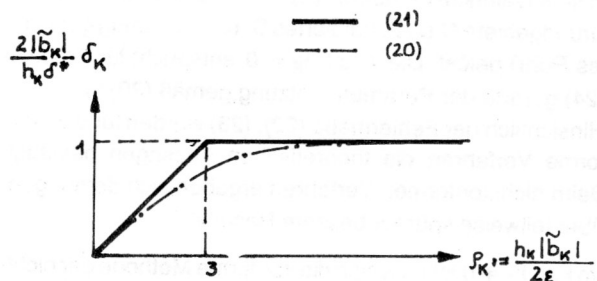


Bild 3

Aus rechentechnischen Gründen wurde vereinfachend das asymptotische Gesetz (vgl. Bild 3)

$$\delta_K := \delta^* * \begin{cases} 0, & \text{falls } |\tilde{b}_K| = 0 \text{ auf } K^* \\ \frac{h_K}{2|\tilde{b}_K|} \min \left\{ 1; \frac{h_K |\tilde{b}_K|}{6\epsilon} \right\}, & \text{falls } |\tilde{b}_K| > 0 \text{ auf } K^* \end{cases}$$

mit

$$h_K := \frac{2|\tilde{b}_K|}{\sum_i |\tilde{b}_K \cdot \nabla w_i|}$$

$$|\tilde{b}_K|^2 = \sum_{j=1}^3 \tilde{b}_j^2,$$

$$\tilde{b}_K = (b_j)_{j=1..3} := \sum_{i=1}^4 b(x_i^k)/4 \quad (21)$$

(vgl. [20]) verwendet. Dabei sind x_i^k , $i = 1, \dots, 4$ die Eckpunkte des aktuellen Tetraeders K^* . In den Testrechnungen von § 4 wurde der Faktor δ^* variiert.

4. Auswertung von Testrechnungen

Zur Bewertung der numerischen Lösung werden folgende diskreten Fehlergrößen herangezogen:

$$\|u - u_h\|_{0,h} := (M^{-1} \sum_{i=1}^M [(u - u_h)(x_i)]^2)^{1/2} \quad (22)$$

$$\|u - u_h\|_{\infty,h} := \max_{i=1, \dots, M} \frac{|(u - u_h)(x_i)|}{1 + |u(x_i)|}, \quad (23)$$

wobei $x_i, i = 1, \dots, M$ die Menge der Knoten des FEM-Netzes durchläuft. Wenn keine exakte Lösung u zur Verfügung steht, wird eine geeignete asymptotische Näherung im Fall $0 < \varepsilon \ll 1$ als Vergleichslösung benutzt [5].

In [2] wurde als typisches diffusionsdominantes Beispiel die Poisson-Gleichung

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega = \Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

mittels Galerkin-Verfahren ($\delta_K \equiv \delta = 0$) für verschiedene Grundgebiete Ω (z. B. halbiertes S- bzw. T-förmig gestaltetes Rohr) gelöst. Die Wahl $\delta_K = 0$ entspricht für Problem (24) gerade der Parametersetzung gemäß (20) bzw. (21). Hinsichtlich der Fehlermaße (22), (23) wurden für das konforme Verfahren die theoretischen Aussagen bestätigt. Beim nichtkonformen Verfahren ergaben sich demgegenüber teilweise spürbar bessere Resultate.

Im Fall $\Gamma_2 \neq \emptyset$ ist teilweise die konforme Methode der nichtkonformen überlegen.

Für den konvektionsdominanten Fall $0 < \varepsilon \ll 1$ von Problem (1) betrachten wir zunächst ein 2D-Problem.

Beispiel 1:

$$-\varepsilon \Delta u + (\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot \nabla u = 0 \text{ in } \Omega = (0,1) \times (0,1)$$

Randbedingungen gemäß Bild 4

Die Lösung ist durch eine innere Grenzschicht entlang der Stromlinie Γ_S und eine Randgrenzschicht Γ_+ charakterisiert. In diesem Sinne ist Beispiel 1 als anspruchsvolle Testaufgabe bekannt [6], [8], [11], [20].

Bild 5 zeigt die numerische Lösung für $\varepsilon = 10^{-6}$, $h = 0.05$, $\alpha = 22.5^\circ$ (d. h. die Transportrichtung fällt nicht mit Kanten der Vernetzung zusammen) für das konforme Verfahren bei verschiedenen δ^* -Werten. Beim Übergang zum Galerkin-Verfahren $\delta^* = 0$ (vgl. Abb. 5a, $\delta^* = 0.05$) wird die Lö-

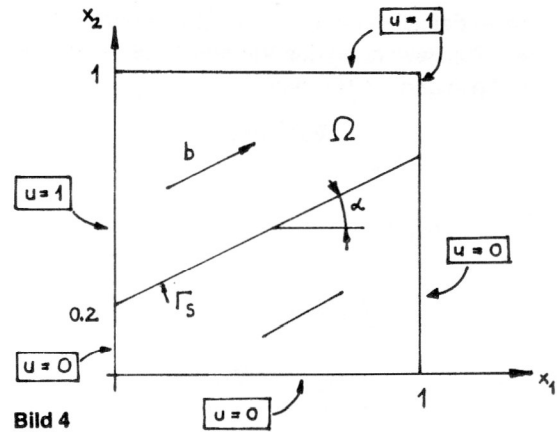


Bild 4

sung durch globale Oszillationen unbrauchbar. Für mittlere Werte von δ^* (vgl. Abb. 5b – 5d) wird die innere Grenzschicht scharf lokalisiert, und leichte Oszillationen der Lösung breiten sich in der Tat nicht im Strömungsgebiet aus. Wächst δ^* an (vgl. Abb. 5e, 5f), so werden zwar die Oszillationen in den Grenzschichten ausgedämpft, jedoch „verschmieren“ die Grenzschichten zunehmend mit wachsendem δ^* .

Gegenüber den Angaben in [8], [11], [20] sollte ein etwas größerer Wert von $\delta^* = (1.5 \dots 2.0)$ gewählt werden. Ist man an der genauen Auflösung der Grenzschichten interessiert, sollte man eine Netzverfeinerung in Grenzschichtnähe vornehmen (vgl. auch Beispiel 3).

Die Aussagen bleiben auch bei nichtkonformen Elementen tendentiell richtig, jedoch wird die Randgrenzschicht mit wachsendem δ^* stärker „verschmiert“ als im konformen Fall.

Für den konvektionsdominanten 3D-Fall von Problem (1) wurde zunächst ein Beispiel mit polynomialer Lösung behandelt.

Beispiel 2:

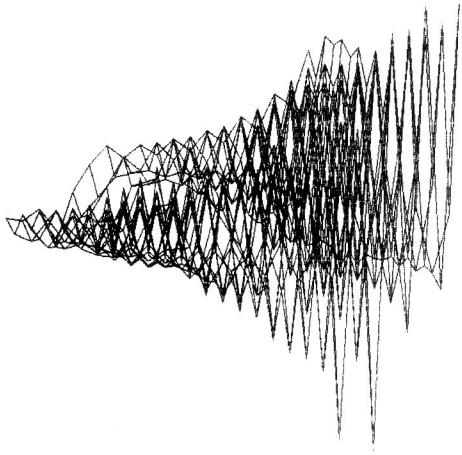
$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,1), \partial\Omega = \Gamma_1$$

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}, b(x) = (1, 1, 1), c(x) = 0$$

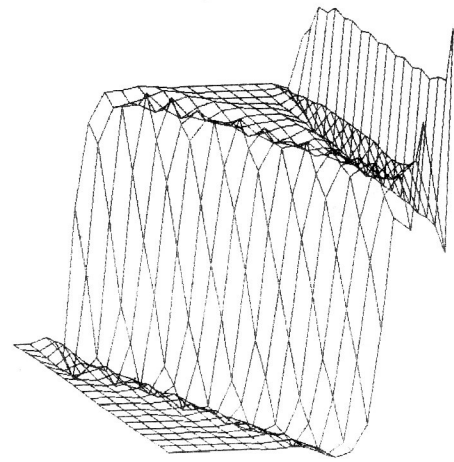
$$u(x) = 2x_1^2(x_2 + x_3) - 3x_2^2(x_1 + x_3) + 5x_3^2(x_1 + x_2) - 7x_1^3 + 4x_2^3 + x_3^3$$

Bild 6 zeigt für $\varepsilon = 10^{-6}$ das Verhalten der mittleren quadratischen Abweichung (22) in Abhängigkeit von den Parametern h (äquidistante Vernetzung) und δ^* (vgl. § 3) für das konforme (K) bzw. nichtkonforme (NK) Verfahren.

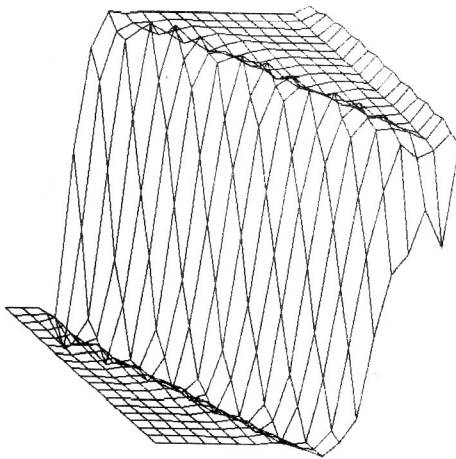
Zunächst ist (vor allem für grobe Vernetzungen) erkennbar, daß die Lösungen für $\delta^* \rightarrow 0$, d. h. im Grenzfall für das Galerkin-Verfahren, unbrauchbar werden. Der Übergang zum Stromliniendiffusions-Verfahren ist also wie bei Beispiel 1 wesentlich. Während beim konformen Verfahren sich für $\delta^* > 1$ sehr schnell eine stabile Fehlergröße einstellt, ist dieses Verhalten beim nichtkonformen Verfahren erst für größere Werte von δ^* der Fall. Das nichtkonforme Verfahren liefert in diesem Beispiel eine genauere Lösung für größere δ^* -Werte. Diese Aussage ist auch für den maximalen relativen Fehler (23) und für ein größeres ε -Spektrum (getestet für $\varepsilon < 10^{-3}$) korrekt.



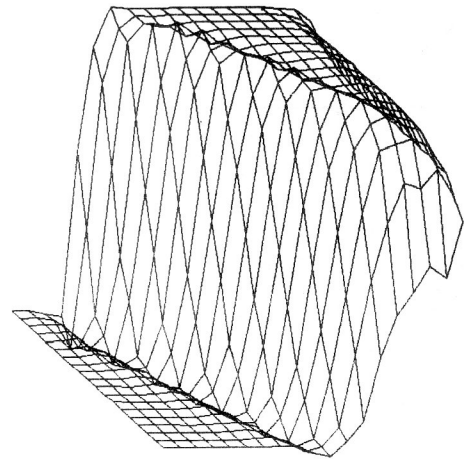
a) $\delta^* = 0.05$



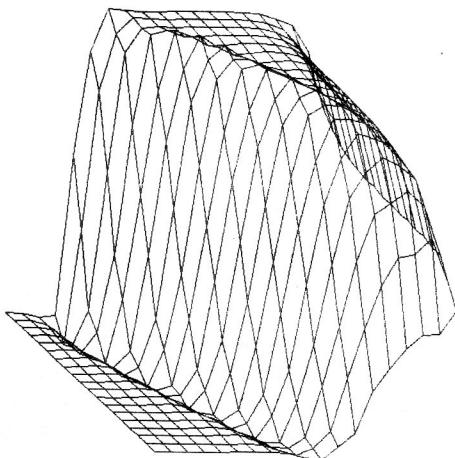
b) $\delta^* = 1.0$



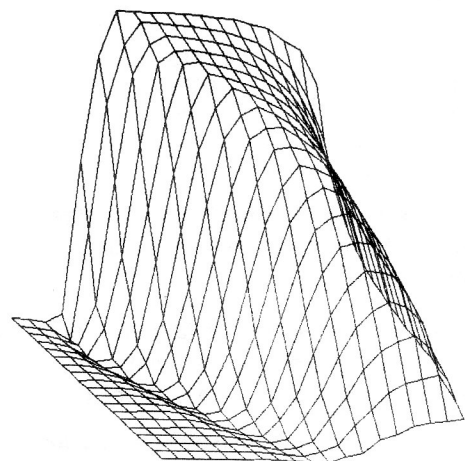
c) $\delta^* = 2.0$



d) $\delta^* = 3.0$



e) $\delta^* = 5.0$



f) $\delta^* = 20.0$

Bild 5 a-f
 Numerische Lösung von Beispiel 1
 $\epsilon = 10^{-6}$, $h = 0,05$, $\alpha = 22,5^\circ$

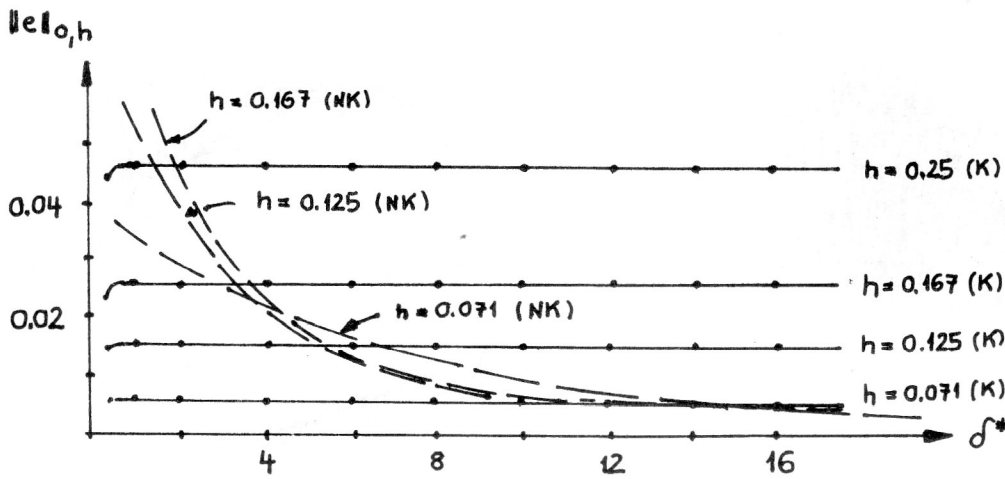


Bild 6
Mittlere quadratische
Abweichung in Beispiel 2,
 $\varepsilon = 10^{-6}$

Tabelle 1:
Fehlermaße (22), (23) für Beispiel 2, $\varepsilon = 10^{-6}$

δ^*		1.0				1.5			
		$\ e\ _{0,h}$	Rate	$\ e\ _{\infty,h}$	Rate	$\ e\ _{0,h}$	Rate	$\ e\ _{\infty,h}$	Rate
konform	0.25	0.0465	—	0.0968	—	0.0469	—	0.0975	—
	0.167	0.0272	1.25	0.0796	0.51	0.0272	1.27	0.0775	0.53
	0.125	0.0172	1.58	0.0623	0.76	0.0172	1.58	0.0621	0.77
nichtkonf.	0.25	0.0867	—	0.1200	—	0.0631	—	0.0818	—
	0.167	0.0656	0.65	0.1290	-0.17	0.0531	0.40	0.1130	-0.75
	0.125	0.0513	0.85	0.1010	0.84	0.0438	0.66	0.0796	1.21

δ^*		10.0				
		$\ e\ _{0,h}$	Rate	$\ e\ _{\infty,h}$	Rate	
konform	0.25	0.0468	—	0.0953	—	konform
	0.167	0.0264	1.33	0.0755	0.80	
	0.125	0.0165	1.62	0.0606	0.76	
nichtkonf.	0.25	0.0112	—	0.0230	—	nichtkonf.
	0.167	0.0066	1.23	0.0145	1.07	
	0.125	0.0066	0.00	0.0140	0.12	

In der Tabelle 1 werden numerische Konvergenzraten für ausgewählte Werte von δ^* und die Fehlermaße (22), (23) angegeben. Dabei ist $e := u - u_h$.

Die für den diskreten L_2 -Fehler (22) ermittelten Konvergenzraten liegen im Rahmen der theoretisch erwarteten L_2 -Rate für die numerische Lösung gemäß (16).

Die Lösung des nachfolgenden Beispiels ist durch Grenzschichten in Randnähe gekennzeichnet.

Beispiel 3:

$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,1), \quad \partial\Omega = \Gamma_1$$

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad b(x) = (1, 1, 1), \quad c(x) = 0,$$

$$f(x) = x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2$$

Die asymptotische Approximation

$$u(x) = x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3 \exp((x_1 - 1)/\varepsilon) - x_1 x_3 \exp((x_2 - 1)/\varepsilon) - x_1 x_2 \exp((x_3 - 1)/\varepsilon)$$

der exakten Lösung weist exponentiell schnell abklingende Grenzschichtterme bei $x_i = 1$, $i = 1, 2, 3$ auf. Zur besseren Approximation wurde das Netz durch eine logarithmische Verteilung der Knoten (jeweils in x_i -Richtung) in Grenzschichtnähe verfeinert.

Bilder 7 bzw. 8 veranschaulichen die Abhängigkeit der Fehlermaße (22) und (23) von der Netzdichte (N – Zahl der Superelemente) und δ^* .

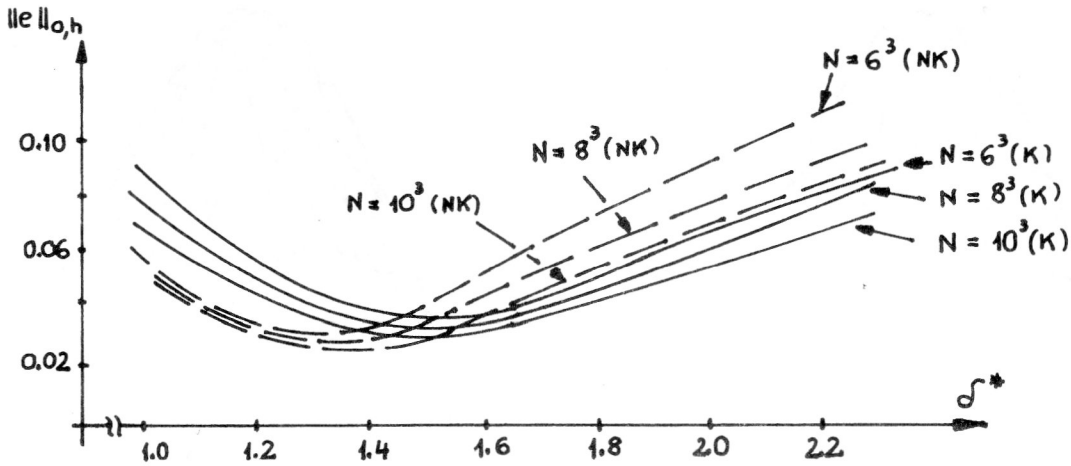


Bild 7
Fehlermaß (22) für Beispiel 3, $\varepsilon = 10^{-6}$

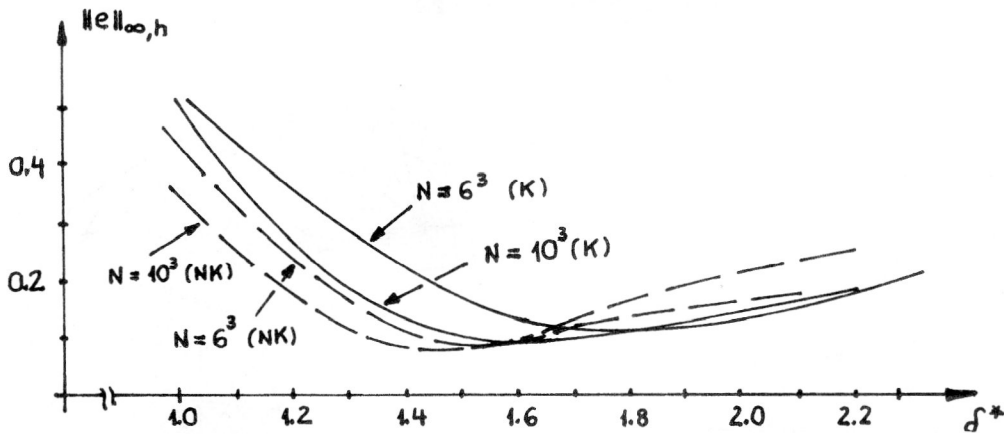


Bild 8
Fehlermaß (23) für Beispiel 3, $\varepsilon = 10^{-6}$

Übereinstimmend werden die Fehlergrößen etwa für $\delta^* = 1.5$ minimal, während sie für $\delta^* \rightarrow 0$ und große δ^* -Werte sehr stark wachsen (insbesondere $\|u - u_h\|_{\infty,h}$). Bemerkenswert ist, daß die Bildungsvorschrift (20) für δ_K im 1D-Fall gerade auf der Analyse von Grenzschichttermen wie in Beispiel 3 basiert und auf höherdimensionale Aufgaben heuristisch verallgemeinert wurde. Obige Ergebnisse lassen vermuten, daß im 3D-Fall der Standardwert $\delta^* = 1.0$ [20] (für den ebenen Fall) etwas größer gewählt werden sollte.

Die nachfolgenden Beispiele beziehen sich auf Transportprobleme in krummlinigen Strömungsfeldern. Für zweidimensionale Aufgaben ist bekannt, daß die Stromliniendiffusion-FEM im Gegensatz zu anderen Verfahren (z. B. „full upwind“ oder „hybride-upwind“-FEM) eine geringe numerische Diffusion quer zur Transportrichtung („crosswind diffusion“) aufweist [6] bis [9], [16].

Beispiel 4:

$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,1), \quad \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$$

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad b(x) = (-x_2, x_1, 0), \quad c(x) = f(x) = 0$$

$$\Gamma_1: u(x) = \begin{cases} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_3), & \text{falls } x \in \partial\Omega, x_2 = 0 \\ 0, & \text{falls } x \in \partial\Omega \text{ außer } x_2 = 0 \text{ bzw. } x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2: \partial u / \partial n = 0, \text{ falls } x_1 = 0, 0 < x_2, x_3 < 1$$

Bild 9 zeigt für $\varepsilon = 10^{-6}$, $h = 0.1$ (äquidistantes Gitter) das bei $x_2 = 0$ vorgegebene Sinusprofil sowie das bei $x_1 = 0$ erscheinende (entlang der Linien $x_1^2 + x_2^2 = \text{konst.}$, $x_3 = \text{konst.}$ transportierte) fast unverfälschte Lösungsprofil. Die Aussage ist robust mindestens auf einem Spektrum $0 \leq \delta^* \leq 10$.

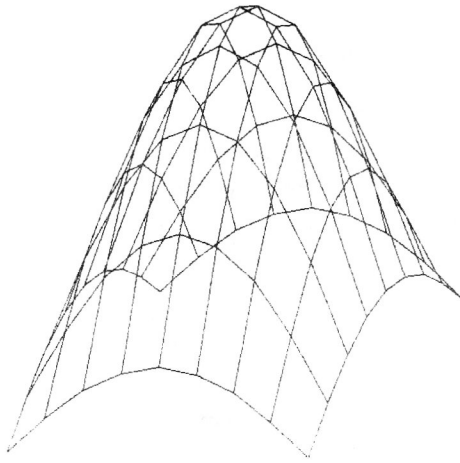
Beispiel 5:

$$\Omega \text{ (vergleiche Abb. 10), } \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$$

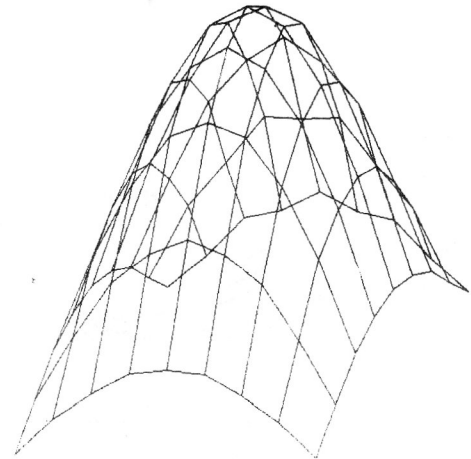
$$r^2 = ((x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 0.8)^2 + x_3^2$$

$$\Gamma_1: u(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_2 = 0, 0 \leq r \leq 0.02 \\ 0, & \text{falls } x_2 = 0, 0.02 < r \leq 0.2 \end{cases}$$

$$\Gamma_2: \partial u / \partial n = 0, \text{ falls } x \in \partial\Omega \text{ sonst, } x_2 > 0$$



Eingangsprofil bei $x_2 = 0$
 $(0.1 \leq x_1, x_3 \leq 0.9)$



Ausgangsprofil bei $x_1 = 0$
 $(0.1 \leq x_1, x_3 \leq 0.9)$

Bild 9

Beispiel 4, $\epsilon = 10^{-6}$, $h = 0,1$, $\delta^* = 2,0$

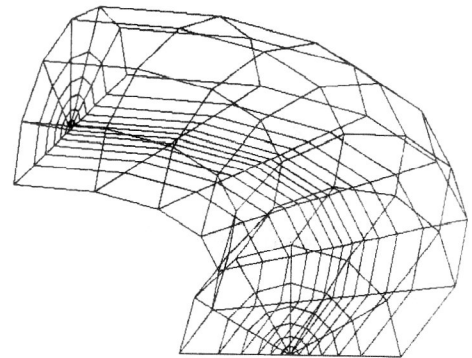
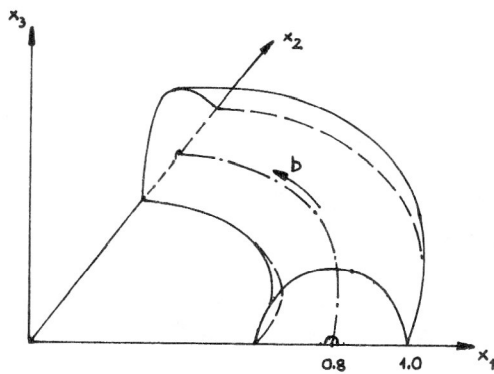
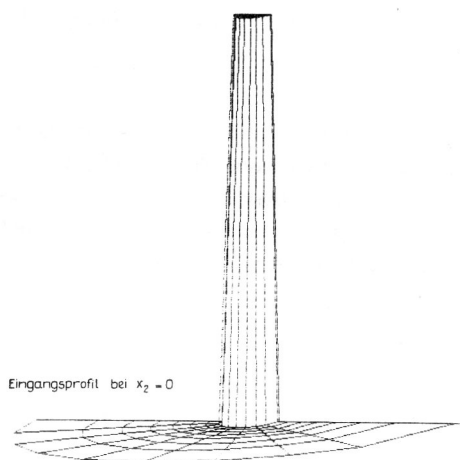
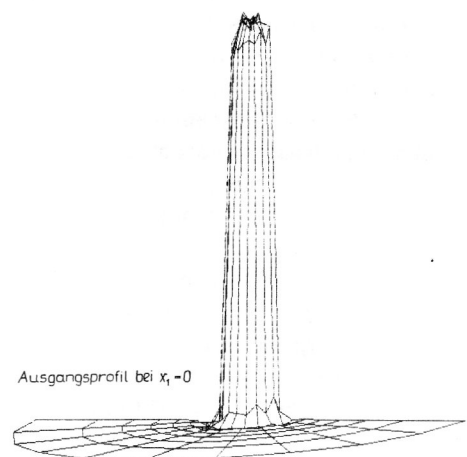


Bild 10

b) Gebiet für Beispiel 5 (Rohrkrümm) und
 b) „grobes“ FEM-Netz (6 x 6 x 6 Elemente)



Eingangsprofil bei $x_2 = 0$



Ausgangsprofil bei $x_1 = 0$

Bild 11

Beispiel 5, $\epsilon = 10^{-6}$, $\delta^* = 2,0$, „feine“ Vernetzung analog
 Bild 11 (10 x 10 x 20 Elemente)

Das in radialer Richtung logarithmische Netz ist in der Rohrmitte verdichtet. Bild 11 zeigt das Eingangsprofil bei $x_2 = 0$ sowie das entlang der Linien $r = \text{konst.}$ transportierte, bei $x_1 = 0$ erscheinende Ausgangsprofil.

Für ein breites δ^* -Spektrum zeigt sich, daß das vorgegebene Profil qualitativ korrekt transportiert wird. Die Amplitudenverfälschung aufgrund lokaler Oszillationen bei $0 \leq r \leq 0.02$ liegt bei ca. 3 %.

Die Beispiele 4 und 5 belegen, daß tatsächlich numerische Diffusionseffekte quer zur Strömungsrichtung bei der Stromliniendiffusion-FEM gering sind.

5. Schlußfolgerungen

Ausgewählte Testrechnungen zeigen, daß die in [2], [3] für das Poisson-Problem berichtete Verwendung sowohl konformer als auch nichtkonformer, stückweise linearer FEM-Ansätze bei konvektionsdominanten Wärme- oder Stofftransportproblemen im 3D-Fall ebenfalls möglich ist. Wesentlich ist dabei eine Stromliniendiffusions-Modifikation der üblichen Galerkin-FEM. Die Anpassung an das Verhältnis diffuser und konvektiver Einflüsse wird lokal durch geeignete Wahl von upwind-Faktoren δ_K gemäß (21) gesteuert. Aus den Testbeispielen läßt sich im 3D-Fall ein Parameterwert $\delta^* = 1.5 \dots 2.0$ empfehlen, der etwas höher als der für den ebenen Fall mit $\delta^* = 1.0$ in [20] vorgegebene Wert liegt.

Die Stromliniendiffusion-FEM ist durch die im Algorithmus vorliegende lokale Anpassungsstrategie auch robust gegenüber lokal stark variierendem Verhältnis von Diffusion und Konvektion, wie es für reale Strömungsprobleme der Fall ist.

LITERATUR

- [1] Ciarlet, P.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam 1978.
- [2] Felgenhauer, A., Weiß, D.: Eine nichtkonforme FEM mit Standardnetzgenerierung für die Poisson-Gleichung im Raum, WZ TU Magdeburg 33(1989)6, 31 – 34.
- [3] Felgenhauer, A., Weiß, D.: A note on nonconform finite elements and incorrect triangulations, submitted to Computing.
- [4] Gajewski, H.: Zur iterativen Lösung der zweidimensionalen Boussinesq-Gleichungen, ZAMM 65 (1975), 571 – 581.
- [5] Goering, H. et al.: Singularly Perturbed Differential Equations. Math. Research, Bd. 13., Akademie-Verlag, Berlin 1983.
- [6] Hansbo, P.: Adaptivity and Streamline Diffusion Procedures in the Finite Element Method. Thesis, Publ. 89-2, Dept. of Structural Mech., Chalmers Univ. of Technology, Göteborg, 1989.
- [7] Hughes, T. J. R.: Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations. Intern. J. Numer. Meth. Fluids, 7 (1987), 1261 – 1275.
- [8] Hughes, T. J. R., Brooks, A.: A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. In: T. J. R. Hughes (ed.): Finite Element Methods for Convection Dominated Flows. AMD vol. 34, ASME, New York, 1979, 19 – 35.
- [9] Hughes, T. J. R., Brooks, A.: A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions – application to the streamline upwind procedure. In: R. H. Gallagher et al. (eds.): Finite Elements in Fluids. Vol. IV, Wiley, Chichester 1982, 47 – 65.

- [10] Hughes, T. J. R., Franca, L. P., Hulbert, G. M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VIII. The Galerkin/Least-Squares method for advective-diffusive equations. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. (1988).
- [11] Hughes, T. J. R., Mallet, M., Mizukami, M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics. II. Beyond SUPG, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 54 (1986), 341 – 353.
- [12] Hughes, T. J. R., Shakib, F.: Computational aerodynamics and the finite element method, AIAA-88-0013, 1 – 11.
- [13] Johnson, C., Nävert, U., Pitkäranta, J.: Finite element methods for linear hyperbolic problems. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 45 (1984), 285 – 312.
- [14] Johnson, C., Schatz, A. H., Wahlbin, L.: Crosswind smear and pointwise errors in streamline diffusion finite element methods, Math. Comp. 49 (1987), 25 – 38.
- [15] Lube, G.: Uniform in ϵ discretisation error estimates for convection dominated convection-diffusion problems. M²ANY 22 (1988) 3, 517 – 531.
- [16] Lube, G.: An asymptotically fitted finite element method for convection dominated convection-reaction-diffusion problems. erscheint in ZAMM 70(1990)12.
- [17] Lube, G., Weiß, D.: Conform and nonconform streamline diffusion methods for 3D-convection-diffusion problems. in Vorbereitung.
- [18] Nävert, U.: A finite element method for convection-diffusion problems. Ph. D. Thesis, Dep. of Comp. Sc., Chalmers Univ. of Technology, Göteborg 1982.
- [19] Roos, H. G.: Moderne Methoden zur Behandlung von Konvektions-Diffusions-Gleichungen. Technische Mechanik, 7 (1986) 2, 42 – 47.
- [20] Tezduyar, T. E., Park, Y. J.: Discontinuity capturing finite element formulation for nonlinear convection-diffusion-reaction equations. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 59 (1986), 307 – 325.

Anschrift der Verfasser:

Dr. sc. nat. G. Lube
 Dipl.-Ing. D. Weiß
 Technische Universität „Otto von Guericke“ Magdeburg
 WB Analysis bzw. Thermodynamik
 PSF 124
 Magdeburg
 3 0 1 0