

Zur Spannungsverteilung in thermisch beanspruchten elastisch-plastischen Kreisscheiben bei einem speziellen nichtlinearen Verfestigungsgesetz

Werner Mack und Udo Gamer

1. Einleitung

Um die Verfestigung elastisch-plastischer Werkstoffe zu beschreiben, verwenden Experimentatoren häufig den Ansatz

$$\sigma_F = \sigma_0 + P(\epsilon_v^{pl})^k, \quad (1)$$

der eine Verallgemeinerung der linearen Verfestigung darstellt. Dabei bedeutet σ_F die Fließspannung, σ_0 die ursprüngliche Fließgrenze beim einachsigen Zugversuch und ϵ_v^{pl} die plastische Vergleichsdehnung. Die positiven Materialparameter P und k lassen sich leicht ermitteln, wenn man die graphische Darstellung der Meßergebnisse auf doppeltlogarithmischem Papier durch eine Gerade annähert [1].

In dieser Arbeit wird untersucht, welches Werkstoffverhalten mit dem obigen Ansatz erfaßt wird, und zwar am konkreten Fall radialsymmetrisch wärmebeanspruchter Scheiben. Solche Scheiben spielen eine wichtige Rolle: es seien hier etwa Brems- und Kupplungsscheiben sowie Kühlrippen genannt. Bei den zur Anwendung kommenden Materialien ist $k < 1$ (vgl. [1]) und es stellt sich bei Zugrundelegung der Trescaschen Fließbedingung heraus, daß dann unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Anstiege der Spannungen und Dehnungen an den elastisch-plastischen Grensradien stetig verlaufen und der Übergang von elastischem zu plastischem Verhalten fließend erfolgt. Für $k > 1$ hingegen ist der Werkstoff in unmittelbarer Grenznahe idealplastisch, $k = 1$ ergibt den Spezialfall der linearen Verfestigung. Dieses qualitativ sehr unterschiedliche Verhalten wird am Beispiel einer in ihrem Kern kreisflächenförmig erhitzten Scheibe auch durch numerische Ergebnisse illustriert.

Verwandte radial- und kugelsymmetrische Festigkeitsprobleme ohne Temperatureinfluß werden für Materialien, die dem obigen Verfestigungsgesetz folgen, in [2] bis [5] behandelt.

2. Spannungen und Verschiebungen in der Scheibe

Es wird im folgenden eine drehsymmetrisch erhitze elastisch-plastische Kreisscheibe mit thermisch isolierter Stirnfläche $r = b$ betrachtet, deren physikalische Eigenschaften unabhängig von der Temperatur seien. Nimmt bei Einsetzen plastischer Deformation die Trescasche Fließbedingung die Form

$$|\sigma_\varphi - \sigma_r| = \sigma_F \quad (2.1)$$

an, so tritt, wie in [6] nachgewiesen wird, zumindest für eine bestimmte Zeitspanne ein plastischer Bereich zwischen dem elastischen Zentrum und einer elastischen Außenzone auf. Bei Verwendung der Abkürzung

$$\Theta(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r T x \, dx \quad (2.2)$$

findet man für die Spannungen in den elastischen Bereichen der Scheibe [7]

$$\sigma_r = E \left[-\frac{A}{(1+\nu)r^2} + \frac{B}{1-\nu} - \alpha\Theta \right], \quad (2.3)$$

$$\sigma_\varphi = E \left[\frac{A}{(1+\nu)r^2} + \frac{B}{1-\nu} + \alpha(\Theta - T) \right]; \quad (2.4)$$

T bezeichnet die Übertemperatur gegen die Umgebung, α den linearen Wärmedehnungskoeffizienten, A und B sind Integrationskonstanten. Ist in der plastischen Zone speziell $\sigma_\varphi > 0 > \sigma_r$ (der Fall $\sigma_r > 0 > \sigma_\varphi$ ist völlig analog zu behandeln), dann lauten die Spannungen [8]

$$\sigma_r = \int_{r_1}^r \frac{\sigma_F}{x} \, dx + C, \quad (2.5)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + \sigma_F, \quad (2.6)$$

mit der Integrationskonstanten C . Für die Verschiebung u gilt in der gesamten Scheibe [6]

$$u = \epsilon_\varphi r = \frac{1}{E} r(1-\nu)\sigma_r + 2\alpha r\Theta + \frac{D}{r}. \quad (2.7)$$

Mit den Bedingungen der Stetigkeit von σ_r und u an den elastisch-plastischen Bereichsgrenzen r_1 und r_2 sowie des Verschwindens der Radialspannung am Außenrand ergeben sich die Integrationskonstanten zu

$$D = A_1 = A_2 = 0, \quad (2.8)$$

$$B_1 = (1-\nu) \left\{ \alpha[\Theta(b) - \Theta(r_2)] + \Theta(r_1) \right\} - \frac{1}{E} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma_F}{x} \, dx, \quad (2.9)$$

$$C = E\alpha \left[\Theta(b) - \Theta(r_2) \right] - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma_F}{x} \, dx, \quad (2.10)$$

$$B_2 = (1-\nu)\alpha\Theta(b), \quad (2.11)$$

wobei die Indizes 1 bzw. 2 den inneren bzw. äußeren elastischen Bereich kennzeichnen. Zur Bestimmung der Grensradien r_1 und r_2 betrachtet man die plastische Um-

fangsdehnung, die durch Subtraktion des elastischen und thermischen Anteils von der gesamten Umfangsdehnung nach (2.7) unter Berücksichtigung der Fließbedingung gewonnen wird,

$$\epsilon_{\varphi}^{\text{pl}} = \alpha(2\Theta - T) - \frac{\sigma_{\text{F}}}{E} \quad (2.12)$$

Da an den elastisch-plastischen Grenzen die plastische Dehnung verschwindet und $\sigma_{\text{F}} = \sigma_{\text{o}}$ gilt, nehmen die Bestimmungsgleichungen für r_1 und r_2 die Form

$$\alpha[2\Theta(r_1) - T(r_1)] - \frac{\sigma_{\text{o}}}{E} = 0, \quad (2.13)$$

$$\alpha[2\Theta(r_2) - T(r_2)] - \frac{\sigma_{\text{o}}}{E} = 0 \quad (2.14)$$

an.

Zur Auswertung der für beliebige isotrope Verfestigung gültigen Gleichungen (2.1) bis (2.14) muß nun noch die Abhängigkeit der Fließspannung vom Radius gefunden werden. Aus der Äquivalenz des Zuwachses der plastischen Arbeit [9]

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{\text{pl}} = \sigma_{\text{v}} d\epsilon_{\text{v}}^{\text{pl}} \quad (2.15)$$

folgt

$$\epsilon_{\text{v}}^{\text{pl}} = \epsilon_{\varphi}^{\text{pl}} \quad (2.16)$$

und das Einsetzen der plastischen Umfangsdehnung (2.12) in den Verfestigungsansatz (1) liefert schließlich die Gleichung

$$\left(\frac{\sigma_{\text{F}} - \sigma_{\text{o}}}{P}\right)^{1/k} - \alpha(2\Theta - T) + \frac{\sigma_{\text{F}}}{E} = 0 \quad (2.17)$$

zur Berechnung der Fließspannung. Damit ist die Spannungsverteilung in der Scheibe für ein gegebenes Temperaturfeld eindeutig bestimmt.

3. Anstiege von Spannungen und Dehnungen an den elastisch-plastischen Grenzen

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d\sigma_{\text{r}}}{dr} + \frac{\sigma_{\text{r}} - \sigma_{\varphi}}{r} = 0 \quad (3.1)$$

ist unmittelbar ersichtlich, daß die Stetigkeit von Radial- und Umfangsspannung auch die Stetigkeit des Anstieges der Radialspannung zur Folge hat. Diese zieht – unter der Voraussetzung eines stetigen Temperaturfeldes – die Stetigkeit von du/dr sowie wegen der Stetigkeit von ϵ_{φ} diejenige von $d\epsilon_{\varphi}/dr$ nach sich, wie man durch Differenzieren von (2.7) zeigt. Ganz allgemein besitzen also die Radialspannung, die Verschiebung sowie die Umfangsdehnung stetige Anstiege an den elastisch-plastischen Grenzen.

Bemerkenswert ist nun, daß bei Zugrundelegung des Verfestigungsgesetzes (1) mit $0 < k < 1$ auch $d\sigma_{\varphi}/dr$, $d\epsilon_{\text{r}}/dr$ und $d\epsilon_{\text{z}}/dr$ stetig verlaufen, wenn das Temperaturfeld bei r_1 und r_2 differenzierbar ist. Zum Beweis wird die plastische Umfangsdehnung betrachtet: aus (1), (2.12) und (2.16) erhält man die Beziehung

$$\frac{P}{E} (\epsilon_{\varphi}^{\text{pl}})^k + \epsilon_{\varphi}^{\text{pl}} - \alpha(2\Theta - T) + \frac{\sigma_{\text{o}}}{E} = 0. \quad (3.2)$$

Ableitung nach dem Radius liefert

$$\frac{d\epsilon_{\varphi}^{\text{pl}}}{dr} = \frac{\alpha \frac{d}{dr} (2\Theta - T)}{\frac{Pk}{E} (\epsilon_{\varphi}^{\text{pl}})^{k-1} + 1} \quad (3.3)$$

Daraus folgt wegen des Verschwindens der plastischen Dehnung an den elastisch-plastischen Grensradien

$$\left. \frac{d\epsilon_{\varphi}^{\text{pl}}}{dr} \right|_{r=r_1, r_2} = 0, \quad (3.4)$$

was die Stetigkeit des Anstieges der Umfangsspannung bedingt. Man bestätigt dies durch Untersuchung der Vergleichsspannung im elastischen Bereich,

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_{\text{r}} = E \alpha (2\Theta - T) \quad (3.5)$$

(vgl. (2.3) und (2.4)). Sie hat die Steigung

$$\frac{d}{dr} (\sigma_{\varphi} - \sigma_{\text{r}}) = E \alpha \frac{d}{dr} (2\Theta - T) \quad (3.6)$$

wie die Fließspannung σ_{F} an den Bereichsgrenzen der benachbarten plastischen Zone, deren Anstieg sich sofort aus der Ableitung von (2.12) unter Berücksichtigung von (3.4) ergibt. Wegen der stetigen Steigung der Radialspannung verläuft auch der Anstieg der Umfangsspannung stetig, der Übergang von elastischem zu plastischem Verhalten ist also fließend. Da mit der Fließregel aus (3.4)

$$\left. \frac{d\epsilon_{\text{r}}^{\text{pl}}}{dr} \right|_{r=r_1, r_2} = 0 \quad (3.7)$$

folgt und die elastischen Anteile der Dehnungen nach dem Hookeschen Gesetz stetige Anstiege haben, verlaufen auch $d\epsilon_{\text{r}}/dr$ und $d\epsilon_{\text{z}}/dr$ an den elastisch-plastischen Grenzen stetig.

Für $k > 1$ erhält man aus (3.3)

$$\left. \frac{d\epsilon_{\varphi}^{\text{pl}}}{dr} \right|_{r=r_1, r_2} = \alpha \frac{d}{dr} (2\Theta - T) \quad (3.8)$$

und damit (vgl. (2.12))

$$\left. \frac{d\sigma_{\text{F}}}{dr} \right|_{r=r_1, r_2} = 0. \quad (3.9)$$

Dies hat idealplastisches Verhalten in unmittelbarer Grenznähe zur Folge. Liegt schließlich mit $k = 1$ lineare Verfestigung vor, so gilt

$$\left. \frac{d\epsilon_{\varphi}^{\text{pl}}}{dr} \right|_{r=r_1, r_2} = \frac{\alpha \frac{d}{dr} (2\Theta - T)}{\frac{P}{E} + 1}, \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{d\sigma_{\text{F}}}{dr} \right|_{r=r_1, r_2} = \frac{P \alpha \frac{d}{dr} (2\Theta - T)}{\frac{P}{E} + 1}. \quad (3.11)$$

4. Beispiel und numerische Ergebnisse

Die Resultate des Abschnittes 3 sollen nun am Beispiel einer elastisch-plastischen Kreisscheibe, die innerhalb eines konzentrischen Kreises mit dem Radius $r = a$ die konstante Übertemperatur $T = T_0$ hat, illustriert werden. Es wird vorausgesetzt, daß der Aufheizvorgang bereits abgeschlossen ist und sich durch Wärmeübergang auf der Kreisringfläche $a \leq r \leq b$ eine stationäre Temperaturverteilung in der Scheibe eingestellt hat. Die Wärmeleitungsgleichung lautet dann [10]

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - m^2 T = 0. \quad (4.1)$$

Mit den Randbedingungen

$$T(a) = T_0, \quad \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=b} = 0 \quad (4.2)$$

findet man

$$T = T_0 \frac{K_1(mb)I_0(mr) + I_1(mb)K_0(mr)}{K_1(mb)I_0(ma) + I_1(mb)K_0(ma)}. \quad (4.3)$$

$I_0(\quad)$, $K_0(\quad)$ sowie $I_1(\quad)$, $K_1(\quad)$ bezeichnen dabei die modifizierten Besselfunktionen nullter bzw. erster Ordnung, der Parameter m^2 ist ein der Wärmeübergangszahl proportionales Maß für die Wärmeverlust an den Scheibenoberflächen.

Zur numerischen Auswertung der Gleichungen ist es vorteilhaft, auf dimensionslose Größen, die in folgender Weise definiert werden, überzugehen:

$$\bar{m} := ma, \quad p := E\alpha T_0 / \sigma_0, \quad q := b/a, \quad \bar{u} := uE / (a\sigma_0) \\ \bar{\epsilon} := \epsilon E / \sigma_0, \quad \bar{\sigma}_{ij} := \sigma_{ij} / \sigma_0.$$

Der Verfestigungsansatz (1) nimmt in dimensionsloser Form die Gestalt

$$\bar{\sigma}_F = 1 + H(\bar{\epsilon}^{pl})^k \quad (4.4)$$

mit

$$H = \frac{P}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_0}{E} \right)^k$$

an, wobei zu beachten ist, daß der Variation des Parameters k bei festgehaltenem H in (4.4) eine Änderung auch von P (oder σ_0) in (1) entspricht.

Für die nachfolgenden numerischen Berechnungen wurden die Werte $\bar{m} = 5$, $p = 3$, $q = 2.5$ und $\nu = 0.3$ gewählt. Die elastisch-plastischen Grenzen liegen dann bei $\rho_1 = 1.08236$ und $\rho_2 = 2.06435$ (vgl. [8]). Auf Bild 1 a sind zunächst die Spannungen für unterschiedliche Exponenten $k < 1$ bei $H = 0.4$ dargestellt. Während für $k = 0.9$ die stetige Tangente von $\bar{\sigma}_\varphi$ an den elastisch-plastischen Grenzen im gewählten Maßstab noch nicht zu erkennen ist, wird bei kleineren Werten von k der kontinuierliche Übergang von elastischem zu plastischem Verhalten deutlich sichtbar. Bei sehr kleinen Exponenten k tritt ferner das interessante Phänomen einer Unterteilung des plastischen Bereichs in eine quasi-idealplastische Zone in der Mitte und zwei quasi-elastische Bereiche in der Nähe

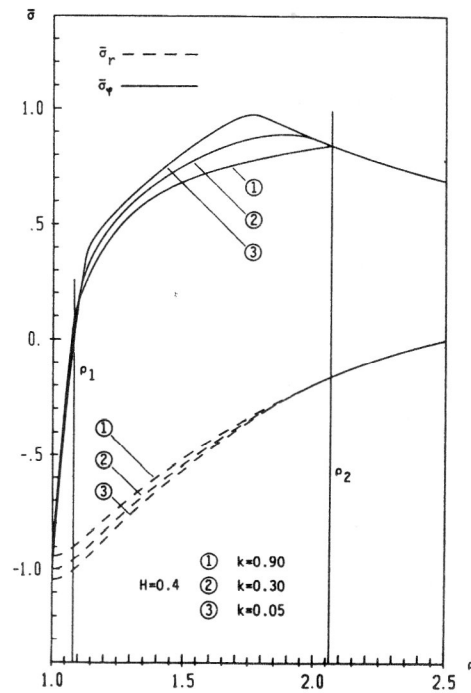


Bild 1 a
Spannungen in der Scheibe

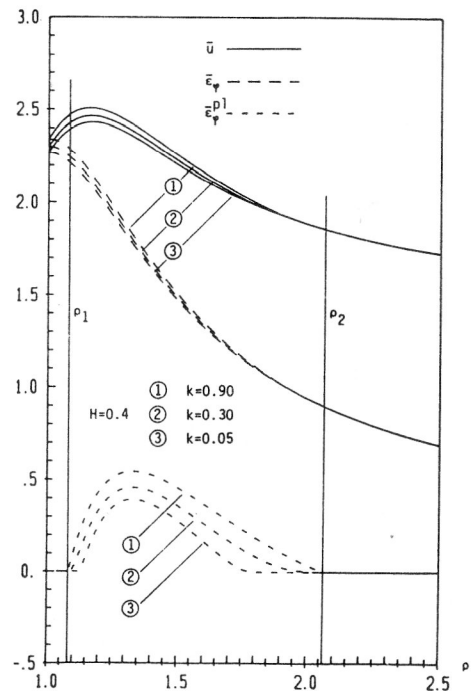


Bild 1 b
Verschiebungen, gesamte und plastische Umfangsdehnungen

von ρ_1 und ρ_2 auf, mit relativ scharfen Übergängen dazwischen. Zur Erklärung dieses Verhaltens betrachtet man den – nur theoretisch interessanten – Grenzfall $k \rightarrow 0$, für den aus (4.4) ein unstetiger Sprung der Fließspannung auf den konstanten Wert $\bar{\sigma}_F = 1 + H$ an den elastisch-plastischen Grenzen folgt. Es ist leicht einzusehen, daß für $k \ll 1$ die Grenzen der plastischen Zone daher gleichsam an jene Stellen verschoben werden, an

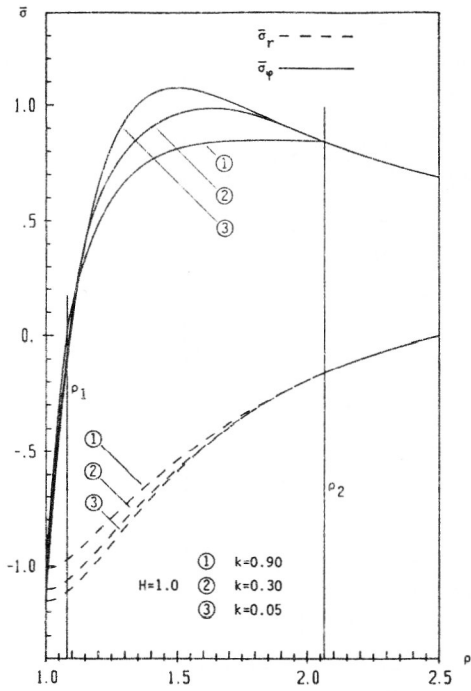


Bild 2 a
Spannungen in der Scheibe

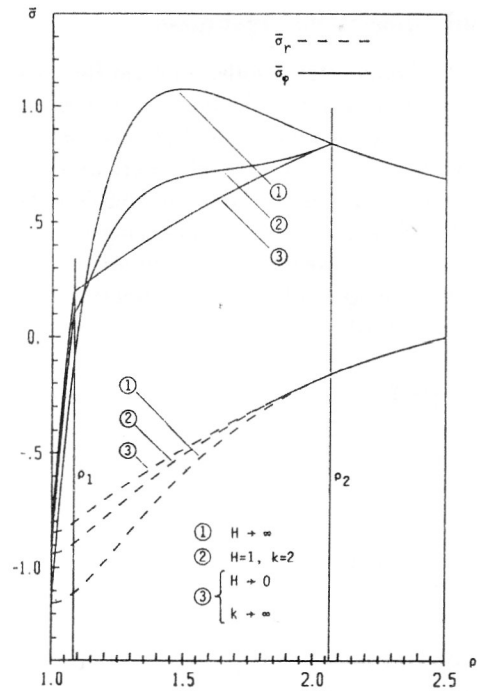


Bild 3 a
Spannungen in der Scheibe

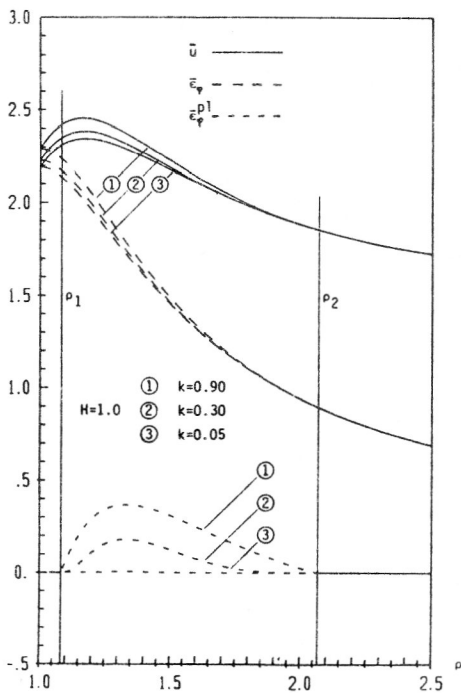


Bild 2 b
Verschiebungen, gesamte und plastische Umfangsdehnungen

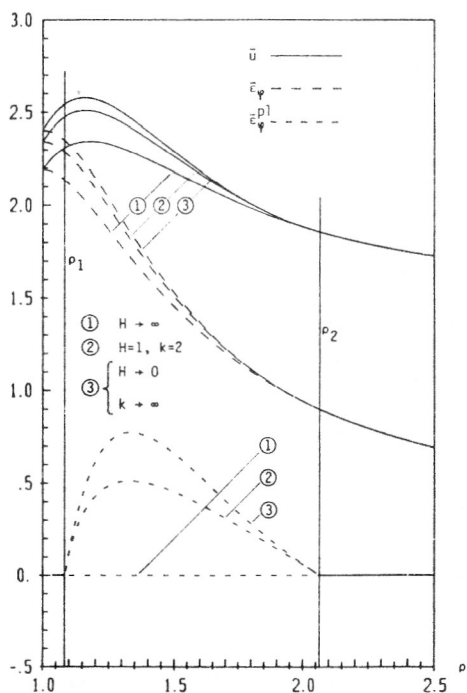


Bild 3 b
Verschiebungen, gesamte und plastische Umfangsdehnungen

denen bei einem unbeschränkt elastischen Material die dimensionslose Vergleichsspannung die Größe $1+H$ erreichen würde. Die entsprechenden Umfangsdehnungen und die Verschiebungen zeigt Bild 1 b; das eben diskutierte Verhalten drückt sich im Verlauf der plastischen Dehnungen klar aus.

Auf den Bildern 2 a und 2 b sind die Spannungen bzw. die Umfangsdehnungen und die Verschiebungen bei den

gleichen Werten des Exponenten k wie vorher, jedoch für $H=1.0$ dargestellt. Auch hier ist der fließende Übergang von elastischem zu plastischem Verhalten bei $k=0.9$ noch nicht zu sehen, wird aber mit kleiner werdendem Exponenten deutlich erkennbar. Für $k \ll 1$ tritt in diesem Fall, durch den größeren Wert von H bedingt, eine quasi-elastische Spannungsverteilung im gesamten plastischen Bereich auf.

Wie Bild 3 a zeigt, verhält sich die ganze Scheibe auch für $H \rightarrow \infty$ elastisch, unabhängig vom Wert des Exponenten k . Die Grenzfälle $H \rightarrow 0$ oder $k \rightarrow \infty$ haben dagegen idealplastisches Verhalten im gesamten plastischen Bereich zur Folge. Dieses tritt in der Nähe der elastisch-plastischen Grenzen auch dann auf, wenn $1 < k < \infty$ gilt und H einen endlichen Wert größer als Null annimmt. Auf Bild 3 b sind schließlich wieder die zu diesen drei Fällen gehörenden Umfangsdehnungen und Verschiebungen dargestellt. Eine ausführliche Diskussion des Spezialfalles der linearen Verfestigung findet man in [8].

LITERATUR

- [1] Rees, D. W. A.: An experimental appraisal of the equi-strain multi-surface hardening model. Acta Mechanica 70 (1987), 193 – 219.
- [2] Gamer, U.: Die Eigenspannungen in der Umgebung der kaltverfestigten Bohrung bei nichtlinearer Verfestigung. Technische Mechanik 8 (1987), 25 – 28.
- [3] Gamer, U.: The expansion of the elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening. Int. J. Mech. Sciences 30 (1988), im Druck.
- [4] Gamer, U.: Zur Verfestigung elastisch-plastischer Werkstoffe. ZAMM 69 (1989), im Druck.

- [5] Gamer, U.: The effect of a special hardening law on continuity in elastic-plastic problems with rotational symmetry. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [6] Gamer, U.; Mack, W.: Zur elastisch-plastischen Deformation dreh-symmetrisch erhitzter Kreisscheiben. ZAMP 38 (1987), 137 – 142.
- [7] Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N.: Theory of elasticity. New York, 1970.
- [8] Mack, W.; Gamer, U.: Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflächenförmigen Wärmequelle. Forsch. Ing. Wes. 51 (1985), 160 – 164.
- [9] Ismar, H.; Mahrenholtz, O.: Technische Plastomechanik. Braunschweig, 1979.
- [10] Melan, E.; Parkus, H.: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien, 1953.

Anschrift der Verfasser:

Dr. Werner Mack
 Prof. Dr. Udo Gamer
 Technische Universität Wien
 Institut für Mechanik
 Wiedner Hauptstraße 8 – 10
 A – 1040 Wien