

# Zum Kontaktproblem zwischen festen Körpern mit Berücksichtigung der Reibung - Modelle und Lösungswege

Hans Gläser

Das als endlichdimensionale Aufgabe formulierte Kontaktproblem wird im allgemeinen durch ein System nichtlinearer Gleichungen und Ungleichungen, letztere infolge einseitiger Restriktionen geometrischer und physikalischer Natur, beschrieben. Der Einsatz der Finite-Elemente-Methode (FEM) erfordert eine schwache Form der Gleichgewichtsgleichungen. Die Berücksichtigung möglicher Reibungskräfte zwischen den Kontaktflächen macht das Problem nichtkonservativ. Folglich existiert kein im üblichen Sinne differenzierbares Energiepotential, d. h. eine klassische Minimumformulierung ist nicht möglich, und die gebräuchlichen Methoden der nichtlinearen Optimierung zur Erfassung der Kontaktbedingungen in Ungleichungsform wie die Lagrangesche Multiplikatormethode, das Penalty-Verfahren, die augmented-Lagrangesche Multiplikatormethode oder Verfahren der zulässigen Richtungen sind genau genommen nicht anwendbar.

Andererseits führt die numerische Behandlung der das Kontaktproblem mit Reibung beschreibenden Variationsungleichung mit der Einführung konvexer Superpotentiale nach Moreau und subdifferenzieller Formulierungen für das Kontaktgesetz auf ein äquivalentes Minimumproblem. Panagiotopoulos gibt in [1] z. B. für linearelastische Kontaktkörper vom Volumen  $V$  und dem Rand  $A = A_u \cup A_f \cup A_c$  und Coulombscher Reibung zwischen den Kontaktflächen die Variationsungleichung

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) + \Phi(\vec{v}) - \Phi(\vec{u}) \geq (\vec{f}, \vec{v} - \vec{u}) + \int_{A_f} t_i (v_i - u_i) dA \quad (1)$$

für alle zulässigen  $v_i$  an. Darin bedeuten speziell die Bilinearform  $a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u})$  die elastische Energie und  $\Phi(\vec{v})$  die nichtdifferenzierbare Reibungsenergie, die in einem geeigneten Raum als Funktional mit der Eigenschaft

$$\Phi(\vec{v}) = \begin{cases} \int_{A_c} j(\vec{v}) dA & \text{wenn } j(\vec{v}) \text{ integrierbar ist} \\ \infty & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (2)$$

definiert ist.

In (2) stellt  $j(\vec{v})$  ein konvexes, nach unten halbstetiges, eigentliches Funktional dar.

Dieses ist nach Panagiotopoulos [1] für den Normalkontakt definiert zu

$$j_n(u_n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } u_n \leq s \\ \infty & \text{wenn } u_n > s \end{cases}, \quad (3)$$

wobei  $s$  den Normalenabstand (Spaltbreite) zwischen den Kontaktflächen im unverformten Zustand kennzeichnet, und für Coulombsche Reibung als

$$j_t(u_t) = t_t |u_t| \quad (4)$$

Zur Untersuchung der Differentiationseigenschaften nichtdifferenzierbarer Funktionale (sog. Superpotentiale) benutzt man den Subgradienten

$$j(\vec{v}) - j(\vec{u}) \geq \langle \vec{t}, \vec{v} - \vec{u} \rangle \quad (5)$$

und versteht unter dem Subdifferential die lokale Menge aller Subgradienten

$$\partial j(u) = \left\{ \vec{t} \in T : j(\vec{v}) - j(\vec{u}) \geq \langle \vec{t}, \vec{v} - \vec{u} \rangle \forall \vec{u}, \vec{v} \in U \right\} \quad (6)$$

Die subdifferenzielle Formulierung der konstitutiven Kontaktbeziehungen gelten ebenfalls punktweise und heißen damit

$$-t_n \in \partial j_n(u_n), \quad -t_t \in \partial j_t(u_t) \quad (7)$$

In [1] findet man für eine Vielzahl einseitiger Randbedingungen und konstitutiver Gleichungen (elastisch-plastisches Material, locking-Material u. a. m.) die entsprechenden subdifferenziellen Formen.

Die Aufgabe besteht nun darin, den Satz zulässiger Verschiebungen  $u_i$  zu finden, der die Ungleichung (1) erfüllt. Diese ist äquivalent dem Minimumproblem: gesucht ist das Verschiebungsfeld  $u_i$ , für welches

$$u_i \in U_{zul} : \pi(\vec{u}) = \min \left\{ \pi(\vec{v}) \forall \vec{v} \in U_{zul} \right\} \quad (8)$$

gilt, wobei

$$\pi(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) + \Phi(\vec{v}) - (\vec{f}, \vec{v}) - \int_{A_c} t_i v_i dA$$

ist.

Für eine Reihe spezieller Superpotentiale  $j(\vec{u})$  sind die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung von (8) nachgewiesen [1]. Es wird gezeigt, daß dies im Falle linearelastischer Kontaktkörper bei Coulombscher Reibung mit einem endlich großen Verschiebungsrand  $A_u > 0$  zutrifft. Das restringierte Minimierungsproblem ist nach der Diskretisierung nicht einem algebraischen Gleichungssystem äquivalent. Statt dessen ergibt sich ein quadratisches oder eben allgemeines, ableitungsfreies, nichtlineares Optimierungsproblem; siehe Böhm [2].

Bei der praktischen numerischen Analyse treten in der diskretisierten Form hierbei um wesentlichen zwei Schwierigkeiten auf; der nichtdifferenzierbare Ausdruck

$\Phi(\vec{v}) = \sum_i j_i(v_i)$  und die Restriktionen  $j_i(v_i) < \infty$ . Die

Nichtdifferenzierbarkeit ist mit Hilfe einer Regularisierung des Funktionals  $\Phi \rightarrow \Phi_\epsilon$ , abhängig von einem kleinen Parameter  $\epsilon$  überbrückbar und führt auf eine entsprechende Variationsgleichung; siehe z. B. Oden, Martins [3]. Die Regularisierung hat sich zur Prüfung von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Variationsungleichungen als geeignet erwiesen, dagegen ist sie wegen ihrer schwachen Konvergenz der Näherung gegen die exakte Lösung mit  $\epsilon \rightarrow 0$  für praktische Anwendungsfälle unvorteilhaft.

Umfangreiche Untersuchungen der Kontaktprobleme mit Reibung hat Klarbring [4] vorgenommen. Die von ihm benutzten Problemformulierungen entsprechen innerhalb der mathematischen Programmierung den sog. linearen Komplementaritätsproblemen, für deren Lösungen verschiedene direkte und iterative Methoden anwendbar sind.

Die Zurückführung auf ein lineares Komplementaritätsproblem ist dann möglich, wenn sich die subdifferenziellen Beziehungen, z. B. des Kontaktgesetzes, des Coulombschen Reibungsgesetzes usw. stückweise linear darstellen lassen derart, daß sie mit einem nichtnegativen Multiplikator ausdrückbar sind. Hierzu als Beispiel das reibungsfreie Kontaktproblem, das sog. static law: Die zutreffenden Kontaktbedingungen heißen in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \text{wenn } u_n - s < 0, \quad \text{dann } t_n &= 0 \\ \text{bzw. } u_n - s \leq 0, \quad \text{dann } t_n &= -c_n(u_n - s) \end{aligned} \quad (9)$$

In diesen Beziehungen zwischen der Normalkraft und Normalverschiebung am Kontaktrand bedeuten  $c_n$  eine Steifigkeit und  $s$  die Spaltbreite im nichtdeformierten Zustand.

Das Kontaktgesetz ist in subdifferenzieller Form

$$F(-t_n) = -t_n \leq 0, \quad u_n \in \partial J(-t_n) \quad (10)$$

aufschreibbar, wenn man gemäß dem Indikator-konzept für den konvexen Satz  $C_n = \{-t_n \in R: t_n \leq 0\}$  die Indikatorfunktion

$$I_{C_n}(t_n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t_n \in C_n \\ \infty & \text{wenn } t_n \notin C_n \end{cases} \quad (11)$$

einführt. Die Relationen sind dann äquivalent zu

$$\begin{aligned} u_n - s + c_n^{-1} \cdot t_n &\in I_{C_n}(-t_n) \\ &= N_{C_n}(-t_n), \end{aligned}$$

wobei  $B$  für das stetig differenzierbare Funktional  $F(-t_n) = -t_n$  einen Satz Indizes umfaßt, für den die Bedingungen  $F_i \leq 0$  als Gleichung erfüllt sind. Wenn für diesen Satz ein  $t_n \in R^n$  existiert derart, daß  $\langle t_n, \nabla F_i(-t_n) \rangle < 0 \quad \forall i \in B$  ist, dann gilt für den sog. Normalenkegel  $R^n$

$$N_{C_n}(-t_n) = \left\{ \begin{aligned} u_n &= \sum_i \lambda_i \cdot \nabla F_i(-t_n) = -\lambda, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad F_i(-t_n) \leq 0, \\ \lambda_i \cdot F_i(-t_n) &= 0, \quad i = 1 \dots m \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dies bedeutet, daß der Subgradient mit der äußeren Randnormalen der Randkurve  $F_i(-t_n) = 0$  des geschlossenen Raumes  $C_n$  aller  $t_n$  relativierbar ist. Im obigen Fall wird speziell mit der Kontaktbedingung

$$\begin{aligned} F_i(-t_n) &= -t_n \leq 0 \\ u_n &= \lambda_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial t_n} = -\lambda \end{aligned} \quad (13)$$

Wählt man nun für die Indikatorfunktion das Superpotential  $I_{C_n} = J$ , dann ist das Subdifferential  $u_n \in \partial J(-t_n)$  gleich dem Normalenkegel auf  $C_n$  und man gewinnt damit als lineares Komplementaritätsproblem

$$\begin{aligned} u_n &= s - c_n^{-1} \cdot t_n - \lambda, \\ \lambda &\geq 0, \quad t_n \leq 0, \quad \lambda \cdot t_n = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

dessen Lösungsmöglichkeiten z. B. von Kaneko [5] untersucht wurden.

Unter dem Aspekt der Nutzung bereits entwickelter Software zur Lösung von Feldproblemen auf der Basis des Verschiebungsgrößenverfahrens erweist sich die Verwendung einer geeigneten Variationsformulierung des Gleichgewichts z. B. für die Zuwachsgrößen und die Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Ungleichungsnebenbedingungen auf iterativem Wege nach einem speziellen Kontaktalgorithmus als günstig. Ähnliches gilt für die Auswahl der ins Auge gefaßten Kontaktgesetze und deren Einbau.

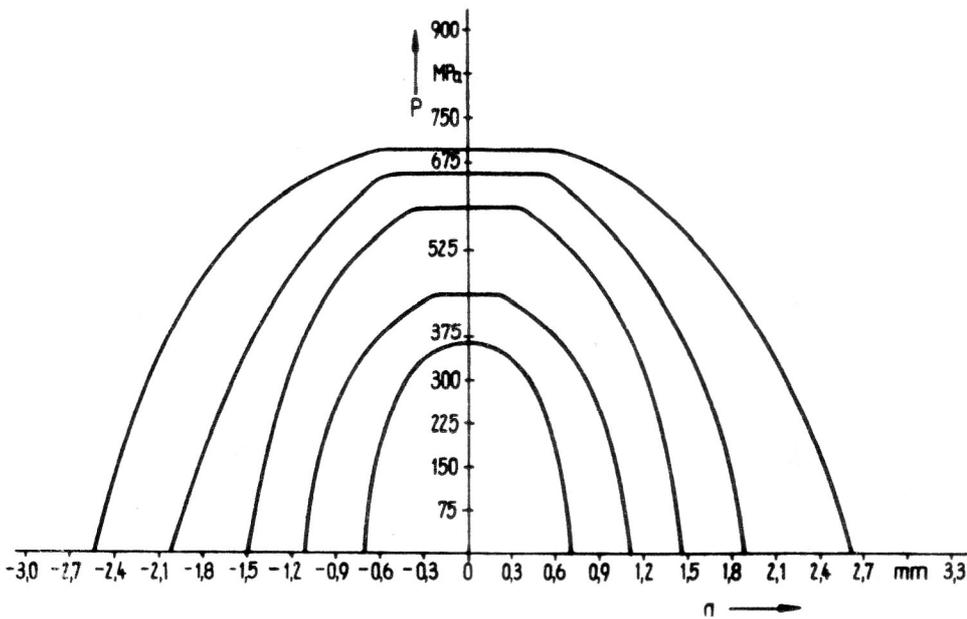
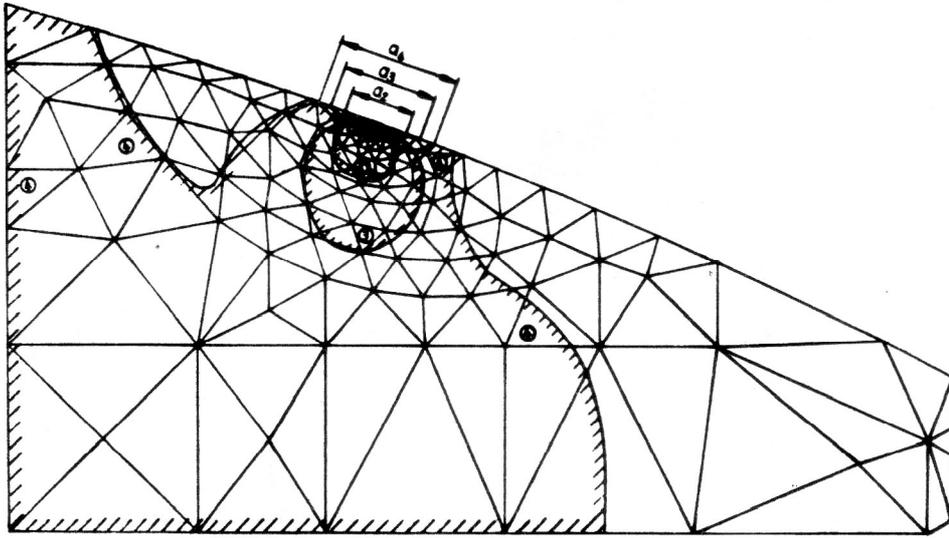
So zeigt, z. B. nach Baaijens [6], die Methode der gewichteten Residuen Parallelen zur Lagrangeschen Multiplikatormethode, womit, übereinstimmend mit der Literatur, z. B. Campos, Oden, Kikuchi [7] Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit der angestrebten Lösungen möglich sind. Unterwirft man ein virtuelles Verschiebungsfeld den der Gewichtsfunktionen vergleichbaren Restriktionen, dann soll für die nachfolgenden Untersuchungen unter Nutzung des Programms FIDEFA nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit die Variationsgleichung in den Zuwachsgrößen  $\delta \dot{u}_L$  als Ausgangsbeziehung gelten.

$$\begin{aligned} \int_{\dot{V}} \dot{T}^{KL} \delta \dot{E}_{KL} d\dot{V} + \int_{\dot{V}} \dot{T}^{KM} \dot{u}_M^L |_{\dot{M}} \delta \dot{u}_L |_{\dot{K}} d\dot{V} - \int_{\dot{V}} \dot{\rho} \cdot \dot{f}^L \cdot \delta \dot{u}_L d\dot{V} \\ - \int_{\dot{A}_t} \dot{T}^L \cdot \delta \dot{u}_L d\dot{A} - \int_{\dot{A}_c} \dot{T}^L \cdot \delta \dot{u}_L d\dot{A} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Das FEM-Programm FIDEFA gestattet die Lösung ebener und axialsymmetrischer Feldprobleme für endlich große, elastisch-plastische Deformationen in Lagrange-scher Beschreibung.

Mit der Version FIDEFA-KONTAKT ist es möglich, das Kontaktproblem zwischen Körpern genannter Eigenschaften und einem starren Hindernis bei lastabhängiger Kontaktfläche für die beiden Grenzfälle reibungsfreien Gleitens und vollkommenen Haftens zu beschreiben [8], [9].

Die Bilder 1 und 2 zeigen als Berechnungsbeispiel die belastungsabhängige Ausbreitung der plastischen Zonen im vernetzten Quadranten des Querschnittes einer Ovaldichtung und die zugehörigen Normaldruckverteilungen für diese Grenzfälle.



**Bild 1**  
 Plastizierung im vernetzten Quadranten des Querschnitts einer Ovaldichtung und Normalkontakt-druckverteilung für den Fall des reibungsfreien Gleitens

Bemerkenswert ist das für die Dichtungstechnik bedeutsame Resultat, daß übereinstimmend mit experimentellen Untersuchungen im erstgenannten Fall die Plastizierung des Querschnittes nicht vom Kontakttrand unmittelbar her einsetzt, sondern in einem Gebiet des randnahen Hinterlandes. Damit verformt sich die Dichtungskontaktfläche im Bereich kleiner und mittlerer Pressungen nur elastisch, was sich dichtungstechnisch ungünstig auswirkt.

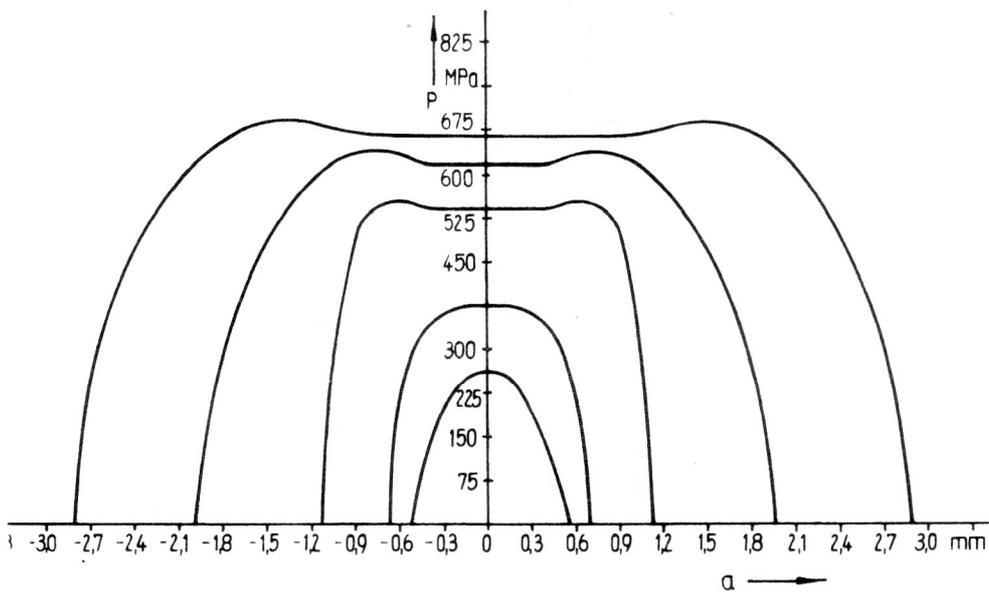
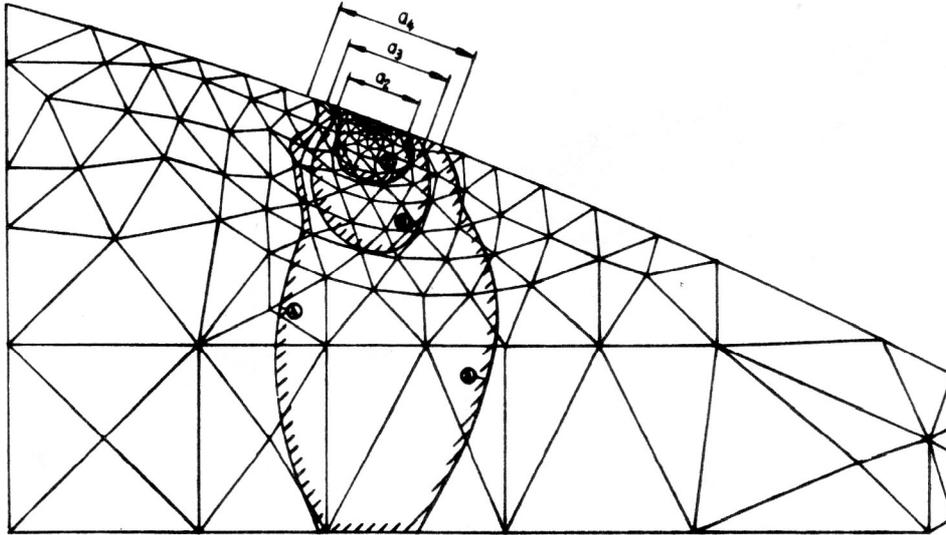
Die Erfassung tangentialer Kontaktkräfte auf der Basis unterschiedlicher konstitutiver Beziehungen, die vermöge eines speziellen Kontaktalgorithmus im Programm FIDEFA-Reibung Berücksichtigung finden sollen, sind Gegenstand nachfolgender Betrachtungen.

Der Lösung von Kontaktproblemen mit Reibung im konstruktiven Anwendungsbereich, d. h. Kontaktkörper mit linearelastischen Eigenschaften liegt das Coulombsche Reibungsgesetz oder eine modifizierte Form davon zugrunde. Stellvertretend für die Mannigfaltigkeit aus der Literatur bekannter Entwicklungsformen sei das

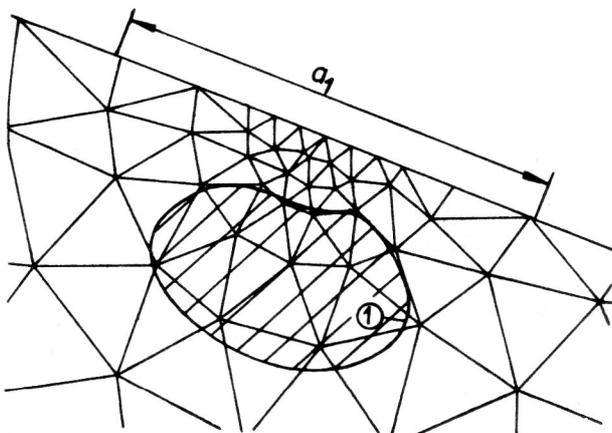
von Oden und Pires [10] nichtlokale und nichtlineare Reibungsgesetz genannt.

Die weitverbreitete Anwendung des klassischen Coulombschen Reibungsgesetzes bis hin zu Aufgabenstellungen der Umformtechnik, bei denen diese Kontaktbeziehung schon von der phänomenologischen Seite her zu unrealistischen Ergebnissen führt, ist mit seiner Einfachheit einerseits und mit der Schwierigkeit der Messung tatsächlicher Kontaktspannungen beim Umformprozeß bzw. der Kontaktparameter speziell entwickelter Reibungsmodelle andererseits, erklärbar.

Das Konzept, die Kontaktreibung zwischen festen Körpern als reversibles Mikrogleiten und irreversibles Makrogleiten zu interpretieren, und für deren Beschreibung ein Gleitkriterium bzw. eine Gleitfunktion sowie eine inkrementelle assoziierte (oder auch nichtassoziierte) Gleitregel, die die Kontaktgeschichte beschreibt – analog zur Fließtheorie elastisch-plastisch deformierbarer Körper mit Verfestigung – einzuführen, geht auf Fredriksson [11] zurück. Mit der Vervollkommnung dieser Theo-



**Bild 2**  
Plastizierung im vernetzten Quadranten des Querschnitts einer Ovaldichtung und Normalkontaktdruckverteilung für den Fall des Haftens



**Bild 3**  
Plastizierungsbeginn im randnahen Hinterland

rie, die die Kontaktreibung bei Metallumformprozessen realistischer erfasst sowie das klassische Coulombsche Reibungsgesetz als Sonderfall enthält, verbinden sich Arbeiten von Michalowski und Mroz [12], Pires, Courtney-Pratt und Eisner [13], Cheng und Kikuchi [14], Klarbring [4], Kaneko [5], Baaijens [6] u. a. m.

Der zu entwickelnden Version liegen folgende konstitutive Kontaktannahmen zugrunde:

- Die relative tangentielle Kontaktgeschwindigkeit ist mit einer objektiven tangentialen Spannungsgeschwindigkeit bzw. Kontaktkraftgeschwindigkeit verknüpft.
- Die relative Geschwindigkeit auf dem Kontakttrand setzt sich aus einem reversiblen (elastischen) und einem irreversiblen (plastischen) Anteil zusammen. Der erste kennzeichnet das Haften, der zweite den Gleitvorgang.
- Einführung eines Gleitkriteriums bzw. einer Gleitfunktion, die die Belastungsgeschichte auf dem Kontakttrand berücksichtigt.
- Verwendung eines assoziierten Gleitgesetzes.

In [6] ist hierzu ein detailliert ausgearbeitetes Konzept angegeben, das in den wichtigsten Passagen, zum Teil geringfügig abgeändert, wiedergegeben werden soll.

Im aktuellen Kontaktpunkt zweier Körper A und B, z. B. einem deformierbaren Körper A (Referenzkörper) und einem starren Hindernis, gelten für den Positionsvektor und die äußeren Normalenvektoren der als stetig angenommenen Kontaktfläche  $A_c$  mit  $\alpha = A, B$

$$\vec{r}_A(x_{Ai}, t) = \vec{r}_B(x_{Bi}, t),$$

$$n_{Ak} = -n_{Bk}, \quad (16)$$

wobei  $\vec{r}_\alpha(t) = \vec{R}_\alpha(t_0) + \vec{u}_\alpha(t)$  ist und  $\vec{x}_\alpha = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha})^T$

zwei, im allgemeinen krummlinige Oberflächenkoordinaten darstellen; siehe hierzu auch Schreurs [15]. Der Oberflächenspannungsvektor  $\vec{t}_\alpha$  und der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha$  werden in bekannter Weise in ihre normale und tangential Komponente zerlegt. Für sie gelten im Kontaktfall auf  $A_c$

$$\begin{aligned} t_A^{(n)} = t_B^{(n)} = p \leq 0, \quad t_A^{(n)} = -t_B^{(n)} \\ t_A^{(n)l} = -t_B^{(n)l} = -(v_B^l - v_A^l) \cdot n_l \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Die Gleitgeschwindigkeit heißt unter Beachtung der bei endlichen Deformationen zutreffenden skalaren Kontaktbedingungen

$$\Psi(\vec{r}, A_B(t)) \leq 0, \quad \dot{t}^{(n)} \leq 0,$$

$$\dot{t}^{(n)} \cdot \Psi = 0 \text{ auf } A_c(t) \quad (18)$$

schließlich

$$v_{BA}^l = \dot{v}_B^l - \dot{v}_A^l = (I - n_l n^l)(v_B^l - v_A^l) \quad (19)$$

Das heißt, im Kontaktfall gilt wegen  $(v_B^k - v_A^k) \cdot n_k = 0$

für die Gleitgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{BA} = \dot{\vec{v}}_B - \dot{\vec{v}}_A \text{ bzw.} \quad (20)$$

$$v_{BA}^l = \dot{v}_B^l - \dot{v}_A^l$$

Andererseits sind die Vektoren  $\vec{t}_{t\alpha}$  und  $\vec{n}_\alpha$  stets orthogonal

$$t_\alpha^{(t)k} \cdot n_{\alpha k} = 0 \quad \alpha = A, B \quad (21)$$

Hieraus folgt durch Zeitableitung und dem leicht verifizierbaren Zusammenhang

$$\dot{n}_{\alpha k} = -v^l|_k \cdot n_{\alpha l} \quad \alpha = A, B \quad (22)$$

die Geschwindigkeits- bzw. Zuwachsform der Orthogonalitätsbedingung

$$n_l (\dot{t}^l - v^l|_k \cdot t^{(t)k}) = 0 \quad (23)$$

In entsprechender Weise läßt sich aus der zweiten Gleichung (17) im aktuellen Kontaktfall eine Zuwachsform für die tangentialen Kontaktkräfte entwickeln.

$$\dot{t}_A^l + \dot{t}_B^l = v_{BA}^k \cdot t_{Bk}^{(t)l} = -v_{BA}^k \cdot t_{Ak}^{(t)l} \quad (24)$$

Die Orthogonalitätsforderung (21) bildet gleichfalls die Basis zur Berechnung der für das inkrementelle konstitutive Kontaktgesetz erforderlichen objektiven Tangentialkraftgeschwindigkeit

$$\dot{\nabla}_t^l = (\dot{t}_\alpha - v^l|_k t_\alpha^{(t)l}), \quad \alpha = A, B \quad (25)$$

die der Oldroyd-Ableitung entspricht.

Damit nehmen die Geschwindigkeitsformen der Orthogonalitätsbedingung (23) und des Wechselwirkungsgesetzes (24) im Hinblick auf die Formulierung eines isotropen Kontaktgesetzes folgende Gestalt an.

$$\begin{aligned} n_{\alpha l} \cdot \dot{\nabla}_t^l = 0, \\ \dot{\nabla}_t^l = -\dot{t}_A^l - v_{BA}^l \cdot t_{Ak}^{(t)l} + v_{BA}^l|_k \cdot t_{Ak}^{(t)l} \quad \alpha = A, B \end{aligned} \quad (26)$$

Die letzte Gleichung dient zur wahlweisen Elimination einer der beiden Tangentialkraftgeschwindigkeiten gemäß der alternativen Vereinbarung von A oder B als Referenzkörper.

Beim Modell des reversiblen Kontaktes wird angenommen, daß die relative Geschwindigkeit der Oberflächenrauheitsspitzen  $\vec{v}_{hA}$  und  $\vec{v}_{hB}$  der Körper A und B in den Kontaktpunkten  $P_A(\vec{x}_A)$  und  $P_B(\vec{x}_B)$  gleich Null ist; d. h. es liegt Haftung der Kontaktflächen vor.

$$v_{hA}^l - v_{hB}^l = 0 \quad (27)$$

Als Verformungsmaß erscheint die Relativgeschwindigkeit zwischen den Oberflächenrauheitsspitzen und der Kontaktkörper selbst als zweckmäßig, die sich über einen Elastizitätstensor  $M_{\alpha k}^l$  mit den objektiven tangentialen Kontaktkraftgeschwindigkeiten in einer konstitutiven Gleichung verknüpfen lassen.

$$v_{h\alpha}^l - v_\alpha^l = M_{\alpha k}^l \cdot \dot{\nabla}_t^k \quad \alpha = A, B \quad (28)$$

Infolge der Undurchdringbarkeit der Kontaktpunkte  $P_\alpha(\vec{x}_\alpha)$  in Flächennormalenrichtung  $\vec{n}_{\alpha l}$  gilt dabei in jedem Punkt des Kontaktgebietes  $(v_{hA}^l - v_A^l) \cdot n_l = 0$ . Aus (27) und (28) gewinnt man schließlich die Beziehung für den haftenden Kontakt.

$$\begin{aligned} M_{Ak}^l \cdot \dot{\nabla}_t^k + M_{Bk}^l \cdot \dot{\nabla}_t^k = v_B^l - v_A^l \\ = v_{BA}^l + (n_{BA}^l + (n_{Al} n_A^l)(v_B^l - v_A^l)) = v_{BA}^l \end{aligned} \quad (29)$$

Beim Modell des irreversiblen Gleitens erfolgt analog zur Theorie der elastisch-plastischen Deformation eine Zerlegung der Geschwindigkeit in einen reversiblen  $\vec{v}_{BA}^r$  und einen irreversiblen  $\vec{v}_{BA}^{ir}$  Anteil.

$$v_{BA}^l = v_{BA}^r + v_{BA}^{ir} \quad (30)$$

Der reversible Anteil ist nach (29) bekannt.

$$v_{BA}^r = v_{BA}^l - v_{BA}^{ir} = M_{Ak}^l \cdot \dot{\nabla}_t^k - M_{Bk}^l \cdot \dot{\nabla}_t^k \quad (31)$$

Bei Bezugnahme auf Körper A kann  $\vec{t}_{tB}$  mit Hilfe der Gleichung (26) in (31) eliminiert werden. Mit der Definition von  $\vec{t}_{tA}$  nach (25) und der Abkürzung

$$\underline{C} = (M_{Ak}^l + M_{Bk}^l)$$

ergibt sich aus (31)

$$\begin{aligned} \dot{t}_A^n &= C_1^n (v_{BA}^l - v_{BA}^{ir}) - C_1^n \cdot M_{Bk}^m \cdot \dot{t}_A^k |_{m=1} \cdot v_{BA}^l \\ &+ (C_1^n \cdot M_{Ak}^m \cdot v_{A|_m}^k + C_1^n \cdot M_{Bk}^m \cdot v_{B|_m}^k) \dot{t}_A^k |_{m=1} \end{aligned} \quad (32)$$

Für den Fall isotroper reversibler Eigenschaften der Kontaktflächen, d. h.  $M_{Ak}^m = M_{Bk}^m = \frac{1}{2\epsilon} \cdot I$ ,  $\underline{C} = \epsilon \cdot I$ , wobei  $\epsilon$  einen Steifigkeitsparameter darstellt, vereinfacht sich (32) zu

$$\begin{aligned} \dot{t}_A^n &= \epsilon (v_{BA}^n - v_{BA}^{ir}) \\ &= -\frac{1}{2} \dot{t}_A^n |_{l=1} \cdot v_{BA}^l + \frac{1}{2} (v_{A|_l}^n + v_{B|_l}^n) \dot{t}_A^l \end{aligned} \quad (33)$$

Richtung und Größe des irreversiblen Geschwindigkeitsanteiles  $\vec{v}_{BA}^{ir}$  werden in Analogie zur Fließtheorie aus einer Normalenregel und einer Konsistenzgleichung bestimmt. In diesem Sinne tritt zwischen den Kontaktpunkten  $P_A$  und  $P_B$  irreversibles Gleiten ein, wenn die Tangentialkontaktkräfte  $\vec{t}_{tB} = -\vec{t}_{tA}$  kritische Werte annehmen.

Mit Körper A als Bezugskörper kann man als Gleitkriterium von einer Gleitfunktion  $f$  fordern, daß die Kontaktkräfte  $\vec{t}_{tA}$  und  $\vec{t}_{nA}$  in einem Kontaktpunkt die Bedingung

$$f(\vec{t}_A^{(t)l}, \vec{t}_A^{(n)}, h_A, h_B) \leq 0 \quad (34)$$

stets erfüllen. Irreversibles Gleiten zwischen den Punkten  $P_A$  und  $P_B$  tritt nur auf, wenn diese Bedingung ausschließlich mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist.  $h_A$  und  $h_B$  sind in diesem Falle skalare, die Belastungsgeschichte charakterisierende Parameter, die von der irreversiblen Gleitgröße abhängig angenommen werden. Selbstverständlich erlaubt eine solche Formulierung wie die der Gleitfunktion nach (34) die Berücksichtigung weiterer Einflußgrößen, z. B. zur Beschreibung anisotroper Gleiteigenschaften, zur Erfassung des Einflusses eines möglichen Schmierfilms zwischen den Kontaktpunkten u. a. m.; allein der gegenwärtige Mangel entsprechender experimenteller Daten und deren begrenzte Determinierbarkeit lassen die obige Beschränkung insbesondere unter dem Aspekt vertretbaren Rechenaufwandes als sinnvoll erscheinen.

Der Satz aller Kontaktkraftvektoren  $\vec{t}_A = \vec{t}_{tA} + \vec{t}_{nA} \cdot \vec{n}_A$ , wobei  $\vec{t}_{tA}$  und  $\vec{t}_{nA}$  die Gleitbedingung erfüllen, bilden die Gleitgrenzfläche

$$\begin{aligned} S(h_A, h_B, \dots) \\ = \left\{ \vec{t}_A^{(t)l} \cdot \vec{g}_l + \vec{t}_A^{(n)} \cdot \vec{n}_l : f(\vec{t}_A^{(t)l}, \vec{t}_A^{(n)}, h_A, h_B, \dots) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

Die Ableitung der Gleitfunktion bezüglich  $\vec{t}_{tA}$  ist definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{t}_A^{(t)l}} \cdot n_{A1} = 0 \quad (36)$$

Damit ist die Ableitung ein Vektor, der in der Tangential- bzw. Kontaktebene liegt. Bei vorausgesetzter Isotropie fällt dieser mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_{BA}^{ir}$  zusammen. Es gilt die Normalen- bzw. assoziierte Gleitregel

$$\vec{v}_{BA}^{ir} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{t}_A^{(t)l}}, \quad \lambda > 0 \quad (37)$$

Mit der effektiven irreversiblen Gleitgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{BA}^{ir} = \|\vec{v}_{BA}^{ir}\| \cdot \vec{g}_l$$

folgt

$$\vec{v}_{BA}^{ir} = \vec{v}_{BA} \cdot \vec{k}, \quad \vec{k} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \vec{t}_A^{(t)l}} \cdot \vec{g}_l}{\|\frac{\partial f}{\partial \vec{t}_A^{(t)l}}\|} \quad (38)$$

Übereinstimmend mit experimentellen Untersuchungen von Fredriksson [11] wird von Baaijens [6] vorgeschlagen, als Parameter für die Kontaktgeschichte die effektive irreversible Gleitverschiebung, definiert als Zeitintegral des irreversiblen Anteils der effektiven Gleitgeschwindigkeit, anzusetzen.

$$\vec{u}_\alpha^{ir}(r_\alpha^m, t) = \int \vec{v}_{BA}^{ir}(r_\alpha^m, t) dt \quad \alpha = A, B \quad (39)$$

Die Gleitfunktion wird bei Isotropie im betrachteten Kontaktpunkt als von beiden Parametern abhängig angenommen.

$$\begin{aligned} f(\vec{t}_A^{(t)l}, \vec{t}_A^{(n)}, \vec{u}_A^{ir}, \vec{u}_B^{ir}) \\ = \|\vec{t}_A^{(t)l} \cdot \vec{g}_l\| - t_S \|\vec{u}_A^{ir}, \vec{u}_B^{ir}, \vec{t}_A^{(n)}\| \end{aligned} \quad (40)$$

$t_S$  ist die sog. Gleitkraft analog zur Fließspannung  $\sigma_S$  in der Mises-Fließtheorie. Mit dieser Wahl von  $f$  werden

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{t}_A^{(t)l}} = \frac{\vec{t}_A^{(t)l} \cdot \vec{g}_l}{\|\vec{t}_A^{(t)l} \cdot \vec{g}_l\|} \quad \text{und} \quad \vec{k} = \frac{\vec{t}_A^{(t)l} \cdot \vec{g}_l}{\|\vec{t}_A^{(t)l} \cdot \vec{g}_l\|}$$

und für die zeitliche Änderung von  $\vec{u}_B^{ir}$  ist die materielle Zeitableitung, d. h.  $\dot{\vec{u}}_B^{ir} + v_{BA}^l \cdot \vec{u}_B^{ir} |_{l=1}$  anzuwenden.

Damit kann für die obige Fließfunktion folgende Konsistenzgleichung gewonnen werden.

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{t}_A^{(t)l} \cdot \vec{g}_l - q_n \cdot \vec{t}_A^{(n)} - q_A \cdot \vec{u}_A^{ir} \\ - q_B (\vec{u}_B^{ir} + v_{BA}^l \cdot \vec{u}_B^{ir} |_{l=1}) = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

wobei folgende Abkürzungen gebraucht werden:

$$q_n = \frac{\partial t_S}{\partial t^{(n)}}, \quad q_A = \frac{\partial t_S}{\partial \vec{u}_A^{ir}}, \quad q_B = \frac{\partial t_S}{\partial \vec{u}_B^{ir}} \quad (42)$$

Für den Fall isotroper Kontakteigenschaften, d. h. durch die Substitution der konstitutiven Gleichung (37) in (41) und Verwendung von (39) folgern wir als allgemeine konstitutive Gleichung auf der Basis obengenannter Modells, das eine Klasse von Reibungseigenschaften u. a. auch das klassische Coulombsche Reibungsgesetz einschließt, den Zusammenhang

$$\frac{ir}{v_{BA}} = \frac{1}{\vec{k} \cdot \epsilon \cdot I \cdot \vec{k} + q_A + q_B} \left\{ \vec{k} \left[ \epsilon \cdot v_{BA}^I \vec{g}_1 - \frac{1}{2} t_A^{(t)n} |_1 \cdot v_{BA}^I \cdot \vec{g}_1 \right] + \frac{1}{2} (v_A^n |_1 + v_B^n |_1) t_A^{(t)1} \cdot \vec{g}_1 \right\} - q_B \frac{ir}{u_B} |_1 \cdot v_{BA}^I - q_n \cdot \dot{t}_n \quad (43)$$

Die Herleitung der entsprechenden Form für den Sonderfall eines unbewegten, starren Hindernisses (Körper B) ist trivial. Hinsichtlich der Herleitung einer allgemeineren Form von (43), die anisotrope elastische Eigenschaften der beiden deformierbaren Kontaktflächen einschließt, der FEM-Diskretisierung sowie des speziellen Lösungsalgorithmus, sei auf Baaijens [6] verwiesen.

#### LITERATUR

- [1] Panagiotopoulos, P. D.: Inequality Problems in Mechanics and Applications. Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] Böhm, J.: A comparison of different contact algorithms with applications. J. Computers and Structure, Vol. 26, No. 1/2, pp. 207 – 221, 1987.
- [3] Martins, J. A. C.; Oden, J. T.: Models and computational methods for dynamic friction phenomena. Comp. Meth. Appl. Mech. 1985.
- [4] Klarbring, A.: Contact problems in linear elasticity, friction laws and mathematical programming applications. Linköping Studies and Technology. Dissertation No. 133, 1985.
- [5] Kaneko, I.: A parametric linear complementarity problem involving derivatives Mathematical Programming 15 (1978), 146 – 154.
- [6] Baaijens, F. P. T.: On a numerical method to solve contact problems. Dissertation. TU Eindhoven, 1987.
- [7] Campos, L. T., Oden, J. T., Kikuchi, N.: A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics. Comp. methods. in appl. mech. and engineering 34(1982), 821 – 845.
- [8] Dudek, R.: Kontaktprobleme bei großen elastisch-plastischen Deformationen. Dissertation. TUK 1986.
- [9] Gläser, Drey, Dudek: Beispiele zur Spannungs-Deformationsanalyse sowie zur Lösung des Kontaktproblems nach dem FEM-Programm FIDEFA. Techn. Mech. 8 (1987) Heft 2, 57 – 62.
- [10] Oden, J. T. and Pires: Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. J. appl. Mech. 50, 67 – 76, 1983.
- [11] Fredriksson, B.: Finite Element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems. Comp. and Struct., Vol. 6, 1976, pp. 281 – 290.
- [12] Michalowski, R. and Mroz, Z.: Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. Arch. Mech., Vol. 30, 1978, pp. 259 – 276.

- [13] Courtney-Pratt, J. S., and Eisner: The effect of a tangential force on the contact metallic bodies. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 238, 1957, pp. 529 – 550.
- [14] Cheng, J. H., Kikuchi, N.: An incremental constitutive relation of unilateral contact friction for large deformation analysis. J. Appl. Mech., Vol. 52, 1985, pp. 639 – 648.
- [15] Schreurs, P.: Numerical simulation of forming processes. Dissertation, TU Eindhoven, 1983.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr.-Ing. habil Hans Gläser  
Technische Universität Karl-Marx-Stadt  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
PSF 964

Karl-Marx-Stadt  
9 0 1 0