

Zum elastisch-plastischen Preßverband mit nichtlinearer Verfestigung

Udo Gamer, Müfit Gülgeç

1. Einleitung

Der Preßverband mit teilplastizierter Nabe gewinnt wegen der besseren Materialausnutzung in zunehmendem Maße an Bedeutung [1]. Bei Zugrundelegung der Trescaschen Fließbedingung und der dieser zugeordneten Fließregel lassen sich alle interessierenden Größen – insbesondere das zur Verwirklichung eines bestimmten Fugendruckes notwendige Übermaß oder der durch ein gewähltes Übermaß hervorgerufene Fugendruck – analytisch berechnen [2]. Dies gilt für idealplastisches Verhalten wie für Werkstoffe mit linearer (isotroper) Verfestigung [3]. Bei nichtlinearer Verfestigung hingegen ist i. a. eine numerische Rechnung erforderlich, welche aber nicht sehr aufwendig ist; sie beschränkt sich auf die Bestimmung der Fließspannung als Funktion des Radius und die Integration dieser (durch den Radius dividierten) Funktion mit variabler oberer Grenze [4].

Für vier verschiedene nichtlineare Verfestigungsgesetze lassen sich Lösungen des Problems des ruhenden Preßverbands in geschlossener Form angeben. Dies ist der Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Auch im Falle des rotierenden Preßverbands liegen die zu denselben vier Verfestigungsgesetzen gehörigen Fließspannungen als explizite Funktionen des Radius vor. Die notwendigen Integrationen können allerdings nur numerisch durchgeführt werden.

Im folgenden werden zunächst die für den Preßverband allgemeingültigen Gleichungen zusammengestellt. Wie bei der Behandlung von Preßverbänden üblich, ist vorausgesetzt, daß Nabe und Welle unter ebenem Spannungszustand stehen und daß die letztere bei der Montage elastisch bleibt.

2. Die Grundgleichungen

In der Welle, $0 \leq R \leq Q$, lauten die Spannungen und die Verschiebung:

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{1}{8} \bar{\Omega}^2 [(1-\nu) Q^2 + (3+\nu) R^2] + D, \quad (2.1)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = -\frac{1}{8} \bar{\Omega}^2 [(1-\nu) Q^2 + (1+3\nu) R^2] + D, \quad (2.2)$$

$$\bar{u} = (1-\nu) \left(\bar{\sigma}_r + \frac{1}{4} \bar{\Omega}^2 R^2 \right) R. \quad (2.3)$$

Im plastischen Bereich der Nabe, $Q \leq R \leq Z$, treten die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = \int_Q^R \frac{\bar{\sigma}_Y}{R} dR - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^2 R^2 + D, \quad (2.4)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_Y \quad (2.5)$$

und die plastische Vergleichsdehnung

$$\bar{\epsilon}_{EQ} = \bar{\epsilon}_\varphi^p = -\bar{\epsilon}_r^p = -\bar{\sigma}_Y + \frac{1}{4} (1-\nu) \bar{\Omega}^2 R^2 + \frac{\bar{I}}{R^2} \quad (2.6)$$

auf. Im elastischen Bereich der Nabe, $Z \leq R \leq 1$, findet man

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{1}{2} \bar{I} \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right) + \frac{1}{8} (3+\nu) \bar{\Omega}^2 (1-R^2), \quad (2.7)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{1}{2} \bar{I} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right) + \frac{1}{8} \bar{\Omega}^2 [3+\nu - (1+3\nu) R^2]. \quad (2.8)$$

In der gesamten Nabe gilt

$$\bar{u} = (1-\nu) \left(\bar{\sigma}_r + \frac{1}{4} \bar{\Omega}^2 R^2 \right) R + \frac{\bar{I}}{R}. \quad (2.9)$$

Ergänzt werden diese Ausdrücke durch

$$D = -\int_Q^Z \frac{\bar{\sigma}_Y}{R} dR - \frac{1}{2} \bar{I} \left(\frac{1}{Z^2} - 1 \right) + \frac{1}{8} \bar{\Omega}^2 [3+\nu + (1-\nu) Z^2]. \quad (2.10)$$

Die elastisch-plastische Grenze ist gegeben durch

$$Z^2 = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - (1-\nu) \bar{\Omega}^2 \bar{I}}}{(1-\nu) \bar{\Omega}^2} \quad (2.11)$$

Es bedeuten $Q := a/b$ das Radienverhältnis der Nabe, $\bar{I} := E a i / (\sigma_0 b^2)$ das normierte (halbe) Übermaß, $\bar{\Omega}^2 := \rho \omega^2 b^2 / \sigma_0$ die dimensionslose Winkelgeschwindigkeit, $\bar{\sigma}_{ij} := \sigma_{ij} / \sigma_0$ die mit der ursprünglichen Fließgrenze dimensionslos gemachten Spannungen, $\bar{u} := E u / (\sigma_0 b)$ die normierte Verschiebung, $\bar{\epsilon}_{ij}^p := E \epsilon_{ij}^p / \sigma_0$ die normierten plastischen Dehnungen und $R := r/b$ den dimensionslosen Radius. Der Preßverband vor und nach dem Fügen ist auf Bild 1 skizziert.

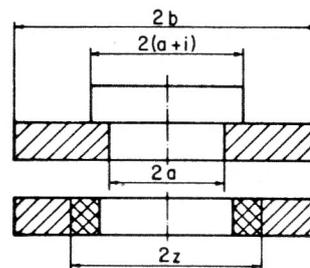


Bild 1
Skizze des Preßverbandes vor und nach der Montage

Die Lage der elastisch-plastischen Grenze sowie die Spannungen und die Verschiebung im elastischen Außenbereich der Nabe hängen nur vom Übermaß und der Winkelgeschwindigkeit ab, nicht aber vom Verfestigungsverhalten. Das noch ausstehende Verfestigungsgesetz, $\sigma_Y = f(\epsilon_{EQ})$, beeinflusst die Spannungen und die Verschiebung im plastischen Bereich der Nabe und wegen der Stetigkeit der Radialspannung an der Fuge natürlich auch die Spannungen und die Verschiebung in der Welle. Im stehenden Preßverband gilt

$$Z = \sqrt{\bar{I}} \quad (2.12)$$

$$\bar{\sigma}_r = - \int \frac{\sqrt{\bar{I}} \bar{\sigma}_Y}{R} dR - \frac{1}{2} (1 - \bar{I}) \quad (2.13)$$

Für $R=Q$ erhält man daraus die vom Radius unabhängigen Spannungen in der Welle.

3. Die Verfestigungsgesetze

Die nichtlinearen Verfestigungsgesetze, für welche sich die Spannungen in geschlossener Form angeben lassen, sind Verallgemeinerungen der linearen Verfestigung,

$$\sigma_Y = \sigma_o (1 + \eta \epsilon_{EQ}) \quad (3.1)$$

Die Form

$$\sigma_Y = \sigma_o (1 + \eta \epsilon_{EQ})^k \quad (3.2)$$

ist als Swiftscher Ansatz bekannt [5]. Eine zweite Möglichkeit der Verallgemeinerung ist

$$\sigma_Y = \sigma_o (1 + \eta \epsilon_{EQ}^k) \quad (3.3)$$

Diese wird von Experimentatoren gerne verwendet, da sich die Materialparameter η und k unschwer ermitteln lassen, wenn man die auf doppelt-logarithmischem Papier dargestellte Meßkurve durch eine Gerade annähert [6].

Für die Exponenten $k = 0.5$ und $k = 2$ läßt sich die Fließspannung nach Einsetzen der plastischen Vergleichsdehnung (2.6) jeweils als explizite Funktion des Radius darstellen, und im Falle $\omega = 0$ ist auch die Durchführung der bei der Berechnung der Radialspannung auftretenden Integration in geschlossener Form möglich. Die genannten Exponenten sind selbstverständlich nur für spezielle Materialien zutreffend. Andererseits kommt den analytischen Lösungen jedoch zusätzliche Bedeutung dadurch zu, daß sie zum Testen von Programmen herangezogen werden können.

Die Berechnung der Spannungen im plastischen Bereich der Nabe wird nun im einzelnen durchgeführt.

4. Die Spannungen im plastischen Bereich

Zu dem Verfestigungsgesetz

$$\bar{\sigma}_Y = \sqrt{1 + H \bar{\epsilon}_{EQ}} \quad (4.1)$$

mit $H := \eta \sigma_o / E$ gehört die Fließspannung

$$\bar{\sigma}_Y = -\frac{H}{2} + \sqrt{1 + \frac{H^2}{4} + \frac{H\bar{I}}{R^2} + \frac{1}{4}(1-\nu)H\bar{\Omega}^2 R^2} \quad (4.2)$$

Beim stehenden Preßverband kommt daraus

$$\bar{\sigma}_Y = -\frac{H}{2} + \frac{1}{R} \sqrt{H\bar{I} + J^2 R^2} \quad (4.3)$$

mit der Abkürzung $J^2 := 1 + H^2/4$, und die Spannungen werden [4]:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r = & -\frac{H}{4} \log \frac{R^2}{\bar{I}} + J \log \frac{JR + \sqrt{H\bar{I} + J^2 R^2}}{(J+1 + \frac{H}{2}) \sqrt{\bar{I}}} \\ & - \frac{1}{R} \sqrt{H\bar{I} + J^2 R^2} + \frac{1}{2}(H + \bar{I} + 1), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varphi = & -\frac{H}{4} \log \frac{R^2}{\bar{I}} + J \log \frac{JR + \sqrt{H\bar{I} + J^2 R^2}}{(J+1 + \frac{H}{2}) \sqrt{\bar{I}}} \\ & + \frac{1}{2}(\bar{I} + 1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Als nächstes wird

$$\bar{\sigma}_Y = 1 + H_2 \sqrt{\bar{\epsilon}_{EQ}} \quad (4.6)$$

mit $H_2 := \eta \sqrt{\sigma_o/E}$ betrachtet. Als Fließspannung findet man

$$\bar{\sigma}_Y = 1 - \frac{H_2^2}{2} + H_2 \sqrt{-(1 - \frac{H_2^2}{4}) + \frac{\bar{I}}{R^2} + \frac{1}{4}(1-\nu)\bar{\Omega}^2 R^2} \quad (4.7)$$

und für $\omega = 0$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r = & 1 - \frac{H_2^2}{2} + \frac{H_2}{R} \sqrt{\bar{I} - L^2 R^2} \\ = & 1 - \frac{H_2^2}{2} + \frac{H_2}{R} \sqrt{\bar{I} + P^2 R^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

wo $L^2 = 1 - H_2^2/4$ und $P^2 = -L^2$ ist. Es ergeben sich drei Sätze von Spannungen [7]. Sie lauten:

$$H_2 < 2$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r = & (1 - \frac{H_2^2}{2}) \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} - \frac{H_2}{R} \sqrt{\bar{I} - L^2 R^2} \\ & - H_2 L \arcsin \left(\frac{L}{\sqrt{\bar{I}}} R \right) + \\ & + H_2 L \arcsin L + \frac{1}{2}(H_2^2 + \bar{I} - 1), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varphi = & (1 - \frac{H_2^2}{2}) \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} - H_2 L \arcsin \left(\frac{L}{\sqrt{\bar{I}}} R \right) + \\ & + H_2 L \arcsin L + \frac{1}{2}(\bar{I} + 1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$H_2 = 2$$

$$\bar{\sigma}_r = -\log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} - 2 \frac{\sqrt{\bar{I}}}{R} + \frac{1}{2}(\bar{I} + 3), \quad (4.11)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = -\log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} + \frac{1}{2}(\bar{I} + 1), \quad (4.12)$$

$$H_2 > 2$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \left(1 - \frac{H_2^2}{2}\right) \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} - \frac{H_2}{R} \sqrt{\bar{I} + P^2 R^2} \\ &+ H_2 P \log \frac{PR + \sqrt{\bar{I} + P^2 R^2}}{\left(P + \frac{H_2}{2}\right) \sqrt{\bar{I}}} \\ &+ \frac{1}{2} (H_2^2 + \bar{I} - 1), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varphi &= \left(1 - \frac{H_2^2}{2}\right) \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} + H_2 P \log \frac{PR + \sqrt{\bar{I} + P^2 R^2}}{\left(P + \frac{H_2}{2}\right) \sqrt{\bar{I}}} \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{I} + 1). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wächst die Fließspannung nach

$$\bar{\sigma}_Y = (1 + H \epsilon_{EQ})^2 \quad (4.15)$$

mit der plastischen Vergleichsdehnung, dann hängt sie gemäß

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_Y &= \frac{1+2H}{2H^2} + \frac{\bar{I}}{R^2} + \frac{1}{4} (1-\nu) \bar{\Omega}^2 R^2 \\ &- \frac{1}{H} \sqrt{\frac{1+4H}{4H^2} + \frac{\bar{I}}{R^2} + \frac{1}{4} (1-\nu) \bar{\Omega}^2 R^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

vom Radius ab. Beim stehenden Preßverband vereinfacht sich diese Funktion zu

$$\bar{\sigma}_Y = \frac{1+2H}{2H^2} + \frac{\bar{I}}{R^2} - \frac{\sqrt{\bar{I}}}{HR} \sqrt{1+M^2 R^2} \quad (4.17)$$

mit $M^2 := (1+4H)/(4H^2 \bar{I})$. Nach Integration erhält man die Spannungen

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= -\frac{1+2H}{2H^2} \left(1 - \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}}\right) - \frac{\bar{I}}{2} \left(\frac{1}{R^2} - 1\right) \\ &+ \frac{\sqrt{\bar{I}}}{HR} \sqrt{1+M^2 R^2} - \frac{M\sqrt{\bar{I}}}{H} \log \frac{MR + \sqrt{1+M^2 R^2}}{M\sqrt{\bar{I}} + 1 + \frac{1}{2H}}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varphi &= \frac{1+2H}{2H^2} \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} + \frac{\bar{I}}{2} \left(\frac{1}{R^2} + 1\right) \\ &- \frac{M\sqrt{\bar{I}}}{H} \log \frac{MR + \sqrt{1+M^2 R^2}}{M\sqrt{\bar{I}} + 1 + \frac{1}{2H}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Als letztes wird das Verfestigungsgesetz

$$\bar{\sigma}_Y = 1 + H_4 \bar{\epsilon}_{EQ}^2 \quad (4.20)$$

mit $H_4 := \eta(\sigma_0/E)^2$ herangezogen. Dafür weist die Fließspannung die Abhängigkeit

$$\bar{\sigma}_Y = \frac{1}{2H_4} + \frac{\bar{I}}{R^2} + \frac{1}{4} (1-\nu) \bar{\Omega}^2 R^2$$

$$- \sqrt{\frac{1-4H_4}{4H_4^2} + \frac{\bar{I}}{H_4 R^2} + \frac{1}{4} (1-\nu) \frac{1}{H_4} \bar{\Omega}^2 R^2} \quad (4.21)$$

vom Radius auf. Für $\omega = 0$ kommt daraus

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_Y &= \frac{1}{2H_4} + \frac{\bar{I}}{R^2} - \frac{\sqrt{\bar{I}}}{R} \sqrt{\frac{1}{H_4} + A^2 R^2} \\ &= \frac{1}{2H_4} + \frac{\bar{I}}{R^2} - \frac{\sqrt{\bar{I}}}{R} \sqrt{\frac{1}{H_4} - B^2 R^2}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

wobei $A^2 := (1-4H_4)/(4H_4^2 \bar{I})$ und $B^2 = -A^2$ bedeutet. Wiederum findet man drei Sätze von Spannungen:

$$H_4 < 1/4$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= -\frac{1}{2H_4} \left(1 - \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}}\right) - \frac{\bar{I}}{2} \left(\frac{1}{R^2} - 1\right) \\ &+ \frac{\sqrt{\bar{I}}}{R} \sqrt{\frac{1}{H_4} + A^2 R^2} \\ &- A \sqrt{\bar{I}} \log \frac{AR + \sqrt{\frac{1}{H_4} + A^2 R^2}}{A\sqrt{\bar{I}} + \frac{1}{2H_4}}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varphi &= \frac{1}{2H_4} \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} + \frac{\bar{I}}{2} \left(\frac{1}{R^2} + 1\right) \\ &- A \sqrt{\bar{I}} \log \frac{AR + \sqrt{\frac{1}{H_4} + A^2 R^2}}{A\sqrt{\bar{I}} + \frac{1}{2H_4}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$H_4 = 1/4$$

$$\bar{\sigma}_r = 2 \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} - \frac{\bar{I}}{2} \left(\frac{1}{R^2} - 1\right) + 2 \left(\frac{\sqrt{\bar{I}}}{R} - 1\right), \quad (4.25)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = 2 \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} + \frac{\bar{I}}{2} \left(\frac{1}{R^2} + 1\right), \quad (4.26)$$

$$H_4 > 1/4$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= -\frac{1}{2H_4} \left(1 - \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}}\right) - \frac{\bar{I}}{2} \left(\frac{1}{R^2} - 1\right) \\ &+ \frac{\sqrt{\bar{I}}}{R} \sqrt{\frac{1}{H_4} - B^2 R^2} - B \sqrt{\bar{I}} \arccos(B \sqrt{H_4} R) \\ &+ B \sqrt{\bar{I}} \arccos(B \sqrt{H_4} \bar{I}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varphi &= \frac{1}{2H_4} \log \frac{R}{\sqrt{\bar{I}}} + \frac{\bar{I}}{2} \left(\frac{1}{R^2} + 1\right) \\ &- B \sqrt{\bar{I}} \arccos(B \sqrt{H_4} R) \\ &+ B \sqrt{\bar{I}} \arccos(B \sqrt{H_4} \bar{I}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

5. Numerische Ergebnisse

Numerische Ergebnisse für die Verteilung von Spannungen, Verschiebung und plastischen Dehnungen in Welle und Nabe des stehenden Pressverbandes findet man in [4] für das Verfestigungsgesetz (4.1) und in [7] für das Verfestigungsgesetz (4.6). Alle hier vorgestellten Resultate gelten für Pressverbände vom Radienverhältnis $Q = 0.5$ bei einem Übermaß $\bar{\Gamma} = 0.5$; die Naben werden also durch den Fügevorgang bis an den Radius $Z = 0.707$ plastiziert.

Zunächst werden stehende Pressverbände betrachtet. Für das Verfestigungsgesetz (4.15) zeigt Bild 2 die Spannungen in der Nabe mit H als Scharparameter und Bild 3 Spannungen, Verschiebung und plastische Dehnung in Welle und Nabe für den speziellen Wert $H = 0.5$. Bilder 4 und 5 bieten entsprechende Ergebnisse für das Verfestigungsgesetz (4.20). Den Bildern 2 und 4 entnimmt man, daß die Spannungskurven im plastischen Bereich eingeschlossen werden von den Grenzfällen des ideal-

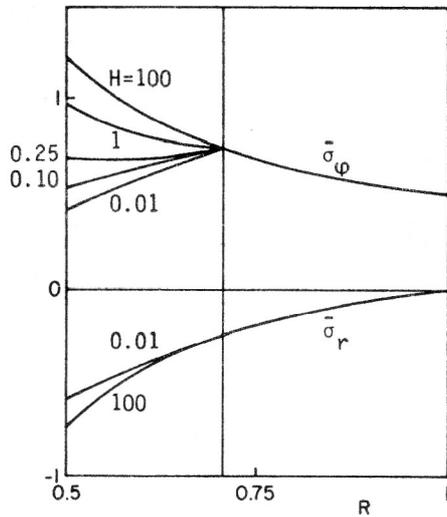


Bild 2
Spannungen in der Nabe für das Verfestigungsgesetz (4.15) mit H als Scharparameter

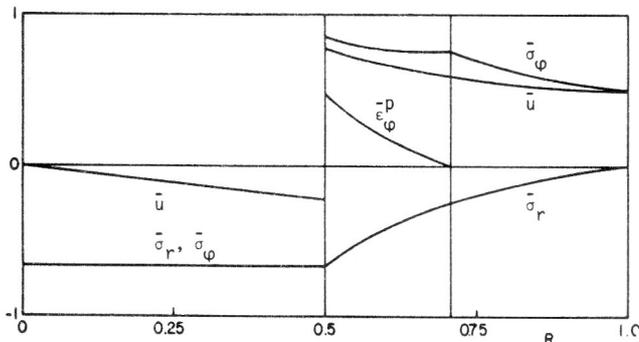


Bild 3
Spannungen, Verschiebung und plastische Dehnung in Welle und Nabe für das Verfestigungsgesetz (4.15) mit $H = 0.5$

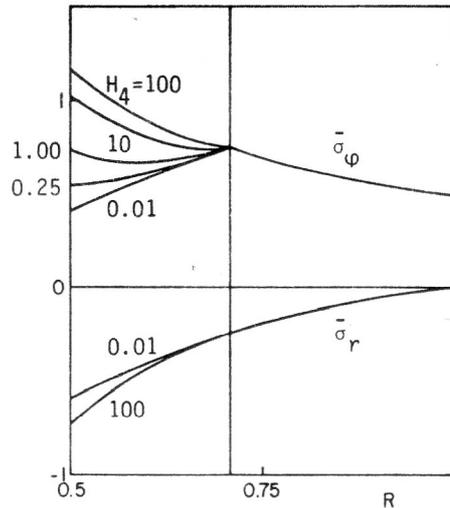


Bild 4
Spannungen in der Nabe für das Verfestigungsgesetz (4.20) mit H_4 als Scharparameter

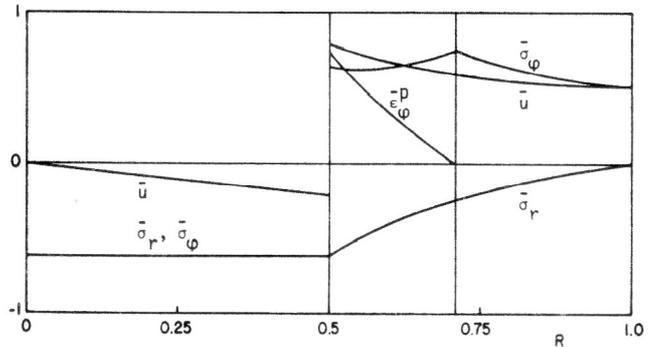


Bild 5
Spannungen, Verschiebung und plastische Dehnung in Welle und Nabe für das Verfestigungsgesetz (4.20) mit $H_4 = 0.5$

plastischen Verhaltens ($H = 0$) und des elastischen Verhaltens ($H \rightarrow \infty$). Die zwischen diesen Schranken liegenden Kurven unterscheiden sich deutlich im Charakter: Man erkennt auf Bild 2, daß der Anstieg der Umfangsspannung an der elastisch-plastischen Grenze mit wachsendem H kontinuierlich von seinem Höchstwert auf seinen Mindestwert sinkt. Auf Bild 4 hingegen besitzen alle Umfangsspannungskurven an der Stelle $R = Z$ eine gemeinsame Tangente; das Material verhält sich also in der unmittelbaren Umgebung der elastisch-plastischen Grenze bei allen Parametern $0 < H_4 < \infty$ idealplastisch. Dies gilt nicht nur für $k = 2$, sondern für alle Exponenten $k > 1$ [8]. Der Unterschied in den Radialspannungen ist weniger ausgeprägt.

Die nächsten vier Bilder (6 bis 9) zeigen die Spannungen in der Nabe des ruhenden und des mit $\bar{\Omega}^2 = 0.5$ rotierenden Pressverbandes für die vier Verfestigungsgesetze (4.1), (4.6), (4.15) und (4.20) mit dem Verfestigungsparameter $H_i = 0.5$. Für den ruhenden Pressverband stehen die im 4. Abschnitt zusammengestellten Ausdrücke zur Verfügung. Im mit $\bar{\Omega}^2 = 0.5$ rotierenden Pressverband mit $\nu = 1/3$ befindet sich nach (2.11) die elastisch-

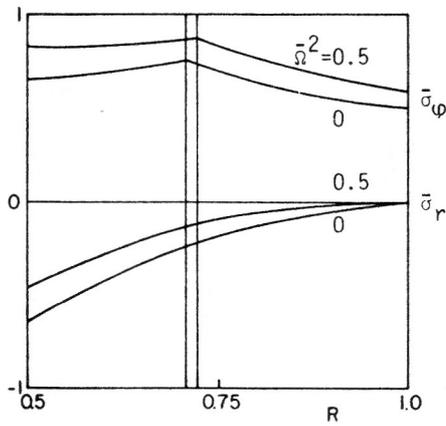


Bild 6
Spannungen in der Nabe vor und bei Rotation für das Verfestigungsgesetz (4.1)

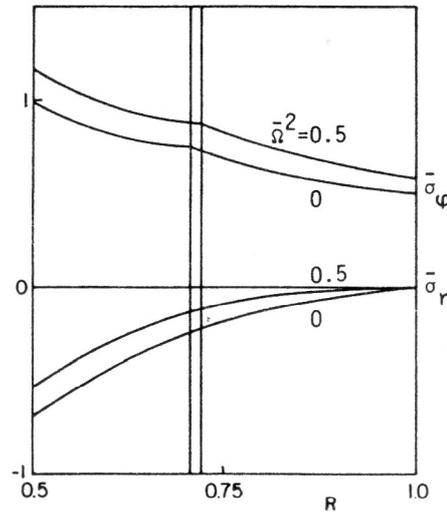


Bild 8
Spannungen in der Nabe vor und bei Rotation für das Verfestigungsgesetz (4.15)

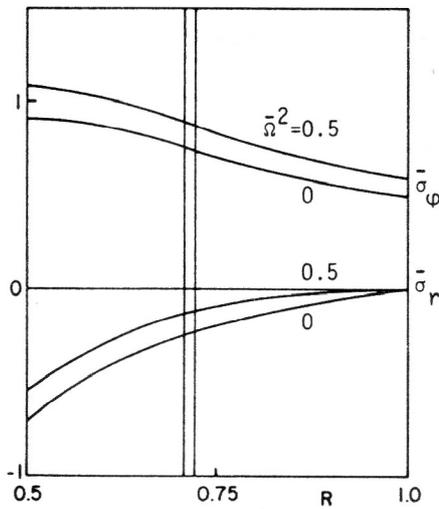


Bild 7
Spannungen in der Nabe vor und bei Rotation für das Verfestigungsgesetz (4.6)

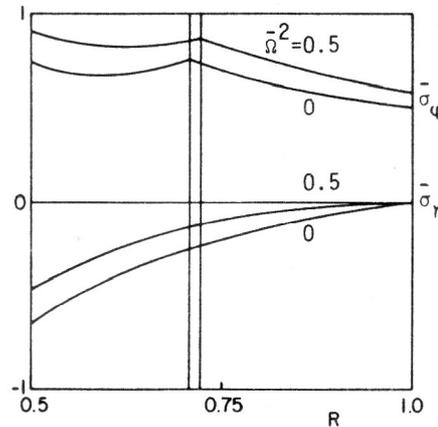


Bild 9
Spannungen in der Nabe vor und bei Rotation für das Verfestigungsgesetz (4.20)

plastische Grenze bei $Z = 0.723$. Für die Berechnung der Spannungen ist jeweils eine numerische Integration erforderlich. Durch die Rotation werden beide Spannungen angehoben. Die zu den vier Verfestigungsgesetzen gehörigen Umfangsspannungen unterscheiden sich mehr voneinander als die Radialspannungskurven. Die Stetigkeit der Anstiege der Umfangsspannungen an den beiden elastisch-plastischen Grenzen auf Bild 7 wurde in [7] diskutiert. Diese tritt auch für andere $k < 1$ in Erscheinung, wenn das Material dem Verfestigungsgesetz (3.3) folgt. Den letzten beiden Abbildungen liegt dasselbe Materialverhalten, nämlich Verfestigungsgesetz (4.6), zugrunde. Bild 10 zeigt die Spannungen in der Nabe des stehenden Preßverbandes, bei Rotation mit $\bar{\Omega}^2 = 1$ und im Stillstand nach Rotation. Die Spannungen weisen wieder den für (4.6) charakteristischen fließenden Übergang von elastischem zu elastisch-plastischem Verhalten an den Grenzen $Z = 0.707$ und $Z = 0.742$ auf. Im Falle der Rotation mit $\bar{\Omega}^2 = 1$ ist die Radialspannung im größten

Teil des elastischen Bereichs der Nabe positiv. Bei der kritischen Winkelgeschwindigkeit $\bar{\Omega}^2 = 1.08$ erfolgt der Vorzeichenwechsel an der elastisch-plastischen Grenze [9]; die hier vorgestellten Ergebnisse gelten nicht für überkritische Winkelgeschwindigkeiten, da sie auf der Voraussetzung einer nichtpositiven Radialspannung im plastischen Bereich aufgebaut sind. Man gewinnt die Spannungen im Preßverband im Stillstand nach vorausgegangener Rotation durch Subtraktion der Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{8} (3 + \nu) \bar{\Omega}^2 (1 - R^2), \quad (5.1)$$

$$\bar{\sigma}_\phi = \frac{1}{8} \bar{\Omega}^2 [3 + \nu - (1 + 3\nu) R^2], \quad (5.2)$$

welche in einer elastischen Vollscheibe vom Durchmesser $2b$ auftreten [10]. Durch die Rotation kommt es zu zusätzlicher plastischer Deformation. Deshalb muß der Fugendruck nach der Rotation etwas kleiner sein als vor der Rotation. Dasselbe gilt auch für die Umfangspan-

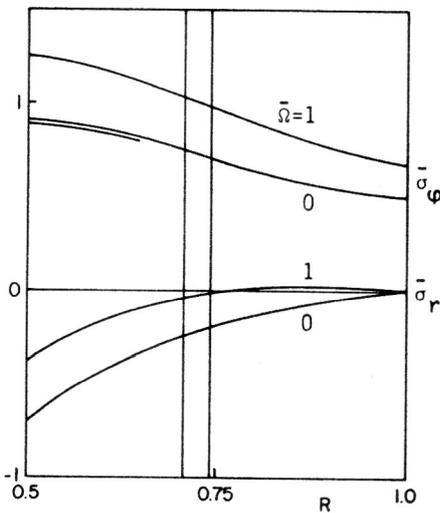


Bild 10
Spannungen in der Nabe vor, bei und nach Rotation mit $\bar{\Omega} = 1$ für das Verfestigungsgesetz (4.6)

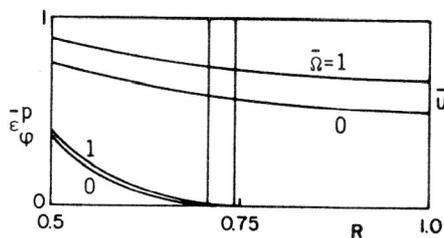


Bild 11
Verschiebung und plastische Dehnung in der Nabe vor und bei Rotation mit $\bar{\Omega} = 1$ für das Verfestigungsgesetz (4.6)

nung. Bei dem vorliegenden Verfestigungsgesetz ist der Unterschied jedoch so gering, daß er auf Bild 10 nur in der Umfangsspannung an der Fuge auszumachen ist. Dies wird verständlich durch die Betrachtung der plastischen Dehnung auf Bild 11. Es stellt sich heraus, daß deren Zuwachs durch die Rotation sehr gering ist. Der verschwindende Anstieg der plastischen Dehnung an der elastisch-plastischen Grenze entspricht der stetigen Tangente der Umfangsspannung. Zur Vervollständigung zeigt Bild 11 noch die Verschiebungen vor und bei Rotation. Im Stillstand nach Rotation ist die Verschiebung geringfügig größer als vor der Rotation. Man ermittelt sie durch Subtraktion der Verschiebung

$$\bar{u} = \frac{1}{8} (1 - \nu) \bar{\Omega}^2 [3 + \nu - (1 + \nu) R^2] R \quad (5.3)$$

in der rotierenden elastischen Vollscheibe.

LITERATUR

- [1] Kollmann, F. G.: Welle-Nabe-Verbindungen. Konstruktionsbücher Bd. 32. Berlin: Springer 1984.
- [2] Kollmann, F. G.: Die Auslegung elastisch-plastisch beanspruchter Querpreßverbände. Forsch. Ing.-Wes. 44 (1978) Nr. 1, S. 1 – 11.
- [3] Gamer, U.: Elastisch-plastische Spannungen im Schrumpfsitz. Forsch. Ing.-Wes. 48 (1982) Nr. 6, S. 192 – 198.
- [4] Gamer, U.: The shrink fit with nonlinearly hardening elastic-plastic hub. Trans. ASME, J. Appl. Mech. 54 (1987) Nr. 6, S. 474 – 476.
- [5] Johnson, W., u. P. B. Mellor: Engineering plasticity. London: Van Nostrand Reinhold 1973.
- [6] Rees, D. W. A.: An experimental appraisal of the equi-strain multi-surface hardening model, Acta Mech. 70 (1987) Nr. 1 – 4, S. 193 – 219.
- [7] Gamer, U.: The effect of a special hardening law on continuity in elastic-plastic problems with rotational symmetry. (Zur Veröffentlichung eingereicht.)
- [8] Gamer, U.: The expansion of the elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening. Internat. J. Mech. Sciences (1988) Nr. , S.
- [9] Gamer, U.: The rotating elastic-plastic shrink fit with hardening. Acta Mech. 61 (1986) Nr. 1 – 4, S. 15 – 27.
- [10] Gamer, U.: Die Spannungen im elastisch-plastischen Preßverband nach Rotation. Forsch. Ing.-Wes. 53 (1987) Nr. 3, S. 97 – 100.

Anschriften der Verfasser:

Prof. Dr. Udo Gamer
Department of Mechanical Engineering
Middle East Technical University
Ankara/Türkei

Müfit Gülgeç M. S.
Department of Mechanical Engineering
Gazi University
Ankara/Türkei

beurlaubt vom

Institut für Mechanik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8 – 10
A – 1040 Wien/Österreich