

# Charakteristische Höhen bei Mehrschichtströmungen

Bergmann, J., Burchhardt, F., Lipp, R.

## 1. Einleitung

Bei einer Vielzahl von Beschichtungsvorgängen mit fluiden Medien geht der Trend zur sogenannten Mehrschichtsimultantechnologie, es werden also mehrere fluide Phasen gleichzeitig auf eine Trägersubstanz aufgetragen, die ihrerseits starr oder auch beweglich sein kann. Für den Beschichtungsvorgang sind verschiedene Verfahren möglich, so z. B. das Auftragen von einer geeigneten Ebene, bei der es zu einer Meniskusströmung kommt (vgl. [1]) oder auch die einfache Spaltströmung zwischen parallelen oder schwach geneigten Platten. Von Interesse für die verfahrenstechnische Konzipierung und Ausführung der entsprechenden Beschichtungswerkzeuge dürfte dabei besonders das Einstellen der erforderlichen Schichthöhen  $h_r$  bzw. Schichtdicken  $h_r - h_{r-1}$  der einzelnen Fluide sein, wie auch die Kenntnis der Spalthöhen  $h$ , bei denen es zu besonderen Effekten kommt, z. B. wo das Druckmaximum in Strömungsrichtung ( $\partial p / \partial x = p' = 0$ ) auftritt oder sich auf Grund des speziellen Spannungsfeldes bestimmte „Pfropfen“zonen bilden.  $y$  ist dabei die Höhenkoordinate im Spalt.

Es wird im folgenden eine eindimensionale Näherung verwendet, wie sie für parallele Kanäle exakt und für schwach konvergente Kanäle in erster Näherung hinreichend ist [2], [3]. Der Strömungsvorgang soll weiterhin als stationär und isotherm angenommen werden. Daraus abgeleitet werden die folgenden Formen der (reduzierten) Impulsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p' = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

und der Durchsatzgleichungen

$$q_r = \int_{h_{r-1}}^{h_r} v dy, \quad y \in S_r, \quad r = 1(1)n,$$

mit  $h_0 = 0$ ,  $h_n = h$  benutzt.  $S_r = [h_{r-1}; h_r]$  stellt in Mehrschichtverbänden das Höhenintervall für die  $r$ -te Schicht dar. Es werden zwei Flüssigkeitstypen untersucht, die durch ihre rheologischen Zustandsgleichungen charakterisiert sind:

a) nichtlinear-viskose (Potenzgesetz-) Medien [4]

$$\tau = \tau_r = K_r \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^{m_r-1} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad y \in S_r, \quad m_r > 0, \quad (1)$$

b) biskoplastische (hier Bingham-) Medien [5]

$$\tau_r = K_r \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_o \operatorname{sgn} \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{für } |\tau| > \tau_o, \quad y \in S_r$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{für } |\tau| \leq \tau_o, \quad y \in S_r. \quad (2)$$

Es sind hierbei  $K_r$  die Konsistenzfaktoren,  $m_r$  die Fließexponenten und  $\tau_o$  die Fließgrenzen der einzelnen Fluide ( $\tau_o > 0$ ). Bei Einschichtströmungen wird der Schichtindex  $r$  weggelassen. Als Rand- und Kontaktbedingungen dienen die Fließeigenschaften an den Spaltwänden  $v(0) = v_o \geq 0$ ,  $v(h) = v_h = 0$  bzw. Schichtgrenzen  $\tau_r(h_r) = \tau_{r+1}(h_r)$  und  $v_r(h_r) = v_{r+1}(h_r)$ ,  $r = 1(1)n-1$ .

Zunächst soll die Problematik der charakteristischen Höhen für eine Einschichtströmung erläutert werden, bei der es im Fall von Bingham-Medien schon zu bemerkenswerten Effekten kommt. Die Ergebnisse sind nachfolgend in Form mathematischer Sätze aufgeführt.

## 2. Problemstellung für den Einschichtfall

Für Potenzgesetzmedien berechnet sich das Geschwindigkeitsprofil einer solchen Spaltströmung nach (1) wie folgt:

$$v(y) = \begin{cases} \frac{h-y}{h} v_o & h = 2q/v_o \\ v_o \frac{|y-y_o|^{\lambda_1} - |h-y_o|^{\lambda_1}}{|y_o|^{\lambda_1} - |h-y_o|^{\lambda_1}} & h \neq 2q/v_o, \end{cases}$$

wobei  $y_o$  aus der Gleichung

$$|h-y_o|^{\lambda_1} \left( \frac{v_o}{\lambda_2} (y_o-h) - q + v_o h \right) - |y_o|^{\lambda_1} \left( \frac{v_o}{\lambda_2} y_o - q \right) = 0 \quad (3)$$

ermittelt werden kann. Dabei ist  $\lambda_k = 1/m + k$  und  $y_o$  die Höhe des Geschwindigkeitsextremums.

Zu charakteristischen Höhen sollen neben der für das Druckmaximum (hier  $h = 2q/v_o$ ) auch jene zählen, bei denen das relative Geschwindigkeitsextremum an einer der Spaltwände liegt. Im obigen Fall können diese Höhen sofort aus (3) gewonnen werden.

$$y_o = 0 : \quad h = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{q}{v_o}, \quad y_o = h : \quad h = \lambda_2 \frac{q}{v_o}.$$

Für Bingham-Medien ergibt sich eine andere Situation, da hier sogenannte Pfropfgebiete auftreten, wenn der Betrag der Reibungsspannung  $\tau$  eine Fließgrenze  $\tau_o$  unterschreitet. Deshalb sind bei diesem Strömungstyp solche charakteristischen Höhen von Interesse, bei denen einer der Pfropfenränder an einer Spaltwand anliegt. Dabei kommt es nämlich im Falle der starren oberen Wand zur Ausbildung einer Totzone, in der das Medium ruht,

bzw. an der mit  $v_0$  abgezogenen unteren Wand zur Ausbildung einer Zone, in der sich das Medium wie ein starrer Körper mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt. Eine vollständige Beschreibung dieser charakteristischen Höhen gibt

**Satz 1:** Sei ein Spalt mit linearer Begrenzung gegeben dessen untere Wand mit der Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt wird und durch den ein Bingham-Medium fließt. Dann gibt es für die Lage des Pfropfens ( $\partial v / \partial y = 0$ ) folgende 5 Möglichkeiten, von denen jeweils genau eine eintritt:

a) der Pfropfen befindet sich im Rückströmgebiet innerhalb des Spalts

$$\text{für } h > 9 \left( \frac{q}{v_0} \right)^2 \frac{\tau_0}{K v_0} + 3 \frac{q}{v_0} \quad (4)$$

b) Der Pfropfen ruht an der oberen Spaltwand

$$\text{für } 9 \left( \frac{q}{v_0} \right)^2 \frac{\tau_0}{K v_0} + 3 \frac{p}{v_0} \geq h > 3 \frac{q}{v_0} \quad (5)$$

c) Im Spalt befindet sich kein Pfropfen

$$\text{für } 3 \frac{q}{v_0} \geq h \geq \frac{3}{2} \frac{q}{v_0} \quad (6)$$

d) Der Pfropfen bewegt sich mit der Wandgeschwindigkeit  $v_0$  an der unteren Spaltwand

$$\text{für } \frac{3}{2} \frac{q}{v_0} > h \geq \frac{q}{v_0} - \frac{K v_0}{9 \tau_0} + \sqrt{\frac{K q}{9 \tau_0} + \frac{1}{81} \left( \frac{K v_0}{\tau_0} \right)^2} \quad (7)$$

e) Der Pfropfen befindet sich innerhalb des Spalts in Fließrichtung

$$\text{für } h < \frac{q}{v_0} - \frac{K v_0}{9 \tau_0} + \sqrt{\frac{K q}{9 \tau_0} + \frac{1}{81} \left( \frac{K v_0}{\tau_0} \right)^2} \quad (8)$$

Für jeden der vier Fälle a), b), d) und e) ist die Lage und Breite des Pfropfens innerhalb des Spalts eindeutig.

**Beweis:**

a) Der Pfropfen befindet sich im Rückströmgebiet, d. h., die Pfropfengeschwindigkeit  $v_{pf}$  ist negativ.

Aus  $v(0) = v_0 > 0$  und  $v(h) = v_h = 0$  folgen

$$\frac{\partial v}{\partial y}(y) \leq 0 \text{ für } y \leq y_0 \mp |r| \text{ mit } r = \tau_0 / p', \text{ und weiter } p' > 0$$

sowie  $r > 0$ . Aus den Geschwindigkeitsgleichungen erhält man einerseits

$$y_0 = \frac{h}{2} + \frac{v_0 K r}{\tau_0 (h - 2r)} \quad (9)$$

und andererseits die Durchsatzgleichung

$$q = \frac{p}{6K} (4r^3 - 2h^3 + 3h^2 r + 6y_0 h^2 - 6y_0 h - 6y_0 r h) + v_0 (y_0 + r) + \frac{\tau_0}{2K} (2y_0^2 + 4ry_0 - 2r^2 + h^2 - 2y_0 h - 2hr).$$

Aus dieser Gleichung und (9) ergibt sich nach Umformungen und der Substitution  $s = 2r/h$ ,  $s \in ]0, 1[$ ,

$$0 = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s} \right) (s-1)^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{K v_0}{\tau_0 h} \right)^2 \frac{s^2}{(s-1)^2} - 3 \frac{K}{\tau_0 h} \left( v_0 - 2 \frac{q}{h} \right) =: f(s).$$

Da nach Voraussetzung  $y_0 + r < h$ , erhält man zusätzlich mit (9) die Ungleichung

$$\frac{(s-1)^2}{s} > \frac{K v_0}{\tau_0 h}. \quad (10)$$

Diese Ungleichung schränkt das Intervall für  $s$  ein auf  $]0, s_1[$ . Mit Hilfe der Ableitung von  $f$  (es ist wegen (10)  $f'(s) < 0$ ) und der beiden Funktionswerte  $f(s_1) < 0$  und  $f(s_+) > 0$ , wobei

$$0 < s_1 = 1 + \frac{K v_0}{2 \tau_0 h} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4 \tau_0 h}{K v_0}} \right) < 1 \text{ und}$$

$$0 < s_+ = d - \sqrt{d^2 - 1} < s_1$$

$$\text{mit } d = 1 + \frac{3 K v_0}{2 \tau_0 h} \left( v_0 - 2 \frac{q}{h} \right) > 1,$$

wird die Existenz genau einer Nullstelle von  $f$  in  $]0, s_1[$  gezeigt. Dabei ist  $f(s_1) < 0$  nur für  $h$  aus (4) erfüllt.

Es kann nun für ein vorgegebenes  $h$  aus (4) die Pfropfenbreite  $2r$  und aus (9) auch die Lage des Pfropfens im Spalt eindeutig bestimmt werden.

b) Der Pfropfen liegt an der oberen Spaltwand an und „ruht“ dort, d. h. mit  $v_h = 0$  ist auch die Pfropfengeschwindigkeit  $v_{pf} = 0$ . Wie in a) ist auch hier  $p' > 0$  und  $r > 0$ . Setzt man den unteren Pfropfenrand  $y_0 - r$  in die Geschwindigkeitsgleichung ein, erhält man

$$y_0 = r + \sqrt{2r \frac{K v_0}{\tau_0}}. \quad (11)$$

Die Durchsatzgleichung lautet

$$q = \frac{p'}{6K} (y_0^3 - 3y_0^2 r + 3y_0 r^2 - r^3) - \frac{p'}{2K} (y_0^3 - 2y_0^2 r + y_0 r^2) + \frac{\tau_0}{2K} (y_0^2 - 2y_0 r + r^2) + v_0 (y_0 - r),$$

woraus

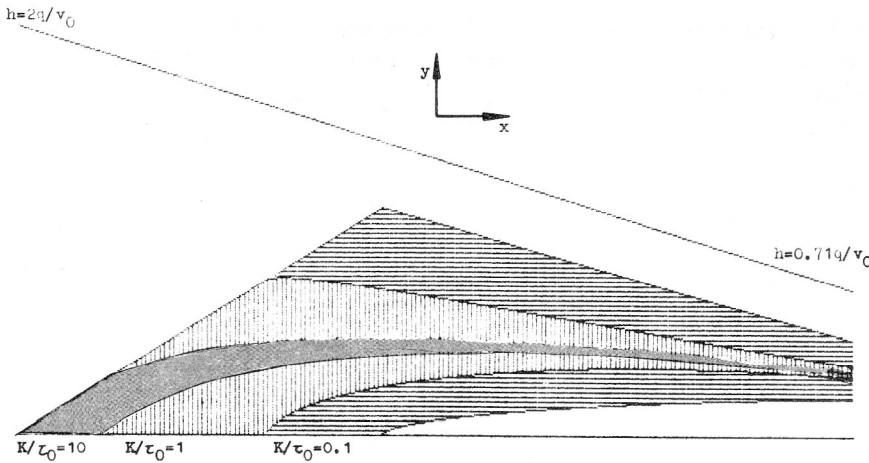
$$-\frac{1}{3} (y_0 - r)^3 + \frac{K v_0}{\tau_0} r (y_0 - r) - \frac{K q}{\tau_0} r = 0 \text{ folgt.}$$

(11) hierin eingesetzt, führt auf  $y_0 - r = 3q/v_0 = \text{const.}$  und folglich auf

$$r = \frac{9}{2} \left( \frac{q}{v_0} \right)^2 \frac{\tau_0}{K v_0} = \text{const. sowie}$$

$$y_0 = 3 \frac{q}{v_0} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{q \tau_0}{K v_0^2} \right) = \text{const.}$$

Das bedeutet, in der gesamten Zone, in der der Pfropfen an der oberen Spaltwand anliegt, ruht die Flüssigkeit oberhalb einer konstanten Höhe  $3q/v_0$ . Beginn und



**Bild 1**  
Pfropfgestalt in Abhängigkeit  
von der Spalthöhe h

Ende dieser Zone sind gekennzeichnet durch die Lage des oberen bzw. unteren Pfropfenrandes auf h, d. h., für diesen Fall gilt  $y_0 - r < h \leq y_0 + r$ . Mit dem Ausdruck für r folgt dann Ungleichung (5).

Die Beweise der Fälle c), d) und e) lassen sich in ähnlicher Weise abhandeln und vervollständigen den Satz zu einer Äquivalenzaussage.

Das Bild 1 stellt die Pfropfenlage und -gestalt von drei Bingham-Medien im Spalt in Abhängigkeit von der Spalthöhe für  $h < 2q/v_0$  dar. Die Fluide unterscheiden sich lediglich im Verhältnis  $K/\tau_0$ , während  $\lambda$  und  $v_0$  gleich bleiben. Im Bild werden die breiteren, aber ebenfalls zusammenhängenden Pfropfen, durch die schmaleren teilweise überdeckt.

### 3. Charakteristische Höhen für Mehrschichtströmungen

(Allgemeine Aufgabenstellung)

Für die Konzipierung von Werkzeugen, mit denen Mehrschichtverbände in einem Arbeitsgang aufgetragen werden sollen, bzw. für die Berechnung solcher Mehrschichtströmungen sind ebenfalls gerade solche Höhen von Interesse, an denen das relative Geschwindigkeitsextremum  $v(y_0)$  an einer der Spaltwände ( $y=0$  oder  $y=h$ ) oder auch auf einer Schichtgrenze  $h_r$  liegt. Zunächst ist erwiesen, daß bei eindimensionaler Näherung in einem Spalt für die vorgegebenen Rand- und Kontaktbedingungen höchstens ein solches Extremum existiert [3]. Eine Vorhersage dafür aufgrund bekannter Eingangsgrößen  $h, v_0, q_r, K_r, m_r$  kann im allgemeinen aber nicht analytisch getroffen werden, sondern erfordert zum Teil umfangreiche numerische Untersuchungen, die hier aus Platzgründen nicht auszuführen sind (einige Algorithmen sind in [3] enthalten). Die nachfolgenden zwei Sätze, die für den einfachen Fall einer Zweischtströmung derartige Ergebnisse beinhalten, zeigen, daß solche Kriterien gerade für praktisch interessante Fälle leider nicht immer notwendigen und hinreichenden Charakter haben sowie außerdem von der Form her sehr umfangreich sind.

**Satz 2:** Gelten für eine Zweischtströmung nichtlinearviskoser Flüssigkeiten in einem Spalt mit der Höhe h die Bedingungen  $v_0 = v_h = 0$  und  $q_1 > 0, q_2 > 0$ , so liegt die Stelle  $y_0$  des Geschwindigkeitsmaximums

$$\text{genau dann } \left\{ \begin{array}{l} \text{in der 1. Schicht } (h_1/2 < y_0 < h_1) \\ \text{auf der Schichtgrenze } (y_0 = h_1) \\ \text{in der 2. Schicht } (h_1 < y_0 < (h+h_1)/2) \end{array} \right\},$$

wenn gilt: ( $\bar{m} = m_2 - m_1$ )

$$\frac{q_2^{m_1+1} K_1}{q_1^{m_2+1} K_2} \leq$$

$$\frac{(2m_1+1)^{m_2+1} (m_2+1)^{m_1+m_2+1} m_1}{(2m_2+1)^{m_1+1} (m_1+1)^{m_1+m_2+1} m_2} \left( \frac{1+r}{h\sqrt{r}} \right)^{2\bar{m}}$$

$$\text{mit } r = \frac{q_2 \lambda_{22} \lambda_{11}}{q_1 \lambda_{12} \lambda_{21}} \text{ und } \lambda_{kj} = 1/m_j + k. \quad (12)$$

*Beweis:* Die Gleichheit für  $y_0 = h_1$  ist schnell gezeigt; man erhält aus der Kontaktbedingung  $v_1(h_1) = v_2(h_1)$

$$1 = \frac{\lambda_{12} K_2^{\lambda_{o2}}}{\lambda_{11} K_1^{\lambda_{o1}}} |p'|^{\lambda_{11} - \lambda_{12}} \frac{h_1^{\lambda_{11}}}{(h-h_1)^{\lambda_{12}}} \quad (13)$$

Aus dem Quotienten der Durchsatzgleichungen resultiert ebenfalls ein Ausdruck in  $|p'|^{\lambda_{11} - \lambda_{12}}$ , der mit (13)

$$r := \frac{q_2 \lambda_{22} \lambda_{11}}{q_1 \lambda_{12} \lambda_{21}} = \frac{h}{h_1} - 1 \text{ ergibt, woraus } h_1 = \frac{h}{1+r},$$

$$h-h_1 = \frac{rh}{1+r} \text{ folgen. Diese beiden Ausdrücke in (13)}$$

$$\text{eingesetzt, führen auf } r^{\lambda_{12}} = \frac{\lambda_{12} K_2^{\lambda_{o2}}}{\lambda_{11} K_1^{\lambda_{o1}}} \left| \frac{p'h}{1+r} \right|^{\lambda_{11} - \lambda_{12}}$$

Um hieraus nun noch  $p'$  zu eliminieren, kann z. B. die Durchsatzgleichung der ersten Schicht benutzt werden, in der  $h_1$  mittels r zu ersetzen ist:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{|p'|^{\lambda_{o1}}}{\lambda_{21} K_1^{\lambda_{o1}}} h_1^{\lambda_{21}} \\ &= \frac{|p'|^{\lambda_{o1}}}{\lambda_{21} K_1^{\lambda_{o1}}} \left( \frac{h}{1+r} \right)^{\lambda_{21}} \end{aligned}$$

Einige Umformungen und Rücksubstitution von  $r$  führen schließlich zur Behauptung.

Zum Beweis der angegebenen Ungleichungen für  $y_0 \neq h_1$  werden aus den Durchsatzgleichungen abgeleitete Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  definiert mit

$$f_1(p', y, h_1) = \frac{|p'|^{\lambda_{11}}}{p' \lambda_{11} K_1^{\lambda_{o1}}} \left[ \frac{1}{\lambda_{21}} (|y|^{\lambda_{11}} y - |y-h_1|^{\lambda_{11}} (y-h_1)) - |y|^{\lambda_{11}} h_1 \right] - q_1,$$

$$f_2(p', y, h_1) = \frac{|p'|^{\lambda_{12}}}{p' \lambda_{12} \lambda_{22} K_2^{\lambda_{o2}}} \left[ |h-y|^{\lambda_{12}} (h-y) - \lambda_{22} |h-y|^{\lambda_{12}} (h-h_1) - |h_1-y|^{\lambda_{12}} (h_1-y) \right] - q_2,$$

wobei  $h_1/2 < y < (h+h_1)/2$  (dieses Intervall für  $y_0$  ergibt sich aus der Symmetrie der Geschwindigkeitsgleichungen bez.  $y_0$ ). Es gelten  $\frac{\partial f_1}{\partial y} > 0$  und  $\frac{\partial f_2}{\partial y} < 0$  sowie wegen der Durchsatzbedingungen  $f_1(p', y_0, h_1) = 0$ ,  $f_2(p', y_0, h_1) = 0$  und somit

$$y_0 \leq h_1 \quad \text{gdw.} \quad f_1(p', h_1, h_1) \geq 0 \quad (14)$$

$$y_0 \leq h_1 \quad \text{gdw.} \quad f_2(p', h_1, h_1) \leq 0. \quad (15)$$

Aus der Kontaktbedingung  $v_1(h_1) = v_2(h_1)$  erhält man

$$|p'|^{\lambda_{11}-\lambda_{12}} = \frac{\lambda_{11} K_1^{\lambda_{o1}}}{\lambda_{12} K_2^{\lambda_{o2}}} \frac{|h_1-y_0|^{\lambda_{12}} - |h-y_0|^{\lambda_{12}}}{|h_1-y_0|^{\lambda_{11}} - |y_0|^{\lambda_{11}}}$$

und mit Hilfe einer der beiden Durchsatzgleichungen läßt sich wieder  $p'$  eliminieren. Es entsteht die Gleichung

$$f(y) = g_1(y) \cdot g_2(y) - \frac{\lambda_{21} q_1}{\lambda_{22} q_2},$$

für die  $f(y_0) = 0$  ist. Hierbei sind  $g_k$  Funktionen mit

$$g_1(y) = \frac{|y|^{\lambda_{11}} y - |y-h_1|^{\lambda_{11}} (y-h_1) - \lambda_{21} |y|^{\lambda_{11}} h_1}{|h_1-y|^{\lambda_{11}} - |y|^{\lambda_{11}}}$$

und

$$\frac{1}{g_2(y)} = y - h_1 - \frac{\lambda_{12} |h-y|^{\lambda_{12}} (h-h_1)}{|h_1-y|^{\lambda_{12}} - |h-y|^{\lambda_{12}}}$$

Nach umfangreichen Monotonieuntersuchungen läßt sich zeigen, daß  $f$  im gesamten Bereich von  $y$  monoton fallend ist. Im Fall  $y_0 < h_1$  gelten damit

$$f(y_0) = 0 > \frac{\lambda_{11} h_1}{\lambda_{12} (h-h_1)} - \frac{\lambda_{21} q_1}{\lambda_{22} q_2} \quad (16)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{1}{r} > \frac{h_1}{h-h_1} \quad \text{sowie} \quad h_1 < \frac{h}{1+r} \quad \text{und} \quad h-h_1 > \frac{rh}{1+r}$$

mit  $r$  aus (12).

Aus (14), (15) entstehen einerseits

$$|p'|^{\lambda_{o1}} > \frac{q_1 \lambda_{21} K_1^{\lambda_{o1}}}{h_1^{\lambda_{21}}} > \frac{q_1 \lambda_{21} K_1^{\lambda_{o1}}}{\left(\frac{h}{1+r}\right)^{\lambda_{21}}}$$

$$|p'|^{\lambda_{o2}} < \frac{q_2 \lambda_{22} K_2^{\lambda_{o2}}}{(h-h_1)^{\lambda_{22}}} < \frac{q_2 \lambda_{22} K_2^{\lambda_{o2}}}{r^{\lambda_{22}} \left(\frac{h}{1+r}\right)^{\lambda_{22}}}$$

und andererseits nach Division und Substitution von  $h_1$  und  $h-h_1$  mittels  $r$

$$|p'|^{\lambda_{11}-\lambda_{12}} > \frac{q_1 \lambda_{21} K_1^{\lambda_{o1}} (h-h_1)^{\lambda_{o2}}}{q_2 \lambda_{22} K_2^{\lambda_{o2}} h_1^{\lambda_{21}}} >$$

$$> \frac{q_1 \lambda_{21} K_1^{\lambda_{o1}}}{q_2 \lambda_{22} K_2^{\lambda_{o2}}} r^{\lambda_{22}} \left(\frac{h}{r+1}\right)^{\lambda_{12}-\lambda_{11}}.$$

Je nach dem Vorzeichen von  $\lambda_{11} - \lambda_{12}$  lassen sich zwei dieser drei Ungleichungen zusammenfassen, wodurch  $p'$  verschwindet, und nach weiteren Umformungen ergibt sich die Behauptung. Für gleiche Fließexponenten  $m_1 = m_2 = m$  erhält man  $\frac{K_2}{K_1} > \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{m+1}$ . Wenn  $y_0 > h_1$ , kehren sich bei der Herleitung lediglich ab (16) die Relationszeichen um.

**Satz 3:** Für eine Zweischichtströmung von Potenzgesetzflüssigkeiten sei vorausgesetzt  $q_r, K_r, v_0 > 0$  ( $r = 1, 2$ ). Wenn  $y_0$  auf der Schichtgrenze liegt ( $y_0 = h_1$ ), dann gilt

$$\frac{(4 \lambda_{21} q_1)^{m_1} K_1 h^{2m_2}}{(4 \lambda_{22} q_2)^{m_2} K_2 h^{2m_1}} \left(1 + \frac{W - v_0 h}{2q_1}\right)^{m_1}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{W}{v_0 h}\right)^{2m_1+1}}{\left(1 + \frac{W}{v_0 h}\right)^{2m_2+1}}$$

Dabei sind  $r$  in (12) definiert und

$$W := \sqrt{[(r+1) q_1 \lambda_{21} - v_0 h]^2 + 4h v_0 r q_1 \lambda_{21}} - (r+1) q_1 \lambda_{21}$$

(Zum Beweis siehe [3]).

#### 4. Spalthöhe am Druckextremum bei nichtlinearviskosen Flüssigkeiten

Bei der Bestimmung der Spalthöhe an der Stelle des Druckmaximums ( $p' = 0$ ) erweist es sich allgemein als notwendig, auch die Größe der in diesem Fall über  $y$  konstanten Scherspannung  $\tau$  zu kennen, deren Ermittlung unter den gegebenen Rand- und Kontaktbedingungen in die Aufgabenstellung mit einfließt (siehe auch Pkt. 5). Für die Ermittlung der Höhe, bei der im  $n$ -Schicht-Fall ( $n > 1$ ) nichtlinear-viskoser Medien das Druckmaximum liegt und das Geschwindigkeitsprofil eine stückweise lineare stetige Funktion darstellt, kann ein Algorithmus angegeben werden, der stets genau eine Spalthöhe als Lösung liefert. Diese errechnet sich zu

$$h = v_0 \left( \frac{K_1}{-\tau} \right)^{\lambda_{01}} + \sum_{r=1}^{n-1} \left[ \left( \frac{K_{r+1}}{-\tau} \right)^{\lambda_{0r+1}} - \left( \frac{K_r}{-\tau} \right)^{\lambda_{0r}} \right]$$

$$\sqrt{2 \sum_{j=r+1}^n \left( \frac{-\tau}{K_j} \right)^{\lambda_{0j}} q_j} \quad (17)$$

Die Rechtfertigung dieser Beziehung gibt

**Satz 4:** Im Fall  $p' = 0$  bei einer  $n$ -Schicht-Strömung ( $n > 1$ ) von Potenzgesetzmedien erfüllt die bezüglich  $y$  konstante Scherspannung  $\tau$  die Gleichung

$$\sum_{r=1}^n 2 \left( \frac{-\tau}{K_r} \right)^{\lambda_{0r}} q_r = v_0^2 \quad (18)$$

und die Schichthöhen berechnen sich in eindeutiger Weise nach den Formeln

$$h_r - h_{r-1} = \frac{1}{A_r} \left( \sqrt{v_0^2 - \sum_{j=1}^{r-1} 2A_j q_j} - \sqrt{v_0^2 - \sum_{j=1}^r 2A_j q_j} \right) \quad (19)$$

mit  $A_r = \left( \frac{-\tau}{K_r} \right)^{\lambda_{0r}}$  ( $r=1(1)n$ , für  $r=1$  entfällt die erste Summe).

*Beweis:* (ausführlich in [3]) Wegen  $p' = 0$  ist  $\tau$  konstant und aus den rheologischen Zustandsgleichungen (1) folgen unter Berücksichtigung aller Randbedingungen

$$v_r(y) = A_r (h_r - y) + v_0 - \sum_{j=1}^r A_j (h_j - h_{j-1}), \quad y \in S_r, \quad r=1(1)n,$$

$$v_0 = \sum_{r=1}^n A_r (h_r - h_{r-1}), \text{ sowie die Durchsatzgleichungen}$$

$$q_r = \frac{A_r}{2} (h_r - h_{r-1})^2 + (h_r - h_{r-1}) \left( v_0 - \sum_{j=1}^r A_j (h_j - h_{j-1}) \right) \quad (20)$$

für  $r=1(1)n$ , und außerdem

$$q_n = \frac{A_n}{2} (h - h_{n-1})^2 \quad (21)$$

Gleichungen (20) durch  $(h_r - h_{r-1})$  dividiert und umgestellt ergeben ein Gleichungssystem

$$A_r (h_r - h_{r-1}) = 2 \left( v_0 - \sum_{j=1}^{r-1} A_j (h_j - h_{j-1}) \right) - \frac{2q_r}{h_r - h_{r-1}}, \quad r=1(1)n.$$

(für  $r=1$  entfällt die Summe). Hierin werden nun von  $r=1$  beginnend alle auftretenden  $A_r (h_r - h_{r-1})$  in den jeweils nachfolgenden Gleichungen ersetzt, so daß die Gleichung mit dem Index  $r$  nur noch  $A_r (h_r - h_{r-1})$  enthält:

$$A_r (h_r - h_{r-1}) = (-1)^{r+1} 2v_0 - 4 \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{r+j} \bar{v}_j - 2\bar{v}_r, \quad r=1(1)n,$$

$$\text{mit } \bar{v}_r := \frac{q_r}{h_r - h_{r-1}} \quad (22)$$

(für  $r=1$  entfällt die Summe).  $A_n (h - h_{n-1})$  aus der  $n$ -ten Gleichung wird mittels (21) eliminiert, es entsteht

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{2} &= - \sum_{r=1}^n (-1)^r \frac{q_r}{h_r - h_{r-1}} \\ &= - \sum_{r=1}^n (-1)^r \bar{v}_r. \end{aligned}$$

Diese Gleichung nach jedem  $v_r$  ( $r=1(1)n$ ) umgestellt und in (22) eingesetzt, liefert  $n$  Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \bar{v}_r \frac{v_0}{2} (-1)^{r-1} + \sum_{j=1}^r (-1)^{r+j-1} \bar{v}_j \bar{v}_r \\ + \sum_{j=r}^n (-1)^{r+j} \bar{v}_j \bar{v}_r = \frac{A_r q_r}{2}, \end{aligned}$$

deren Summe schließlich (18) ergibt. Zum Beweis der Formeln (19) wird das Gleichungssystem aus den Durchsatzgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} \frac{A_r}{2} (h_r - h_{r-1})^2 + (h_r - h_{r-1}) \\ \left[ \sum_{j=1}^{r-1} A_j (h_j - h_{j-1}) - v_0 \right] + q_r = 0 \end{aligned}$$

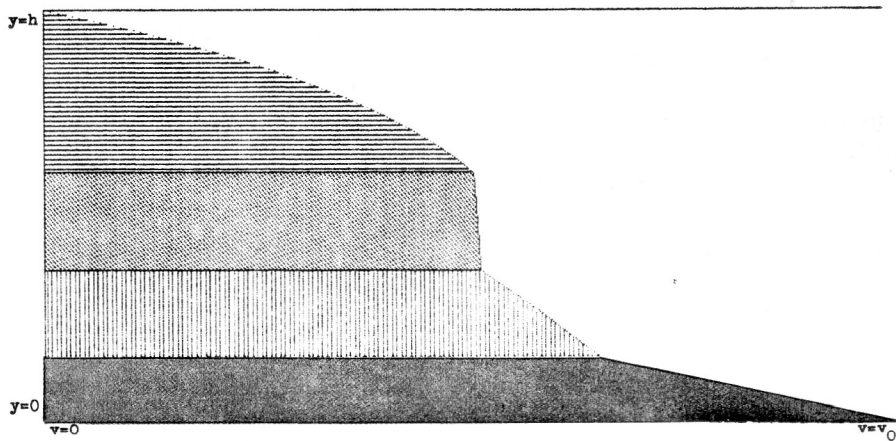
benutzt (für  $r=1$  entfällt die Summe), woraus sich

$$h_r - h_{r-1} = \frac{1}{A_r} \left\{ \left[ v_0 - \sum_{j=1}^{r-1} A_j (h_j - h_{j-1}) \right] \pm \sqrt{\left[ v_0 - \sum_{j=1}^{r-1} A_j (h_j - h_{j-1}) \right]^2 - 2q_r A_r} \right\}$$

ergibt. Die Entscheidung über das zu wählende Vorzeichen vor der Wurzel fällt erst bei der schrittweisen Bestimmung der Lösungen, wobei sich schließlich erweist, daß nur die Minuszeichen zutreffen, da nur so die Durchsatzgleichungen erfüllt werden. Setzt man nun die  $h_r$  fortlaufend in die nächstfolgenden Gleichungen ein, erhält man letztendlich (17).

Neben der Ermittlung der Höhe für  $p' = 0$  konnte die Bestimmung der Spalthöhen für  $y_0 = 0$  und  $y_0 = h$ , wie schon in 3. erwähnt, ebenfalls nur numerisch erfolgen. Diese drei charakteristischen Höhen liefern dann die Grundlage für ein Höheniterationsprogramm, welches es gestattet, das Geschwindigkeits- und Spannungsfeld für jede gegebene Spalthöhe zu berechnen. Bezüglich einer Beschreibung dieser Algorithmen sei auf [3] verwiesen, wir geben an dieser Stelle lediglich die Ergebnisse eines Zahlenbeispiels an (Schichtindex  $r$ ).

Soll das Geschwindigkeitsprofil beispielsweise für  $h=0.1$  berechnet werden, wird durch das Programm zunächst festgestellt, daß hierbei  $y_0 < 0$  ist, und nach 7 Iterationen sind die Werte für  $p'$ ,  $y_0$  und alle Schichthöhen hinreichend genau ermittelt. Das Geschwindigkeitsprofil ist in Bild 2 graphisch dargestellt.



**Bild 2**  
Geschwindigkeitsprofil einer 4-Schicht-Strömung

Tabelle 1

r	$m_r$	$q_r$	$K_r^*$	$h_r$	$h_r - h_{r-1}$	$v(h_r)$	$\tau(h_r)$
				0		0.1	-37.358
1	0.9	0.00125	20	0.0149	0.0149	0.0663	-45.878
2	1.9	0.00125	110	0.0360	0.0211	0.0521	-57.915
3	0.8	0.00125	1000	0.0601	0.0241	0.0514	-71.719
4	0.2	0.00125	80	0.1	0.0399	0	-94.531
$y_0 = -0.0653$			$p' = -571.826$				

## 5. Spalthöhe am Druckextremum bei Bingham-Medien

Die gleiche Aufgabenstellungen wie in 4. (also die Bestimmung von  $\tau$  und  $h$ , so daß  $p' = 0$  und die Rand- und Kontaktbedingungen bzw.  $\tau$  und  $v$  erfüllt sind) liefert hier einen Algorithmus, dessen Herleitung ähnlich dem eben beschriebenen ist, der jedoch verschiedene Besonderheiten aufweist. Wegen der Konstanz von  $\tau$  bez.  $y$  ist hier jede Schicht, für die  $-\tau \leq \tau_{or}$  gilt, ganz als Pfropfen ausgebildet, was für die letzte Schicht wegen  $q_n > 0$  natürlich auszuschließen ist. Daraus resultiert dann auch der gravierende Unterschied, indem für diesen Flüssigkeitstyp nicht in jedem Fall eine Lösung existiert. Wenn es jedoch eine Lösung gibt, so ist sie ebenfalls eindeutig und läßt sich mit Hilfe der Formeln

$$\tau = -\left(\frac{v_0^2}{2} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \notin I}}^n \frac{\tau_{or} q_r}{K_r}\right) \left(\sum_{\substack{r=1 \\ r \notin I}}^n \frac{q_r}{K_r}\right)^{-1} \quad (23)$$

$$h_r = h_{r-1} + \frac{2 q_r}{\sqrt{v_0^2 - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin I}}^{r-1} q_j A_j} + \sqrt{v_0^2 - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin I}}^r q_j A_j}} \quad (24)$$

mit  $A_j = -\frac{\tau + \tau_{oj}}{K_j}$  charakterisieren ( $r = 1(1)n$ , für  $r = 1$  entfällt in (24) die erste Summe). Zur Bestimmung der von vornherein unbekanntem Indexmenge  $I$  der Pfropfschichten,  $I = \{r: \tau_{or} \geq |\tau|\}$ , bzw. zur Herleitung der

Nichtlösbarkeitsaussage dient der nachfolgende Algorithmus, der durch den anschließenden Satz 5 begründet wird.

*Schritt 1:* Man ordne die  $\tau_{or}$  der Größe nach; die geordneten Werte seien mit  $\tau_{or}^*$  bezeichnet und sollen die Ungleichung  $\tau_{o1}^* \geq \tau_{o2}^* \geq \dots \geq \tau_{on}^*$  erfüllen. Die zugehörigen Größen  $q_r$  und  $K_r$  werden mit den Bezeichnungen  $q_r^*$  und  $K_r^*$  den  $\tau_{or}^*$  zugeordnet. Im Falle einer Gleichheit  $\tau_{or} = \tau_{oj}$  soll die Indexreihenfolge nach der Sortierung erhalten bleiben. Man setze

$$\tau_n^* := -\frac{v_0^2}{2q_n^*} K_n^* - \tau_{on}^* ; B_{n+1} := -\frac{v_0^2}{2} ; j := n.$$

*Schritt 2:* Man berechne

$$B_j := \sum_{r=j}^n \frac{q_r^*}{K_r^*} (\tau_{oj-1}^* - \tau_{or}^*) - \frac{v_0^2}{2} \quad (25)$$

Wenn  $B_j \geq 0$  und  $\tau_{oj-1}^* \leq \tau_{on}$ , dann STOP 1.

Wenn  $B_j \geq 0$  und  $\tau_{oj-1}^* > \tau_{on}$ , dann  $\tau := \tau_j^*$ , STOP 2.

*Schritt 3:* Berechne

$$\begin{aligned} \tau_{j-1}^* &:= \tau_j^* - \frac{q_{j-1}^*/K_{j-1}^*}{\sum_{r=j-1}^n \frac{q_r^*}{K_r^*}} B_j \\ &= -\frac{\frac{v_0^2}{2} + \sum_{r=j-1}^n \frac{\tau_{or}^* q_r^*}{K_r^*}}{\sum_{r=j-1}^n \frac{q_r^*}{K_r^*}} \end{aligned}$$



Wenn  $j = 2$ , dann  $\tau := \tau_{j-1}^*$ , STOP 3,

sonst  $j := j-1$ , weiter in Schritt 2.

Im Falle des Abbruchs des Algorithmus bei STOP 1 gibt es keine Lösung der Aufgabe, STOP 2 sind alle Schichten  $S_k^*$  mit  $k < j$  Pfropfenschichten,

STOP 3 sind alle Schichten ohne Pfropfen.

**Satz 5:** Die Aufgabe besitzt genau dann eine Lösung, wenn ein  $j$  mit  $1 \leq j \leq n$  existiert, so daß die Ungleichungen

$$B_j \geq 0 > B_{j+1} \quad (26)$$

$$\text{und } \tau_{\text{oj}-1}^* > \tau_{\text{on}} \quad (27)$$

erfüllt sind. Wenn eine Lösung existiert, dann ist sie auch eindeutig. Es ist hierbei  $B_j$  für  $j = 2(1)n$  in (25) erklärt und

$$B_1 := \sum_{r=1}^n \frac{q_r^*}{K_r^*} (\tau_{\text{oo}}^* - \tau_{\text{or}}^*) - \frac{v_o^2}{2}.$$

$\tau_{\text{oo}}^*$  sei so gewählt,

daß  $\tau_{\text{oo}}^* > \tau_{\text{o1}}^*$  und  $B_1 > 0$  gilt. Für  $j = 2(1)n$  ist  $\tau_{\text{oj}}^*$  im Algorithmus definiert.

**Beweis:** Im folgenden bezeichne  $S_r^*$  die Schicht, in der sich das Medium mit der Fließgrenze  $\tau_{\text{or}}^*$  bewegt.

1. Es gebe ein  $\tau$  und eine Indexmenge  $I$ , die (23) und  $\tau < -\tau_{\text{on}}$  erfüllen, sowie eine streng monoton wachsende Folge von Schichthöhen  $(h_r)$ ,  $r = 1(1)n$ . Dann ist  $I^*$  als Indexmenge der Pfropfenschichten  $S_r^*$  entweder nichtleer ( $I^* = 1, 2, \dots, k$ , wobei  $\tau_{\text{on}} < \tau_{\text{ok}}^*$ ) oder leer (alle Schichten ohne Pfropfen). Daraus folgt entweder

$$\tau_{\text{or}}^* \geq -\tau \text{ für } 1 \leq r \leq k \text{ und}$$

$$\tau_{\text{or}}^* < -\tau \text{ für } k < r \leq n$$

oder  $\tau_{\text{or}}^* < -\tau$  für  $r = 1(1)n$ . Weil  $\tau$  aber die Gleichung (23) erfüllt, also

$$\frac{v_o^2}{2} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \notin I}}^n -\frac{\tau + \tau_{\text{or}}}{K_r} q_r = \sum_{r=k+1}^n \frac{q_r^*}{K_r^*} (-\tau - \tau_{\text{or}}^*)$$

gilt, und die Folge der  $\tau_{\text{or}}^*$  monoton fallend ist, ergibt sich hieraus nach Ersetzen von  $\tau_{\text{ok}}^*$  für  $-\tau$  zunächst  $B_1 > B_2 \geq \dots \geq B_{n+1}$  und weiterhin folgt  $B_{r+1} \geq 0$  für  $1 \leq r \leq k$  und  $B_{r+1} < 0$  für  $k < r \leq n$ , also insbesondere  $B_{k+1} \geq 0 > B_{k+2}$ .

Ist  $\tau_{\text{or}}^* < -\tau$  für  $r = 1(1)n$ , so gilt wegen (23)  $B_2 < 0$  und laut Definition  $B_1 > 0$ . Nach Voraussetzung ist  $-\tau > \tau_{\text{on}}$  (ansonsten Widerspruch zu  $q_n > 0$ ) und damit auch  $\tau_{\text{ok}}^* \geq -\tau > \tau_{\text{on}}$ , womit die Gültigkeit von (26) und (27) für ein  $j$  (nämlich für  $j = k+1$ ) gezeigt ist.

2. Es existiere ein  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , für das die Beziehungen (26) und (27) erfüllt sind. Auf Grund der Monotonie der  $\tau_{\text{or}}^*$  gelten auch hier, wie in 1., die Ungleichungen  $B_1 > B_2 \geq \dots \geq B_{n+1}$ .

In (26) ist für  $j = 1(1)n$   $B_j$  linear in  $\tau_{\text{oj}-1}^*$  und damit

stetig und monoton wachsend bezüglich  $\tau_{\text{oj}-1}^*$ . Deshalb existiert genau eine Zahl  $T$ ,  $T \leq \tau_{\text{oj}-1}^*$ , mit

$$\sum_{r=j}^n \frac{q_r^*}{K_r^*} (T - \tau_{\text{or}}^*) - \frac{v_o^2}{2} = 0,$$

und für  $T$  kann die Gültigkeit der Ungleichungen  $\tau_{\text{oj}-1}^* \geq T > \tau_{\text{oj}}^*$  und  $T > \tau_{\text{on}}$  gezeigt werden. Setzt man nun  $\tau := -T$ , so ist obige Gleichung, wenn  $j = k+1$  substituiert wird, äquivalent zu (23) und es gilt

$$\tau_{\text{or}}^* \geq -\tau \text{ für } 1 \leq r \leq k \text{ und } \tau_{\text{or}}^* < -\tau \text{ für } k < r \leq n.$$

Damit ist die Indexmenge  $I^*$ , und mithin auch  $I$ , eindeutig festgelegt und es kann leicht nachgewiesen werden, daß durch (24) eine monoton wachsende Folge von Schichthöhen bestimmt ist, die auch die Durchsatzgleichungen erfüllt. Mit Hilfe der Herleitung der Gleichungen (24) aus diesen Durchsatzbeziehungen und der Überlegungen, daß erstens die Folge der  $B_r$  monoton ist und deshalb höchstens ein  $j$  existiert, welches (26) erfüllt, und daß zweitens wegen der Linearität der  $B_r$  bez.  $\tau_{\text{or}-1}^*$  auch  $\tau$  und  $I$  eindeutig bestimmt werden können, läßt sich die Eindeutigkeit der gefundenen Lösung belegen.

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur Lösbarkeit. Im Zweischichtfall ist die Aufgabe, eine Spalthöhe zu bestimmen, für die  $p' = 0$  wird, unlösbar genau dann, wenn

$$\tau_{\text{o2}} - \tau_{\text{o1}} > \frac{v_o^2 q_2}{2 K_2}. \text{ Ist schließlich } \tau_{\text{on}} = \min_{i \leq r \leq n} \tau_{\text{or}}, \text{ so hat}$$

diese Aufgabe stets eine Lösung.

## LITERATUR

- [1] Socolowsky, J., Bergmann, J.: Leitlinientchnik zur Berechnung von Strömungen nichtlinear-viskoser Medien bei Beschichtungsvorgängen. Technische Mechanik 7 (1986) 1, 21 – 29.
- [2] Teipel, I.: Die Strömungsvorgänge von nicht-Newton'schen Schmierstoffen in ebenen Gleitlagern. Ing. Archiv 46 (1977), 365 – 372.
- [3] Burchhardt, F.: Theoretische und numerische Untersuchungen von Ein- und Mehrschichtströmungen nicht-Newton'scher Flüssigkeiten. Diss. A, PH Köthen 1988.
- [4] Ostwald, W.: Über Viskosität kolloider Lösungen im Structur-, Laminar- und Turbulenzgebiet. Kolloidzeitschrift 28 (1926) N38, 261 – 281.
- [5] Bingham, E. C., Green, H. C.: Paint a plastic material and not a viscous liquid. Proc. Amer. Soc., Testing Materials 2 (1919) N19, 640.

Anschrift der Autoren:

Prof. Dr. sc. nat. J. Bergmann  
PH „W. Ratke“, Sektion Mathematik  
Lohmannstr. 23  
Köthen  
4370

Dr. rer. nat. F. Burchhardt  
PH „N. K. Krupskaja“  
Sektion M/P  
Kröllwitzer Str. 44  
Halle  
4050

Dr. sc. techn. R. Lipp  
TH „C. Schorlemmer“, Sektion Verarbeitungstechnik  
O.-Nuschke-Str.

Merseburg  
4200