

Lösung thermo-elastisch-plastischer Aufgaben mit der FEM

Stefan Benca

1. Einleitung

In den letzten Jahren beschäftigte man sich viel mit der Lösung physikalisch nichtlinearer und temperaturabhängiger Festigkeitsaufgaben. Diese Bestrebungen sind vor allem motiviert durch die industriellen Anforderungen für eine ökonomische und sichere Projektierung von Maschinenbauteilen, die extrem hohen mechanischen und thermischen Belastungen ausgesetzt sind. Als ausgewählte Beispiele sind zu nennen: Projektierung und Nachweis von Druckgefäßen, Einrichtungen für Kraftwerke, Motoren und Teilen der Automobil-, Flugzeug- und Raketentechnik, Studium der Technologien der Umformung, des Schweißens und der Lasertechnik.

Beachtenswerte Erfolge wurden in zwei wichtigen Richtungen, die die o. g. Analyse beeinflussen, erreicht:

- a) Ausarbeitung von konstitutiven (physikalischen) Beziehungen, d. h. mathematischer Beschreibung des nichtelastischen Verhaltens von Materials (Z. B. [1] bis [8]);
- b) Erarbeitung von numerischen Prozeduren für die Lösung dieser Aufgaben, vor allem Erstellung von Algorithmen für die numerische Integration nichtlinearer Prozesse (Z. B. [5] bis [9]).

Es ist nicht möglich, im Rahmen dieser Ausführungen alle Aspekte der Auswahl geeigneter konstitutiver Beziehungen und numerischen Prozeduren darzulegen. Die Entscheidung hängt vor allem davon ab, für welche Materialien, Belastungen und Temperaturbereiche das erarbeitete Programm bestimmt ist. In diesem Falle wird auf Literaturübersichten verwiesen (z. B. [2], [5], [10]).

In diesem Beitrag erfolgt eine kurze Beschreibung der grundlegenden Verfahrensweise und Beziehungen für thermo-elastisch-plastische Aufgaben, die bei der Erstellung eines FEM-Programms benutzt wurden. Es geht hier um eine Aufgabe, bei der der Körper mit einer nichtstationären mechanischen Belastung und einem nichtstationären Temperaturfeld beansprucht ist, wobei die Möglichkeit besteht, in hochbeanspruchten Teilen des Körpers die Fließgrenze zu überschreiten. Darüber hinaus ist es möglich, die Verfestigung des plastisch deformierten Materials und die Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften zu berücksichtigen. Bei höheren Temperaturen kann auch das Kriechen des Materials erfaßt werden.

2. Grundbeziehungen

Es wird ein dreidimensionaler Körper aus isotropem Material im Gleichgewichtszustand betrachtet (Bild 1). Der Körper ist belastet durch Volumenkräfte \underline{b} , Oberflächen-

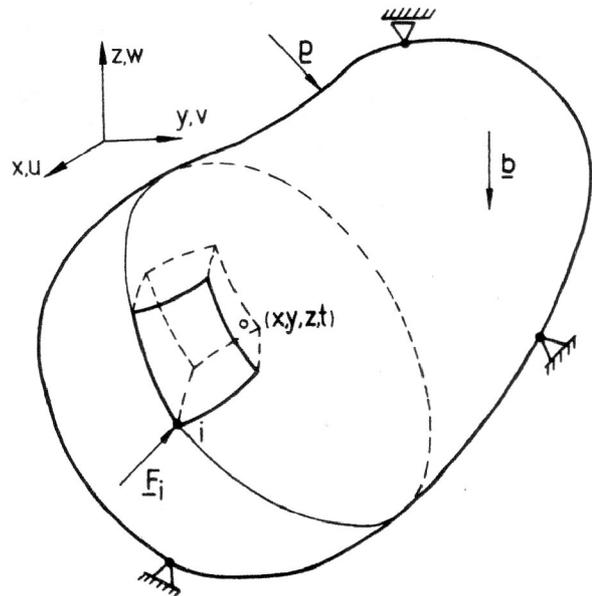


Bild 1
Dreidimensionaler Körper

lasten \underline{p} , Einzellasten F_i und Temperaturbeanspruchung, die in Form der Anfangsverzerrung

$$\underline{\epsilon}^0 = [\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon_z^0, \gamma_{xy}^0, \gamma_{yz}^0, \gamma_{zx}^0]^T \quad (1)$$

gegeben ist. Der Zuwachs der Anfangsverzerrung bei Änderung der Temperatur $T(t)$ ist

$$d\underline{\epsilon}^0 = \alpha(T) dT [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \quad (2)$$

$\alpha(T)$ ist der thermische Ausdehnungskoeffizient. Alle Belastungen sind Funktionen des Ortes (x, y, z) und der Zeit t . Ihre langsame zeitliche Veränderung ermöglicht es uns, die Massenkräfte und die ihre Wirkung auf die Materialeigenschaften zu vernachlässigen.

Die Lösung der Aufgabe liegt im Auffinden der Verschiebungen

$$\underline{u} = \underline{u}(x, y, z, t) \quad (3)$$

und der Spannungen

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(x, y, z, t) \quad (4)$$

für einen beliebigen Punkt (x, y, z) bei gegebenen Belastungen, Lagerungen und Materialeigenschaften des Körpers.

Bei der FEM-Lösung wird der Körper in finite Elemente eingeteilt, wobei die primären Unbekannten Knotenverschiebungen sind, die in dem Spaltenvektor \underline{a} zusam-

mengefaßt werden. Da die Aufgabe nichtlinear und zeitabhängig ist, wird für die Bestimmung von \underline{a} die inkrementelle Methode verwendet. Es wird angenommen, daß die Lösung zur Zeit t bekannt ist und eine Lösung zur Zeit $t + dt$ gesucht wird, wobei dt ein unendlich kleiner Zuwachs der Zeit ist. Zur Zeit $t + dt$ müssen die Gleichgewichtsbedingungen im Körper erfüllt sein, die bei der FE-Methode für den Knoten in Form

$$t + dt \underline{f} - t + dt \underline{q}(\underline{a}) = \underline{0} \quad (5)$$

aufgeschrieben werden. Der Vektor \underline{f} bedeutet die äußeren und der Vektor \underline{q} die inneren Knotenkräfte. Da man die Lösung zur Zeit t kennt, kann man schreiben

$$t + dt \underline{q} = t \underline{q} + d \underline{q}, \quad (6)$$

wobei $d \underline{q}$ der Zuwachs der inneren Knotenkräfte im Zeitintervall dt bedeutet. Hinsichtlich unendlich kleiner Zuwächse gilt die lineare Beziehung

$$d \underline{q} = {}^t \underline{K} d \underline{a}, \quad (7)$$

wobei ${}^t \underline{K}$ die Steifigkeitsmatrix und $d \underline{a}$ der Zuwachs der Knotenverschiebungen ist. Wird (6) und (7) in (5) eingesetzt, dann erhält man die Gleichung

$${}^t \underline{K} d \underline{a} = t + dt \underline{f} - t \underline{q}, \quad (8)$$

aus der der Vektor $d \underline{a}$ berechnet werden kann. Die Knotenverschiebungen zur Zeit $t + dt$ ergeben sich zu

$$t + dt \underline{a} = t \underline{a} + d \underline{a}. \quad (9)$$

Wenn $t + dt \underline{a}$ bekannt ist, kann man mit dem Standard-FEM-Verfahren die Verschiebung im beliebigen Punkt $t + dt \underline{u}(x, y, z)$ ermitteln. Aus den Verschiebungen ist die Verzerrung $d \underline{\epsilon}$ zu bestimmen. Ihre Berechnung ist von der Aufgabenformulierung abhängig. Für den Fall kleiner Deformationen benutzt man die linearen Cauchy'schen Beziehungen.

Man muß noch aus dem Zuwachs der Verzerrungen den Zuwachs der Spannungen berechnen. Nimmt man an, daß die gesamte Verzerrung klein ist, so kann sie als Summe von elastischer, plastischer, thermischer und Kriech-Deformationen ausgedrückt werden (als Vereinfachung wird im weiteren der Index t nicht geschrieben):

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^E + \underline{\epsilon}^P + \underline{\epsilon}^o + \underline{\epsilon}^K. \quad (10)$$

Für elastische Deformationen gilt das Hookesche Gesetz

$$\underline{\sigma} = \underline{D}^E \underline{\epsilon}^E, \quad (11)$$

wobei \underline{D}^E die temperaturabhängige Materialmatrix ist [10].

Wird aus (10) $\underline{\epsilon}^E$ ausgedrückt und in (11) eingesetzt, erhält man

$$\underline{\sigma} = \underline{D}^E (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^P - \underline{\epsilon}^o - \underline{\epsilon}^K). \quad (12)$$

Differenziert man (12) nach der Zeit, folgt

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{D}^E (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^P - \underline{\dot{\epsilon}}^o - \underline{\dot{\epsilon}}^K) + \underline{D}^E \underline{\epsilon}^E \quad (13)$$

oder in Form des Zuwachses ($d \underline{\sigma} = \underline{\dot{\sigma}} dt$)

$$d \underline{\sigma} = \underline{D}^E (d \underline{\epsilon} - d \underline{\epsilon}^P - d \underline{\epsilon}^o - d \underline{\epsilon}^K) + d \underline{D}^E \underline{\epsilon}^E. \quad (14)$$

Für die Berechnung der Spannung gilt dann

$$t + dt \underline{\sigma} = t \underline{\sigma} + d \underline{\sigma}. \quad (15)$$

Die Grundbeziehung für die Berechnung der Spannung ist die Gleichung (14), für die noch die Zuwächse $d \underline{\epsilon}^P$ und $d \underline{\epsilon}^K$ ermittelt werden müssen. Für die Berechnung der plastischen Verzerrung wurde eine in [7] abgeleitete Beziehung für ein sogenanntes thermo-elastisch-plastisches Materialmodell mit kombinierter kinematisch-isotroper Verfestigung benutzt. In dieser Beziehung benutzt man die von v.-Mises-Fließbedingung, die für den nicht-isothermen Fall erweitert ist und für die Fließfläche folgende Gleichung ergibt:

$$F = \left(\frac{3}{2} \underline{\bar{s}}^T \underline{\bar{s}} \right)^{\frac{1}{2}} - \bar{\sigma}_y = 0 \quad (16)$$

Die Endform der konstitutiven Beziehung lautet [7]:

$$d \underline{\sigma} = \underline{D}^{EP} (d \underline{\epsilon} - d \underline{\epsilon}^o - \underline{\dot{\epsilon}}^K dt) + \frac{3G}{(3G + H) \bar{\sigma}_y} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial T} dT - \frac{dG}{G} \bar{\sigma}_y \right) \underline{\bar{s}} + d \underline{D}^{E-1} \underline{D}^E \underline{\sigma}. \quad (17)$$

In (16) und (17) ist:

$$\underline{D}^{EP} = \underline{D}^E - \frac{9G^2}{(3G + H) \bar{\sigma}_y^2}$$

– die „elastisch-plastische“ Matrix,

$\underline{\bar{s}} = \underline{s} - (1 - R) \underline{\alpha}$ – reduzierte Deviatorspannung (bezogen auf den Mittelpunkt der Fließfläche),

$\bar{\sigma}_y(R, \epsilon_p, T)$ – reduzierte Fließgrenze des plastisch verfestigten Materials,

$H(\underline{\epsilon}^P, T)$ – Plastizitätsmodul,

$G(T)$ – Schubmodul,

R – Koeffizient der kombinierten Verfestigung,

ϵ_p – äquivalente plastische Verzerrung.

In der Beziehung (17) verhält sich $d \underline{\epsilon}^K$ wie die Anfangsverzerrung. Für deren Bestimmung wurde das sogenannte ORNL-Modell des multiaxialen Kriechens ausgewählt, das z. B. in der Arbeit [6] beschrieben wurde. Der Zuwachs $d \underline{\epsilon}^K$ ist die einzige Größe, die in (17) von der realen Zeit abhängt. Wenn man Kriechen nicht betrachtet, dann geht die Gleichung (17) in eine quasistationäre Beziehung über und die Zeit zu einem formalen Parameter, der dann nur den Zuwachs der äußeren Lasten bestimmt. Bei isothermer Belastung erhält man aus (17) die bekannte konstitutive Beziehung für elastisch-plastisches Material

$$d\sigma = \underline{D}^{EP} d\epsilon .$$

Die Formulierung (17) ermöglicht mit Benutzung der „elastisch-plastischen“ Matrix eine Beschleunigung der Konvergenz der Gleichgewichtsiteration in der Weise wie bei isothermen Aufgaben [11].

Die genannte Gleichgewichtsiteration ist charakteristisch für nichtlineare Aufgaben. Ihre Notwendigkeit ergibt sich daraus, daß bei der realen numerischen Lösung der Aufgabe die Zuwächse der äußeren Belastung endliche (nicht unendlich kleine) GröÙe haben und die Gleichung (8) in eine Differenzgleichung

$$\underline{K} \Delta \underline{a} = \underline{t} + \Delta \underline{t}_f - \underline{q} \quad (18)$$

umgewandelt werden muß, die nur eine Näherungslösung ergibt, das heißt, daß die Gleichgewichtsbedingungen (5) nicht erfüllt werden und zur Zeit $t + \Delta t$ in den Knoten die nichtausbalanzierten Kräfte

$$\underline{t} + \Delta \underline{t}_r = \underline{t} + \Delta \underline{t}_f - \underline{t} + \Delta \underline{t}_q \quad (19)$$

erscheinen.

Dieses Ungleichgewicht ist die Folge davon, daß wir eine nichtlineare Abhängigkeit zwischen den Verschiebungen \underline{a} und den Kräften \underline{f} für die lineare Beziehung (18) benutzt haben. Zur Korrektur der Verschiebungen und der Herstellung des Gleichgewichtes wurde die modifizierte Newton-Raphson-Methode [11] benutzt. Einige Nachteile dieser Methode wurden nach [12] beseitigt.

3. Numerische Realisierung

Die Integration der Gleichung (17) für einen endlichen Zuwachs der gesamten Verzerrung $\Delta \underline{\epsilon}$ ist nicht einfach. Sie ist vor allem bei mehreren qualitativen Änderungen kompliziert, die dann entstehen, wenn der Spannungspunkt im Spannungsraum die Fließfläche erreicht und die mechanischen Lasten und Temperaturen sich weiterhin ändern. Das Integrationsverfahren, welches wir im Programm benutzt haben, kann man wie eine subinkrementelle, mittlere Normalenmethode mit einer radialen Rückkehr charakterisieren [13]. Es wird in kurzer Form das im Programm benutzte numerische Verfahren ohne Kriechdeformationen beschrieben.

Am Anfang der Integration kennen wir den Zustand aus dem vorangegangenen Schritt, die kinematische Lösung zur Zeit $t + dt$ ($\underline{t} + \Delta \underline{t}_\epsilon$, $\Delta \underline{\epsilon}$) und den Zuwachs der unabhängigen Variablen ($\Delta \underline{f}$, ΔT). Vor der eigentlichen Integration stellt man zuerst fest, ob der Zuwachs nur elastisch ist. Man betrachtet eine lineare Beziehung

$$\underline{t} + dt \underline{\sigma}^E = \underline{t} + \Delta \underline{t}_D^E (\underline{t}_\epsilon + \Delta \underline{\epsilon}) \quad (20)$$

mit

$$\underline{t} + \Delta \underline{t}_D^E = T(\underline{t} + \Delta \underline{t}) \underline{D}^E .$$

Wenn jetzt für die Fließfunktion gilt

$$F[\underline{t} + \Delta \underline{t}_D^E, (1-R) \underline{t} + \Delta \underline{t}_\alpha, \underline{t} + \Delta \underline{t}_y] \leq 0, \quad (21)$$

dann kann man diesen Zuwachs als elastisch betrachten und man erhält die Spannung einfach zu

$$\underline{t} + \Delta \underline{t}_\sigma = \underline{t} + \Delta \underline{t}_\sigma^E .$$

Wenn die Bedingung (21) nicht gilt, erhält ein Teil bzw. der ganze Zuwachs (nach dem Zustand im vorangegangenen Schritt) plastische Deformationen. In diesem Falle muß man zuerst einen Anteil p der reinen plastischen Verzerrung aus der Beziehung

$$F[\underline{t}_\sigma + p \Delta \sigma^E, (1-R) (\underline{t}_\alpha - p \Delta \alpha^E), \bar{\sigma}_y (\underline{t}_T + p \Delta T, R \underline{t}_{\epsilon_p})] = 0 \quad (22)$$

bestimmen, wobei

$$\Delta \alpha^E = \underline{t} + \Delta \underline{t}_\alpha^E - \underline{t}_\alpha^E .$$

eine Temperaturänderung von α ist und

$$\Delta \sigma^E = \underline{t} + \Delta \underline{t}_\sigma^E - \underline{t}_\sigma . \quad (23)$$

Die Gleichung (22) ist quadratisch in p , weil eine konvexe Fließfläche angenommen wird. Man kann zeigen, daß stets der größere Wert im Intervall $0 \leq p \leq 1$ auszuwählen ist.

Wenn p bekannt ist, kann man die Spannungen und die anderen Zustandsgrößen an den Anfang der plastischen Deformation verschieben. Im Rest des Intervalles läuft eine kontinuierliche plastische Deformation ab, wobei die Gleichung (17) integriert werden muß. Den Rest der gesamten Verzerrung $(1-p) \Delta \underline{\epsilon}$ teilt man auf in eine bestimmte Anzahl von Subinkrementen $\frac{1}{m} (1-p) \Delta \underline{\epsilon}$ und

integriert die Gleichung (17). Es ist möglich, für diese Integration aus [6], [11], [12] mehrere Algorithmen auszuwählen. Am Ende jedes subinkrementellen Schrittes korrigiert man die Zustandsgrößen σ , α , ϵ_p , T usw. Die letzten Werte \underline{D}^{EP} für finite Elemente (nach erfolgter Gleichgewichtsiteration) verwendet man für die Berechnung der Steifigkeitsmatrixen aus der bekannten Beziehung

$$\underline{K}_e = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D}^{EP} \underline{B} dV$$

und für die Ermittlung der Tangentensteifigkeitsmatrix nach der üblichen FE-Methode [11]. Diese Matrix verwendet man dann für den nächsten „großen“ Zeitschritt Δt .

4. Berechnungsbeispiel

Das oben beschriebene Berechnungsmodell wurde in das Programm Neanko [7] eingearbeitet. Es kann benutzt werden für die Lösung dreidimensionaler Aufgaben (isoparametrisches 20-Knoten-Hexaederelement), rotations-symmetrischer Aufgaben und Scheiben mit ebenem Spannungs- sowie ebenem Verzerrungszustand (isoparametrisches Element mit 3 bis 9 Knoten). Für eine Aufgabe ohne Kriechen ist das Material mit 10 Materialgrößen charakterisiert (man betrachtet einen bilinearen Zusammenhang zwischen σ und ϵ und lineare Temperaturabhängigkeit der Materialgrößen; der obere Index Null gilt für 20 °C):

- E^0 – Elastizitätsmodul,
- ν^0 – Poissonsche Zahl,

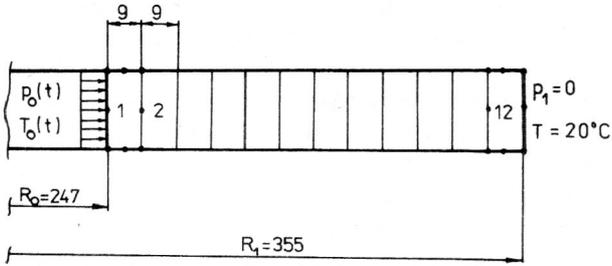


Bild 2
Vernetzung des Ringes

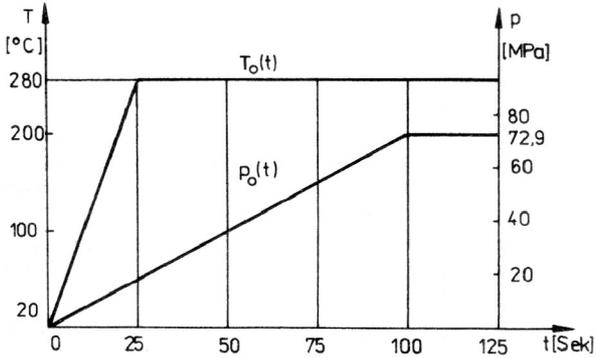


Bild 3
Verläufe des Druckes und der Randtemperatur

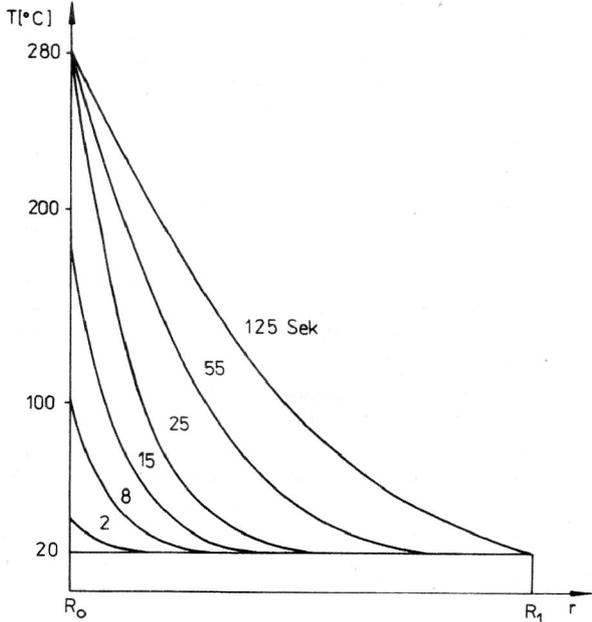


Bild 4
Nichtstationäres Temperaturfeld des Ringes

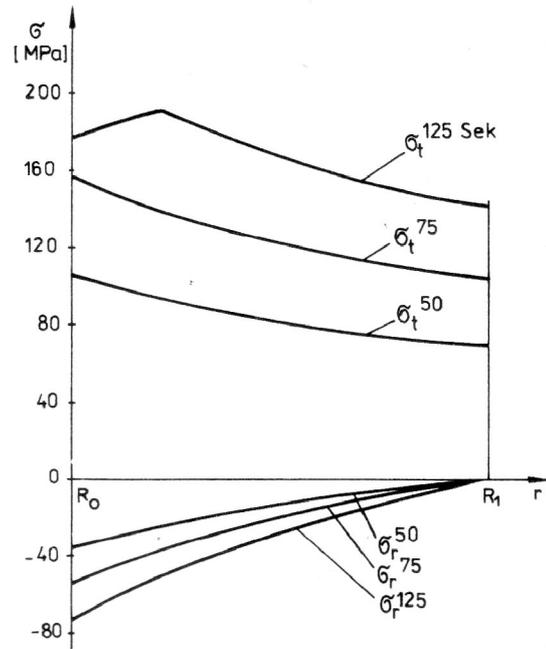


Bild 5
Druckbelastung des Ringes: Verläufe der Tangential (σ_t)- und Radialspannungen (σ_r) zu einigen ausgewählten Zeitpunkten

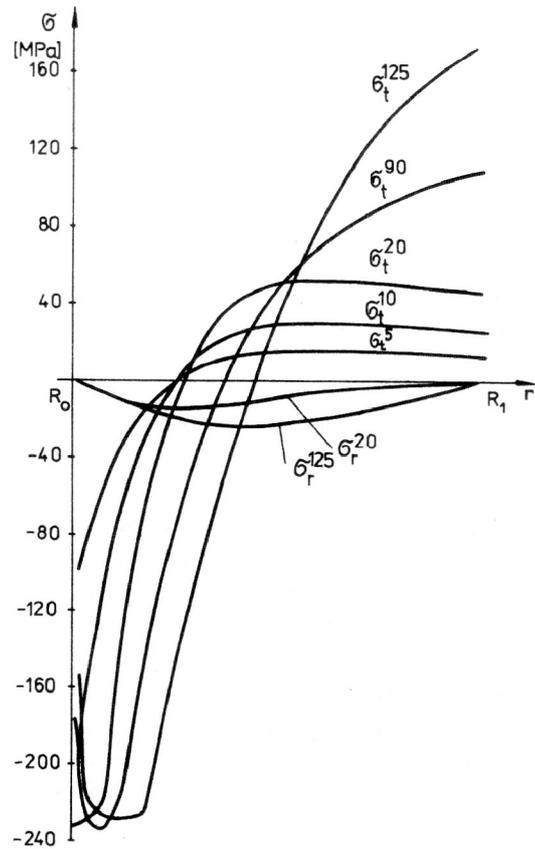


Bild 6
Temperaturbelastung des Ringes

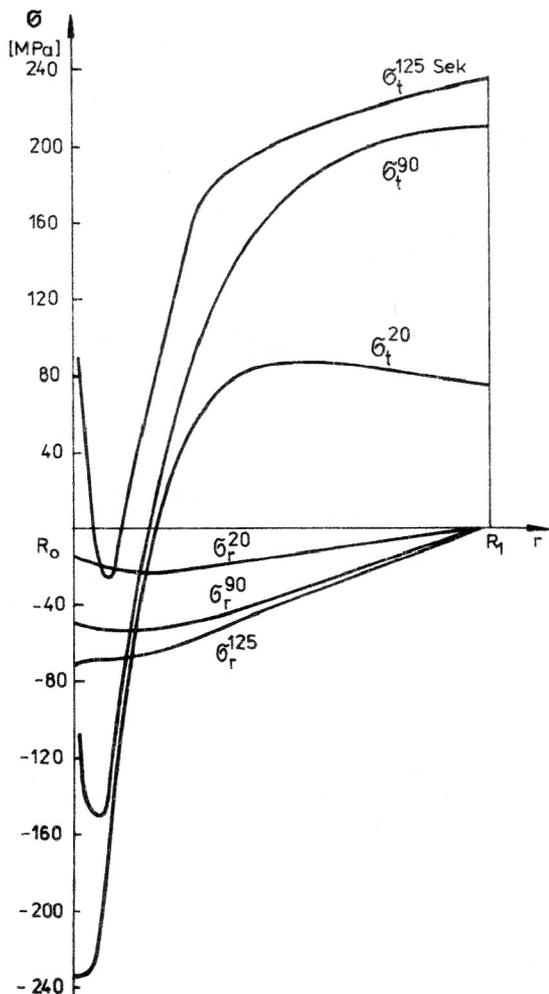


Bild 7
Gesamtbelastung des Ringes

σ_y^0 – Fließgrenze,

E_T^c – Verfestigungsmodul,

α^0 – thermischer Ausdehnungskoeffizient

und weiter dE/dT , $d\nu/dT$, $d\sigma_y/dT$, dE_T/dT , $d\alpha/dT$.

Für einfache Körper mit einfachen Belastungen wurde eine Serie von Testrechnungen durchgeführt (Zug – Druck, reiner Schub, ebener Spannungszustand) und mit analytischen Ergebnissen verglichen. Die Ergebnisse haben den Algorithmus und die Richtigkeit des Programms bestätigt [7].

Aus dieser Serie werden Ergebnisse einer Testrechnung vorgestellt, die auch die Möglichkeiten der Ausnutzung des Programms aufzeigen. Es wurde der Spannungszustand in einem Kreisring berechnet (Bild 2), der durch einen nichtstationären Innendruck und ein nichtstationäres Temperaturfeld belastet ist. Nichtnullmaterialwerte sind:

$$E^0 = 2,08 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu^0 = 0,3$$

$$\sigma_y^0 = 220 \text{ MPa}$$

$$E_T^c = 0,12 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\alpha^0 = 0,112 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

30

Die Verläufe des Druckes und der Randtemperatur sind im Bild 3 dargestellt. Aus dem Bild 4 entnimmt man das berechnete Temperaturfeld. Man löst die Aufgabe mit dem Programm NEANKO in 25 Schritten mit 5 Sekunden als Schrittweite. Das Bild 5 zeigt die Verläufe der Tangential (σ_t)- und Radialspannungen (σ_r) zu einigen ausgewählten Zeitpunkten nur für die Druckbelastung. Im Bild 6 sind die Ergebnisse nur für die instationäre Temperaturbelastung und im Bild 7 die Spannungsverläufe für die Gesamtbelastung dargestellt.

LITERATUR

- [1] Yamada, J.: Constitutive modelling of inelastic behavior and numerical solution of nonlinear problems by the FEM. *Comp. and Struct.*, 8, 1978, S. 533 – 543.
- [2] Becker, M.: Status of the development of constitutive equations for the evaluation of the visco-plastic material behaviour at elevated temperatures. *Nucl. Eng. Design*, 72, 1982, S. 27 – 34.
- [3] Allen, D. H. Hausler, W. E.: A theory for analysis of thermoplastic materials. *Comp. and Struct.*, 13, 1981, S. 129 – 135.
- [4] Riff, R., Carlson, R. L., Simitzes, G. J.: The thermodynamically consistent constitutive equations for nonisothermal strain, elasto-plastic creep behavior. *AIAA Jnl.*, 25, 1987, S. 114 – 122.
- [5] Miller, A. K. (Editor): *Unified constitutive equations for creep and plasticity*. Elsevier, London, 1987.
- [6] Snyder, M. D., Bathe, K. J.: *Finite element analysis of thermo-elastic-plastic and creep response*. MIT, Report 82448 – 10, 1980.
- [7] Benca, S., Dutko, M.: NEANKO – A program for analysis of thermoelasticplastic problems. Slovak Technical University, Faculty of Mechanical Engineering, Report 27/87 – 30, 1987 (slowakisch).
- [8] Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc.: *ABAQUS. Theory Manual*, Providence, Rhode Island, 1982.
- [9] Murin, J.: Solution of geometric nonlinear elastic-plastic deformations by FEM. *Strojnický časopis*, 38, 1987, S. 331 – 343 (slowakisch).
- [10] Owen, D. R. J. (Editor): *Computational plasticity: Models, software and applications*. Proc. Int. Conf. in Barcelona, 6 – 10 Apr. 1987, Part 1 und Part 2, Pineridge Press, Swansea 1987.
- [11] Zienkiewicz, O. C.: *Methode der finiten Elemente*. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1983.
- [12] Bathe, K. J., Cimento, A. P.: Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. *Comp. Met. Appl. Mech. Eng.*, 22, 1980, S. 59 – 85.
- [13] Schreyer, H. L. u. a.: Accurate numerical solutions for elastic-plastic models. *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Techn.*, 101, 1979, No. 3.

Anschrift des Verfassers:

Doz. Ing. Stefan Benca, CSc.

Strojnická fak. SVST

Gottwaldovo nám. 17

812 31 Bratislava/CSSR