

Anwendung des BEM-Programms OREAS zur Lösung bruchmechanischer dreidimensionaler Aufgaben der Elastostatik

Michael Busch

1. Einleitung

Anspruchsvolle bruchmechanische Aufgabenstellungen erfordern zu ihrer Lösung den Einsatz der modernen Rechentechnik. Neben der FEM werden international die Randelementmethoden (BEM, „boundary element method“) zunehmend eingesetzt. Diese bestehen in der numerischen Umsetzung einer Integralgleichung, die auf dem Rand des Gebietes formuliert ist. Die Werte der Feldgrößen werden zunächst auf dem Rand des Gebietes ermittelt und können dann durch eine einfache Integration über den Rand auch im Inneren berechnet werden.

Je nach Art der Randgrößen, in denen die Integralgleichung formuliert ist, unterscheidet man zwischen direkter und indirekter BEM. Bei der direkten BEM, die im folgenden ausschließlich behandelt wird, sind die Randgrößen die Verschiebungen und Randspannungen (Tractions).

Die BEM weist gegenüber der FEM eine Reihe von Vorteilen auf. Da die Integralgleichung auf dem Rand des Gebietes formuliert ist, braucht auch nur der Rand diskretisiert zu werden. Dies stellt den wesentlichen Vorteil der BEM gegenüber den gebietsorientierten Verfahren dar und macht die BEM für Rißprobleme, bei denen man die Feldgrößen im Inneren des Gebietes in der Regel nicht benötigt, besonders attraktiv. Die Behandlung von Problemen mit unendlichen oder halbunendlichen Gebieten erfolgt daher ebenfalls unproblematisch. Die Reduzierung in der Dimension der Vernetzung führt zu einer beträchtlichen Verringerung des Aufwandes für das Pre- und Post-Prozessing. Außerdem wird dadurch die Implementierung leistungsfähiger BEM-Software auf dem Kleinrechner möglich [1], [2].

Im Gegensatz zur FEM ist der Einbau analytischer Lösungen in den BEM-Algorithmus leicht durchführbar. So können in der Umgebung von Rißspitzen spezielle, singuläre Elemente verwendet werden. Da man in der BEM von einer Fundamentallösung des problembeschreibenden Differentialoperators ausgeht, bietet sich die Einbeziehung bekannter Fundamentallösungen für spezielle Gebiete in das Verfahren an [3].

Das Programm OREAS entstand im Ergebnis der jahrelangen Forschungsbemühungen des IFE Halle um die Entwicklung und Anwendung der Randelementmethode, insbesondere für die Analyse von Rißproblemen. Die in OREAS implementierte Vernetzungs- und Integrationsstrategie beruht auf einer von Lachat und Watson [4] vorgestellten Konzeption. Zur Modellierung der Rißspitzenumgebung werden von Luchi und Poggialini [5] eingeführte Rißelemente verwendet. Das Programm wurde in der Programmiersprache FORTRAN IV geschrieben und arbeitet auf Rechenanlagen vom ESER-Typ.

2. Charakterisierung des Anwendungsbereiches

Das Programm OREAS dient der Lösung dreidimensionaler Aufgaben der linearen Elastostatik. Es können Probleme, die über endliche oder unendliche Gebiete formuliert sind, behandelt werden. Der zu analysierende Körper kann sich aus Bereichen mit stückweise homogenem, isotropem Materialverhalten (Substrukturen) zusammensetzen. Eine solche Substrukturierung wird auch zur Modellierung unsymmetrischer Rißprobleme benötigt. Der Riß muß dann zwischen zwei Substrukturen angeordnet werden. Eine Substrukturtechnik kann darüber hinaus bei speziellen Gebieten (lange Strukturen) oder bei Problemen, bei denen eine Vielzahl von Rechnungen mit jeweils modifizierter Geometrie in einem kleinen Bereich (z. B. Veränderung der Rißform) vorgenommen werden, zu einer Verringerung des numerischen Aufwandes führen.

In einem Rechnerlauf können mit OREAS mehrere qualitativ gleichartige Lastfälle simultan behandelt werden. Lastfälle sind von gleicher Qualität, wenn an gleichen Stellen Randwerte gleichen Typs (Randverschiebungen oder Randspannungen) vorgegeben sind, die sich jedoch quantitativ, d. h. im Wert, von Lastfall zu Lastfall unterscheiden können.

Jedem Knoten der Vernetzung kann bei der Eingabe ein spezielles orthogonales Koordinatensystem zugeordnet werden, auf das sich die Werte der Feldgrößen beziehen. Das Programm berechnet wahlweise in den Knoten das Basissystem, in welchem die Außennormale einer der drei Basisvektoren ist. Als Ergebnis einer Rechnung werden vom Programm die Randwerte in den Knoten im jeweiligen Koordinatensystem sowie im (x,y,z)-System ermittelt.

Für jede Substruktur werden noch die resultierende äußere Kraft und die Reaktionskraft sowie die elastische Verformungsarbeit

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \iint_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \quad (1)$$

berechnet. Bei Rißproblemen werden außerdem die Spannungsintensitätsfaktoren in den Knoten der Rißfront ermittelt. Diese werden sowohl aus den Verschiebungen der Rißufer als auch aus den Randspannungen an der Rißfront berechnet. Dabei weisen die aus den Randspannungen abgeleiteten K-Faktoren im allgemeinen eine höhere Genauigkeit als die aus den Verschiebungen bestimmten auf. Die Spannungsintensitätsfaktoren werden in gewohnter Weise bezüglich eines lokalen Koordinatensystems an der Rißfront ausgegeben.

Wahlweise besteht noch die Möglichkeit der Berechnung der Feldgrößen an inneren Punkten einer beliebigen Substruktur.

3. Grundlagen der BEM

Da die Grundlagen der BEM in der Literatur bereits ausführlich dargestellt wurden (z. B. [4], [6]), wird sich hier auf eine kurze Wiedergabe der Grundzüge der Theorie beschränkt, die dem besseren Verständnis des nachfolgenden dienen soll.

Das zentrale Problem der statischen Elastizitätstheorie besteht in der Lösung einer Randwertaufgabe. Bei einem korrekt gestellten Problem sind bei Vorgabe von Verschiebungs- und Spannungsvektoren auf dem Rand eines Gebietes die restlichen Randgrößen sowie die Feldgrößen im Inneren zu bestimmen. Für den Fall fehlender Volumenkräfte, der im weiteren stets betrachtet wird, erhält man aus dem Bettischen Reziprozitätstheorem die folgenden integralen Identitäten (zur Herleitung vgl. auch [6]):

$$\vec{c}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}) = \iint_{\Gamma} [\vec{U}(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{t}(\vec{y}) - \vec{T}(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{u}(\vec{y})] d\Gamma_y \quad (2)$$

$$\vec{y} \in \Gamma$$

Hier ist \vec{U} eine Fundamentallösung und \vec{T} der aus \vec{U} abgeleitete Tensor der Randspannungen, \vec{u} und \vec{t} sind die Randverschiebungen bzw. -spannungen, für die Größe \vec{c} gilt:

$$c_{ij}(\vec{x}) = \begin{cases} \delta_{ij}, & \vec{x} \in \Omega \setminus \Gamma \\ \alpha_{ij}, & \vec{x} \in \Gamma \\ 0, & \vec{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (3)$$

In OREAS sind die Vollraum- und die Halbraumfundamentallösung, welche der Verschiebung aufgrund der Wirkung einer Einzelkraft in einem durch eine unendlich ausgedehnte, lastspannungsfreie Ebene begrenzten Medium entspricht, implementiert. Die explizite Berechnung des Tensors $\vec{\alpha}$ kann praktisch immer umgangen werden, so daß nicht weiter darauf eingegangen wird. Durch Differentiation von (2) erhält man eine Integralgleichung zur Berechnung der Spannungen an inneren Punkten.

Das Integralgleichungssystem (2) gilt für endliche und unendliche Gebiete. Im letzteren Fall müssen die Feldgrößen im Unendlichen ein asymptotisches Verhalten der Ordnung

$$\vec{u} \in 0(r^{-1})$$

$$\vec{t} \in 0(r^{-2})$$

aufweisen.

Das Integralgleichungssystem (2) besitzt Gültigkeit in einer Substruktur. Die Integralgleichungssysteme für die einzelnen Substrukturen werden durch die Bedingung des Kräftegleichgewichts und der Verschiebungskompatibilität an gemeinsamen Punkten gekoppelt.

Bei sachgemäßer Randwertvorgabe stellt (2) eine Integralgleichung für die gesuchten Randgrößen dar. Zur

numerischen Lösung wird das unendlichdimensionale Problem (2) durch eine Diskretisierung finitisiert. Zur Diskretisierung der Oberfläche stehen dem Nutzer 8-Knoten-Viereck- und 6-Knoten-Dreieckelemente zur Verfügung. Im Programm OREAS wird der von der FEM her bekannte isoparametrische, quadratische Ansatz (5) verwendet, dem die oben beschriebene Knotenzahl entspricht.

$$\vec{x}(\vec{\xi}) = \sum_{c=1}^8 N^c(\vec{\xi}) \cdot \vec{x}^c$$

$$\vec{u}(\vec{\xi}) = \sum_{c=1}^8 N^c(\vec{\xi}) \cdot \vec{u}^c \quad (5)$$

$$\vec{t}(\vec{\xi}) = \sum_{c=1}^8 N^c(\vec{\xi}) \cdot \vec{t}^c$$

Die Werte im Element werden über die Werte in den Elementknoten approximiert. Die 6-Knoten-Dreieckelemente sind kollabierte Viereckelemente, die aus diesen entstehen, indem den drei Knoten einer Seite dieselben Werte für Geometrie und Feldgrößen zugewiesen werden.

Setzt man die Ansätze (5) für Verschiebungen, Randspannungen und Randgeometrie in das Integralgleichungssystem (2) ein, bekommt man für einen Aufpunkt \vec{x} drei algebraische Gleichungen für die Verschiebungen und Randspannungen aller Knoten der Oberfläche der Substruktur. Wählt man der Reihe nach alle Knoten der Vernetzung als Aufpunkt, so erhält man je Substruktur zwei Matrizen, deren Koeffizienten die Integrale mit den Tensoren \vec{U} und \vec{T} sind. Diese Koeffizientenintegrale werden numerisch ausgewertet.

Aufgrund der Eigenschaften einer Fundamentallösung besitzen die Tensoren für den Fall $\vec{x} = \vec{y}$ Singularitäten der Ordnung $|\vec{x} - \vec{y}|^{-1}$ bzw. $|\vec{x} - \vec{y}|^{-2}$. Daher muß, je nach gegenseitiger Lage von Aufpunkt \vec{x} und dem Element, über das integriert wird (Punkt \vec{y}), zwischen Integralen mit regulären und singulären Integranden unterschieden werden. Die ersteren werden direkt mit Gauß-Integrations-Regeln ausgewertet, wobei die Integrationsordnung zuvor in Abhängigkeit von der Größe des Elementes und dem minimalen Abstand des Aufpunktes vom Element abgeschätzt wird, um Aufwand und Genauigkeit der Integration zu optimieren.

Die Integrale mit singulären Integranden lassen sich mit einem speziellen Transformationsalgorithmus bzw. der Methode der Starrkörpertranslation [6] ebenfalls mit Gauß-Formeln berechnen. Man erhält im Ergebnis ein Matrixsystem für jede Substruktur. Nach der Einarbeitung der gegebenen Randwerte sowie der Kopplung der Matrixsysteme für die einzelnen Substrukturen erhält man ein in der Regel unsymmetrisches blockstrukturiertes Gleichungssystem, welches man mit einem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen kann.

4. Beschreibung des Programmsystems OREAS

Das Programm OREAS ist in der Lage, bei relativ geringem Hauptspeicherbedarf umfangreiche Probleme zu

lösen. Das Programm OREAS verfügt über ein zentrales Arbeitsfeld, dessen Länge im Hauptprogramm vereinbart und quasidynamisch verwaltet wird. Das Programm besteht aus drei getrennten Programmabschnitten. Im ersten erfolgt substrukturweise der Matrixaufbau. Die erforderliche Länge des Arbeitsfeldes wird von diesem Programmteil bestimmt. Im zweiten Programmteil erfolgt die Assemblierung der zu lösenden Matrix. Mit einem speziellen, selbst entwickelten Out-of-core-solver, der die Lösung umfangreicher Gleichungssysteme bei geringem zur Verfügung stehenden Hauptspeicher gestattet, erfolgt dann die Faktorisierung der Matrix bei vollständiger spaltenweiser Pivotisierung. Nach der Dreieckszerlegung werden die Lösungen für die rechten Seiten ermittelt, die resultierenden Kräfte, die elastische Verformungsarbeit sowie gegebenenfalls die Spannungsintensitätsfaktoren berechnet.

Im dritten Programmteil erfolgt die Berechnung der Spannungen und Verschiebungen an ausgewählten inneren Punkten.

Das Programm OREAS ist Bestandteil der am IFE Halle entwickelten Programmbank BOREAS (bruchmechanisch orientiertes Randelement-Analyse-System) und bietet spezielle Optionen zur Analyse rißbehafteter Bauteile. Dazu werden vom Programm spezielle Elemente zur Verfügung gestellt, die aus den Viereck- und Dreieckelementen durch Modifikation der Formfunktionen hervorgehen. Die sieben verschiedenen Elementtypen sind in Bild 1 grafisch dargestellt, die speziellen Elemente sollen im folgenden näher erläutert werden.

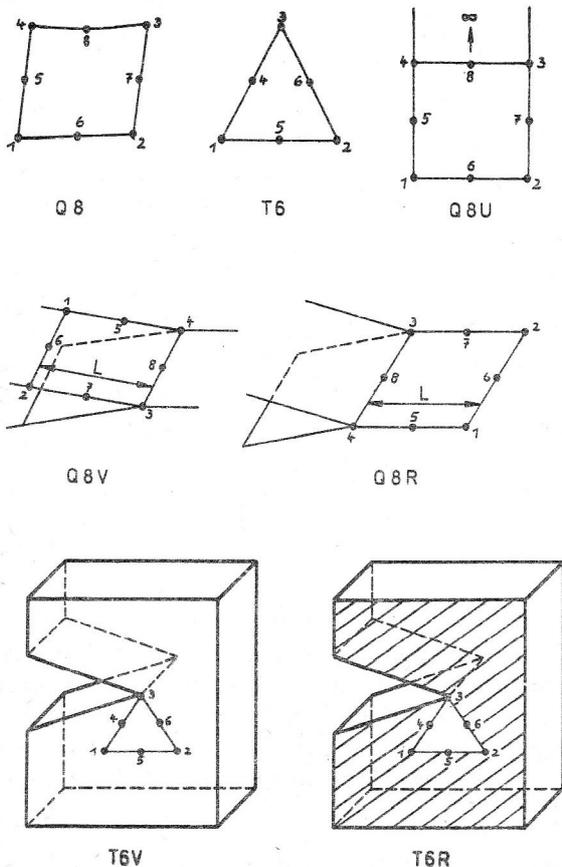


Bild 1
Elementkatalog des BEM-Programms OREAS

1. Singuläre Rißspitzenelemente (Q8R, T6R, Q8V, T6V)

Diese Elemente werden zur Modellierung des $r^{1/2}$ -Verhaltens der Verschiebungen bzw. der $r^{-1/2}$ -Singularität der Spannungen an einer Rißfront (r bedeutet hier den senkrechten Abstand von der Rißfront) verwendet. Die Mittelknoten der beiden Seiten senkrecht zur Rißfront (in Bild 1 die Knoten 5 und 7 der Q8V/R-Elemente bzw. die Knoten 4 und 6 der T6V/R-Elemente) müssen dazu genau in der Mitte zwischen den Elementeckknoten angeordnet werden. Die anderen Elementknoten sind keinen Bedingungen unterworfen.

Die Elemente Q8V und T6V enthalten reguläre Ansätze für die Spannungen und können somit auf den Rißufern bzw. auf der freien Oberfläche um den Schnittpunkt der Rißfront mit der Körperoberfläche eingesetzt werden, die Elemente Q8R und T6R hingegen enthalten den singulären Spannungsansatz und werden vor der Rißfront bzw. um den Schnittpunkt der Rißfront mit der Symmetrieffläche (falls vorhanden) auf dieser angebracht (vgl. Bild 1).

Zur Modellierung eines Risses müssen stets genausoviel Q8V-Elemente hinter der Rißfront wie Q8R-Elemente vor der Rißfront verwendet werden.

Das $r^{1/2}$ -Verhalten der Verschiebungen wurde durch explizite Implementierung der Wurzel in die Formfunktionen des isoparametrischen Ansatzes für \vec{u} und \vec{t} erzielt. Anschließend wird der \vec{t} -Ansatz durch Multiplikation der Formfunktionen mit einer Funktion f_s korrigiert, die die folgenden Eigenschaften aufweist:

1. $f_s \in 0(r^{-1/2}), r \rightarrow 0$
2. $f_s = 1, r = L/2$
3. $f_s = 1, r = L$

L ist die Länge des Elementes in Richtung senkrecht zur Rißfront (vgl. Bild 1).

Damit haben die Verschiebungen aller Rißelemente die Form

$$\vec{u} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 r^{1/2} + \vec{a}_3 r \quad (7)$$

während für die Randspannungen der Q8R- und T6R-Elemente die Darstellung

$$\vec{t} = \vec{b}_1 r^{-1/2} + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 r^{1/2} \quad (8)$$

gilt.

Aus diesem Ansatz werden von OREAS die Spannungsintensitätsfaktoren $K_i, i=I, II, III$ aus den Verschiebungen und Randspannungen durch Vergleich der Rißlösung mit den Koeffizienten \vec{a}_2 bzw. \vec{b}_1 ermittelt.

2. Unendliche Elemente (Q8U)

Diese Elemente dienen zur Modellierung unendlicher Gebiete. Nachdem man einen endlichen Teilbereich des Gesamtgebietes mit den anderen Elementen diskretisiert hat, werden daran die unendlichen Elemente angeschlossen, die in geeigneter Weise den Übergang der Körpergeometrie ins Unendliche realisieren und dabei das Ab-

klingsverhalten (5) der Feldgrößen korrekt approximieren. Die drei Knoten einer der Elementseiten müssen stets einem endlichen Element angehören (z. B. Knoten 1, 2 und 6 in Bild 1). Die übrigen Knoten des Elementes werden mit einer speziellen Transformation in das unendliche Gebiet abgebildet. Diese Knoten dienen lediglich zur Darstellung der Geometrie. Die Feldgrößen werden bei einem unendlichen Element nur an den drei Knoten der Seite, die das unendliche Element mit den endlichen verbindet, vorgegeben bzw. berechnet. Bei der Diskretisierung ist zu beachten, daß die Knoten auf den Seiten aneinandergrenzender Elemente identisch sind (d. h. es wird ein konformer Ansatz verwendet).

5. Ausgewählte bruchmechanische Anwendungsbeispiele

Die Eignung des Verfahrens für bruchmechanische Belange soll nun anhand einiger Rechenergebnisse demonstriert werden. Die Rechnungen wurden stets mit der EDVA EC 1040 durchgeführt. Die Spannungsintensitätsfaktoren wurden sämtlich aus den Werten der Koeffizienten der Randspannungssingularität des Rissspitzenknotens ermittelt, da die Genauigkeit der berechneten K-Faktoren hierbei höher ist als bei einer Auswertung mit der Verschiebungsformel.

Als erstes wird der K-Faktor für einen „penny-shaped-crack“ unter Innendruck im Vollraum berechnet. Dieses Problem ist analytisch lösbar, und die Lösung für den K_I -Spannungsintensitätsfaktor lautet

$$K_I = 2\sigma (a/\pi)^{1/2} = 0.1128 \text{ MPam}^{1/2}$$

mit $\sigma = 1.0 \text{ MPa}$ und $a = 10^{-2} \text{ m}$.

Die Vernetzung der Symmetrieebene erfolgte mit 56 Elementen (8 unendliche Elemente) und ist schematisch in Bild 2 dargestellt. Da es sich bezüglich der Rißfläche um ein symmetrisches Problem handelt, war eine Substrukturierung nicht erforderlich. Die CPU-Zeit (Zentraleinheitszeit) an der Rechenanlage betrug etwa 84 Minuten. Der K-Faktor wurde zu

$$K_I = 0.1134 \text{ MPam}^{1/2}$$

ermittelt (relativer Fehler etwa 0,5 %).

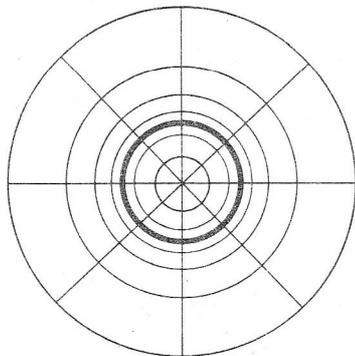


Bild 2
BEM-Vernetzung eines kreisförmigen Risses im Vollraum (56 Elemente, davon 8 unendliche Elemente)

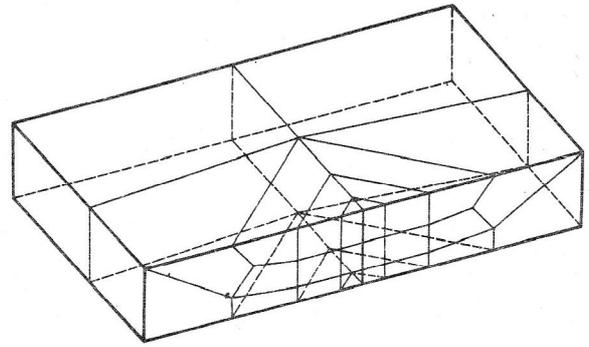


Bild 3
BEM-Vernetzung der CT-Probe (48 Elemente, 140 Knoten)

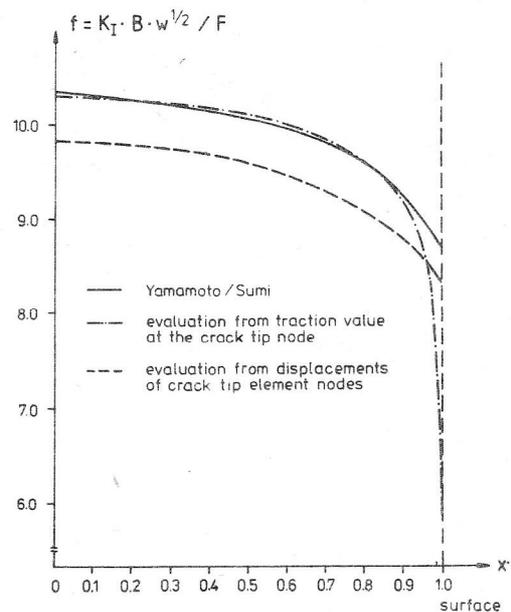


Bild 4
Vergleich der Ergebnisse für die CT-Probe aus FEM- und BEM-Rechnungen

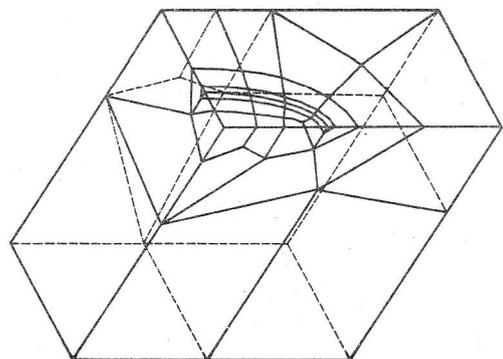


Bild 5
BEM-Netzwerk für Zugprobe mit halbelliptischem Oberflächenriß (56 Elemente, 164 Knoten)

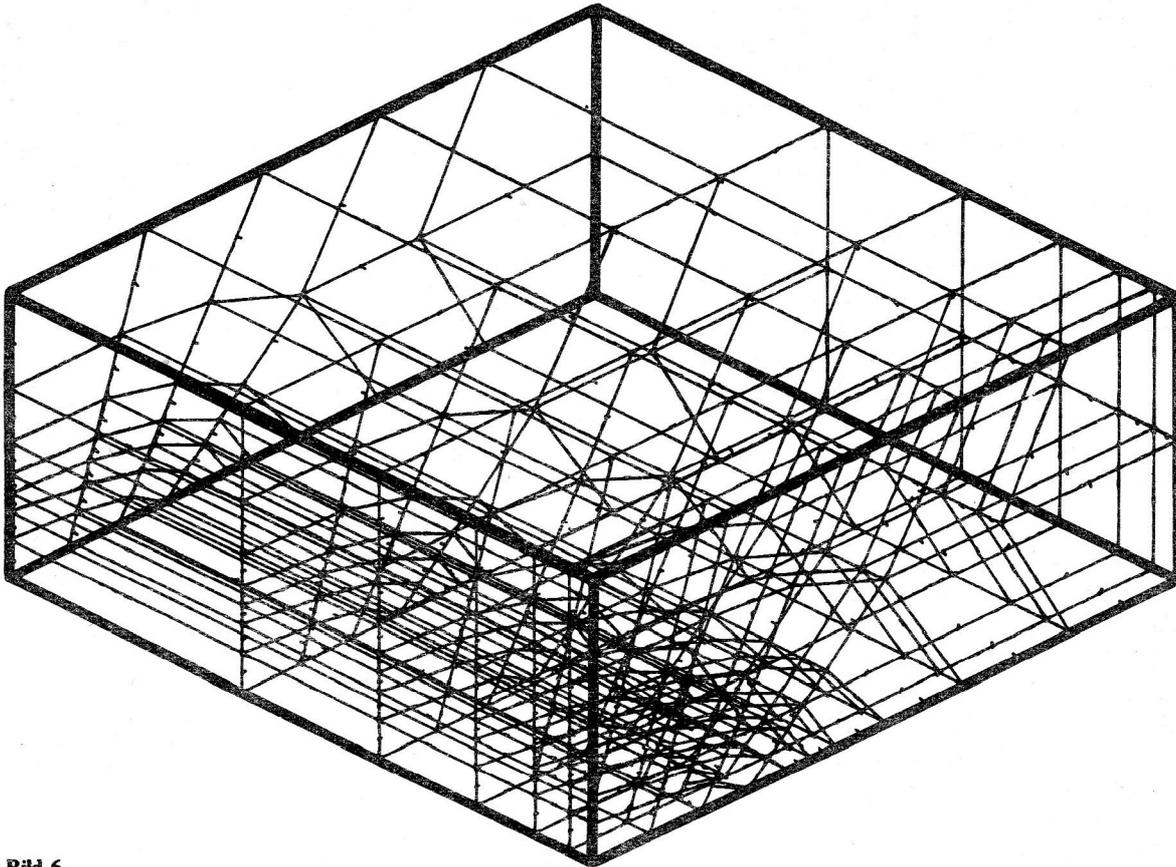


Bild 6
FEM-Netz der Zugprobe mit halbelliptischem Oberflächenriß
(1043 Knoten)

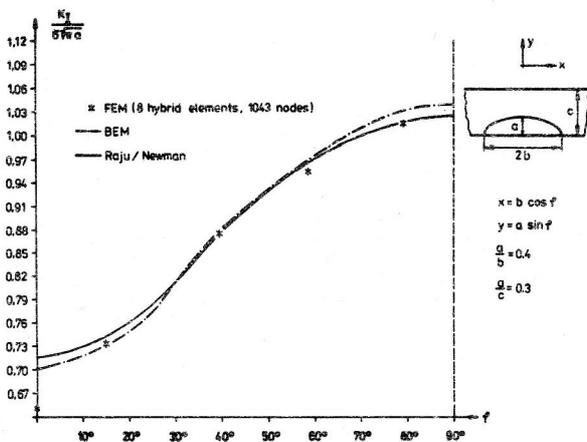


Bild 7
Vergleich der Ergebnisse für die Zugprobe mit halbelliptischem
Oberflächenriß aus FEM- und BEM-Rechnungen

Die Berechnung des K-Faktors für eine Standardprobe der Bruchmechanik, die sogenannte CT-Probe (compact-tension-specimen), wurde als ein weiteres Beispiel ausgewählt. Der Vergleich erfolgte mit dem Ergebnis einer FEM-Rechnung von Yamamoto/Sumi [7]. Die Diskretisierung eines Viertels der Probe ist in Bild 3 dargestellt. Es wurden 3 Rißelemente über die halbe Probendicke sowie insgesamt 48 Elemente verwendet. Die Ergebnisse (der Auswertung über die Randspannungen an der Rißspitze) stimmen bis auf etwa 1 % überein. Lediglich im Bereich des Schnittpunktes

der Rißfront mit der freien Oberfläche ($x=1$) treten größere Abweichungen auf (Bild 4). An dieser Stelle herrscht eine andere als die $r^{-1/2}$ -Spannungssingularität, der K-Faktor an der freien Oberfläche ist gleich Null (vgl. auch [7]). Die CPU-Rechenzeit betrug hier etwa 71 Minuten.

Das letzte Beispiel ist ein halbelliptischer Oberflächenriß in einem Quader unter homogenem Zug. Systematische Untersuchungen dieses Problems wurden von Raju und Newman mit der FEM durchgeführt [8]. Bild 5 zeigt die Diskretisierung eines Viertels der Probe. Es wurden 56 Oberflächenelemente und davon je 4 Rißelemente vor und hinter dem Riß verwendet. Ein FEM-Netzwerk für dasselbe Problem ist in Bild 6 dargestellt. Die Rechnung wurde mit dem Programmsystem FRACTURE des IFE Halle am EC 1040 durchgeführt [9], die Rißfront wurde mit speziellen Hybridelementen modelliert, so daß eine relativ grobe Ver-netzung verwendet werden konnte. Die Ergebnisse sind in Bild 7 grafisch dargestellt.

Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung aller Resultate (maximal etwa 2.5 % Abweichung). Die CPU-Zeit betrug für die BEM-Rechnung etwa 98 Minuten bei einem Hauptspeicherbedarf von 300K-Byte und für die FEM-Rechnung etwa 171 Minuten bei 450K-Byte Speicherbedarf. Das Verhältnis der Zeiten für die Datenaufbereitung betrug etwa 1 : 8 zugunsten der BEM. Besonders vorteilhaft läßt sich die Randelementmethode zur Lösung äußerer Randwertaufgaben, die häufig bei mikromechanischen Aufgabenstellungen auftreten, einsetzen. Einige Beispiele hierfür wurden in [10] vorgestellt.

6. Schlußbemerkungen

Anhand der vorgestellten Beispiele lassen sich klar die Vorzüge der Randelementmethoden gegenüber der Finite-Element-Methode bei der Lösung räumlicher elastostatischer Rißaufgaben erkennen. Im Gegensatz zur FEM können Ergebnisse vergleichbarer Genauigkeit mit einem viel größeren Netzwerk, welches sich nur über die Körperoberfläche erstreckt, erzielt werden. Entscheidende Voraussetzung für die Qualität des BEM-Algorithmus ist die möglichst genaue und effektive Auswertung aller vorkommenden Integrale. Dabei hat sich die Integrationsordnungsabschätzung für jedes Element und jeden Aufpunkt als unumgänglich erwiesen.

Die Verwendung singularer Rißelemente erübrigt eine starke Verfeinerung der Diskretisierung in der Nähe des Risses. Ähnliche Rißelemente, die sogenannten Viertel-punktelemente, sind auch in der FEM bekannt. Die Genauigkeiten der aus den Rißuferverschiebungen ermittelten K-Faktoren stimmen bei BEM und FEM, wie am IFE Halle angestellte Untersuchungen belegen, ungefähr überein, wobei in der Regel ein relativer Fehler von mehreren Prozent zu verzeichnen ist. Die BEM liefert wesentlich bessere Ergebnisse durch die Bestimmung der K-Faktoren aus den Koeffizienten der Randspannungssingularität des Rißspitzenknotens. Das ist plausibel, da das Verhalten der Spannungen an der Rißspitze ausschließlich durch das singuläre Glied der asymptotischen Entwicklung der Spannungen bestimmt wird, während man bei der Verschiebungsauswertung zwangsläufig auf Verschiebungen von Knoten zurückgreifen muß, in denen das asymptotische Verschiebungsverhalten nicht mehr streng gilt.

Die Berücksichtigung von Volumenlasten, transienten Temperaturfeldern und nichtlinearem Materialverhalten erfordert die Einführung einer Volumendiskretisierung in den BEM-Algorithmus, wodurch das Verfahren teilweise seine Attraktivität einbüßt. Dennoch belegen internationale Forschungsergebnisse [6], [11], daß der Einsatz der BEM für derartige Aufgabenklassen – zumindest für bruch- und mikromechanische Anwendungen – aussichtsreich und erfolgversprechend ist. Entsprechende Untersuchungen zur Erweiterung von OREAS auf nichtlineare Werkstoffgesetze befinden sich in Arbeit.

LITERATUR

- [1] Busch, M., Kuna, M.: Ein kleinrechnerorientiertes BEM-Programm zur Lösung räumlicher elastostatischer Aufgaben. *Technische Mechanik* 6(1985), 25 – 29.
- [2] Hartmann, F.: *Methode der Randelemente*, Berlin 1987.
- [3] Maschke, H.: Anwendung der Randintegralmethode auf ebene Rißprobleme in Fällen elastischer Anisotropie. *Technische Mechanik* 6(1985), 17 – 24.
- [4] Lachat, J. G., Watson, J. O.: Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 10(1976), 991 – 1005.
- [5] Luchi, M. L., Poggialini, A.: Computation of three-dimensional stress intensity factors using special boundary elements. In: Brebbia, C. A. et. al. (eds.), *Boundary elements: Proc. 5th Int. Conf., Hiroshima 1983*, 461 – 470.
- [6] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. G.: *Boundary element techniques*, Berlin 1984.
- [7] Yamamoto, Y., Sumi, Y.: Stress intensity factors of three-dimensional cracks. *Int. J. Fract.* 14(1978), 17 – 38.
- [8] Newman, J. C., Raju, I. S.: Analysis of surface cracks in finite plates under tension or bending loads, NASA TR 1578(1979).
- [9] Eisentraut, U. M., Kuna, M.: Ein FEM-Programm für ebene, axialsymmetrische und räumliche Aufgaben der Bruchmechanik, Elastostatik und Wärmeleitung. *Technische Mechanik* 7(1986), 51 – 58.
- [10] Maschke, H., Busch, M.: BEM-Analyse spezieller ebener und räumlicher Defektkonfigurationen. Beiträge der Tagung Festkörpermechanik „Festigkeitsprobleme und Materialverhalten“, Dresden 1988, Bd. C, LXXI/1–8.
- [11] Sippel, H., Kuhn, G.: Berechnung elastoplastischer Probleme mit der Boundary-Element-Methode. *ZAMM* 68(1988) 5, T 411 – T 413.

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Phys. Michael Busch
Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Festkörperphysik und
Elektronenmikroskopie
Weinberg, Postfach 250
Halle
4020