

# Inkrementelle Iterationsmethoden zur Lösung elastischer Kontaktaufgaben mit Reibung mittels spezieller isoparametrischer 2D- und 3D-Kontaktelemente

Janos Egert, Johannes Altenbach

## 0. Einleitung

Maschinenkonstruktionen bestehen im allgemeinen aus mehreren Teilen, die miteinander verbunden sind. Die Bestimmung der Festigkeitswerte im Berührungsbereich der Bauteile ist sehr wichtig, weil sie in vielen Fällen den zuverlässigen Betrieb und die Lebensdauer der Maschinen grundsätzlich beeinflussen können. Die Kontaktkräfte führen zum Beispiel, wenn der Kontaktbereich im Vergleich zu der Größe der Körper klein ist, zu einer Spannungskonzentration, die der Ausgangspunkt eines Risses oder eines Ermüdungsbruches sein kann. Aus dem Spannungs- und Verformungszustand der Kontaktzone kann man ebenfalls auf den Verschleiß der Kontaktfläche schließen.

In der modernen Maschinenkonstruktion spielen deshalb die Methoden, mit denen die Festigkeitswerte im Kontaktbereich mit entsprechender Genauigkeit bestimmt werden können, eine bedeutende Rolle.

Auf dem Gebiet der Kontaktaufgaben hat H. Hertz [1] die ersten Ergebnisse vor ca. 100 Jahren veröffentlicht. Seitdem haben die Forscher für spezielle Aufgaben zahlreiche analytische Lösungen [2] bis [5] ausgearbeitet. Die technische Anwendbarkeit der analytischen Lösungen ist aber wegen der speziellen Geometrie und Belastung ziemlich begrenzt.

Die rasche Entwicklung der Rechentechnik und der numerischen Methoden ermöglichten auch auf dem Gebiet der Kontaktprobleme einen neuen Aufschwung. Von den numerischen Näherungsmethoden der Mechanik ist die Finite-Elemente-Methode (FEM) am bekanntesten und verbreitetsten. Bei der FEM stellt die Berücksichtigung einer beliebigen Geometrie und Belastung der Körper kein Problem dar.

Auf dem Gebiet der FEM-Lösungen der Kontaktaufgaben kann man zwei unterschiedliche Forschungsrichtungen beobachten:

- Zurückführung auf mathematische Programmierung und
- Lösung mit inkrementellen Iterationsmethoden.

Mit Hilfe der quadratischen Programmierung lösten u. a. I. Páczelt [6], [7], F. D. Fischer [9] und N. D. Hung [8] reibungslose, weiterhin P. D. Panagiotopoulos [10] und B. Fredriksson [11] reibungsbehaftete 2D-Kontaktaufgaben.

Bei den inkrementellen Iterationsmethoden werden entweder direkt Knotenpunktvariablen oder spezielle Kontaktelemente für die Iteration benutzt. Die erste Möglichkeit haben zum Beispiel R. Gaertner [12], B. Fre-

driksson [13], [14] und Bo Torstenfelt [15], [16], die zweite unter anderem R. E. Goodman [17], J. G. Crose [18], H. Feldmann [19], C. S. Desai [20] und M. Keuser [21], [22] gewählt.

Diese Arbeit schließt sich der zuletzt erwähnten Richtung an.

Ihre Zielstellung ist die Entwicklung und programmtechnische Realisierung einer FEM-Lösung, die möglichst für alle im Maschinenbau auftretenden Kontaktprobleme anzuwenden ist, bei denen

- die dynamischen Effekte der sich berührenden festen Körper und das hydrodynamische Verhalten des Schmierstoffes auf dem Kontaktgebiet vernachlässigt werden können,
- die sich berührenden festen Körper isotrope und linear-elastische Materialeigenschaften haben,
- die Verschiebungen und Verzerrungen der Körper unter Belastung klein bleiben,
- die sich berührenden Oberflächen isotrope Rauigkeitsverhältnisse haben und
- das Coulombsche Reibgesetz mit dem Reibwert  $\mu = \text{konst}$  die Reibverhältnisse in der Kontaktzone entsprechend beschreibt.

Die so gestellte Aufgabe ist ein nichtlineares Problem, da infolge der Reibung auch nichtkonservative, irreversible Prozesse auftreten. Der nichtkonservative, irreversible Charakter ergibt sich aus der Rauigkeit der Kontaktflächen, die Nichtlinearität folgt ebenfalls aus der Reibung und daraus, daß die Kontaktfläche a priori nicht bekannt ist.

Entsprechend dem nichtlinearen und nichtkonservativem Charakter der zu lösenden Aufgabe wird eine inkrementelle Lösungsmethode angewendet. Die Kontaktbedingungen werden für jedes Belastungsincrement iterativ, mit Hilfe spezieller Kontaktelemente befriedigt.

Diese Lösungsmethode kann in vorhandene allgemeine FEM-Programmsysteme relativ einfach eingebaut werden. Die programmtechnischen Voraussetzungen einer leistungsfähigen Anwendung dieses Lösungsweges sind:

- eine mindestens einstufige Substrukturtechnik und
- eine entsprechende Elementenbibliothek, die auch quadratische, isoparametrische 2D- und 3D-Elemente enthält.

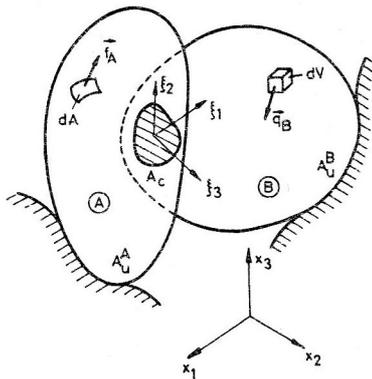
In diesem Artikel werden die theoretischen Grundlagen zur Lösung des obigen Problems ausführlich zusammengefaßt. Der Abschnitt 1. gibt die mechanische Formu-

lierung, die Grundgleichungen des Problems an. Im Punkt 2. werden die Grundlagen für die FEM-Lösung dargestellt. Zur Erfüllung der Kontaktbedingungen werden im Abschnitt 3. zwei unterschiedliche Algorithmen, Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix und Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix, vorgeschlagen. Der Abschnitt 4. legt den Aufbau der Steifigkeitsmatrix von zwei Typen spezieller Kontaktelemente dar, und im Abschnitt 5. werden die kinematischen und dynamischen Kontaktbedingungen mittels Knotenpunktwerte formuliert. Die Modifikationsformel für die Steifigkeiten bzw. die Materialeigenschaften werden im Punkt 6 angegeben.

Schließlich enthält der Abschnitt 7 Hinweise auf die weitere Richtung der Forschungsarbeit.

## 1. Mechanische Formulierung des Problems

Das System im Bild 1 besteht aus den Festkörpern A und B. Für beide Körper wirken die äußeren Flächenlasten  $\vec{f}$  an den Oberflächen  $A_f^A$  und  $A_f^B$ , die Volumenlasten  $\vec{q}$  in  $(V) = (V^A)U(V^B)$ . Die Zeitabhängigkeit der Belastung wird vernachlässigt, aber die Belastungsgeschichte wird als bekannt angenommen.



**Bild 1**  
Berührung zweier beliebiger Körper

An den Oberflächen  $A_u^A$  und  $A_u^B$  werden Verschiebungen vorgeschrieben, und die Körper sind an der Oberfläche  $A_c$  miteinander in Berührung. Die Größe und die Form der Kontaktfläche  $A_c$  hängt von der Geometrie der Körper, von der Belastung und von der Lagerung des Systems ab. Zwischen der Belastung und der Dimension des Kontaktbereiches existiert kein linearer Zusammenhang.

Zur Behandlung der Festigkeitswerte an der Kontaktfläche wird auch ein lokales Koordinatensystem  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  zur Oberfläche so orientiert, daß die Achsen  $\xi_1 \xi_2$  in der Tangentialebene liegen und die Achse  $\xi_3$  zur Kontaktfläche senkrecht steht.

Im Falle kleiner Verschiebungen und kleiner Verzerrungen läßt sich das System aus den Körpern A und B mit den folgenden Gleichungen beschreiben:

– Geometrische Beziehungen in  $(V) = (V^A)U(V^B)$ :

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \nabla + \nabla \vec{u}), \quad (1.1)$$

wobei  $\underline{\underline{A}}$  der Verzerrungstensor,  
 $\vec{u}$  der Verschiebungsvektor und  
 $\nabla$  der Hamiltonsche Operator sind,

– Gleichgewichtsbedingungen in  $(V) = (V^A)U(V^B)$ :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{q} = 0 \quad (1.2)$$

wobei  $\underline{\underline{T}}$  der Spannungstensor,  
• das Zeichen des Skalarproduktes sind,

– Materialgesetz (im isotropen, linear-elastischen Fall das Hookesche Gesetz) in  $(V) = (V^A)U(V^B)$ :

$$\underline{\underline{T}} = 2G \left( \underline{\underline{A}} + \frac{A_I}{1-2\nu} \underline{\underline{I}} \right), \quad (1.3)$$

wobei  $G$  der Schubmodul,  
 $\nu$  die Poissonsche Zahl,  
 $A_I$  die 1. Skalarinvariante des Verzerrungstensors,  
 $\underline{\underline{I}}$  der Einheitstensor sind,

– Geometrische Randbedingungen an  $(A_u) = (A_u^A)U(A_u^B)$ :

$$\vec{u} = \vec{u}_0, \quad (1.4)$$

wobei  $\vec{u}_0$  ein vorgeschriebenes Verschiebungsfeld ist,

– Dynamische Randbedingungen an  $(A_f) = (A_f^A)U(A_f^B)$ :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} = \vec{f}, \quad (1.5)$$

wobei  $\vec{n}$  der Normaleneinheitsvektor ist,

– Kinematische Kontaktbedingungen an  $(A_c)$ :

$$u_3^A - u_3^B = 0, \quad (1.6)$$

– Dynamische Kontaktbedingungen an  $(A_c)$

im Falle der Haftung:

$$\vec{p}^A - \vec{p}^B = 0, \quad p_3^A = p_3^B < 0, \quad (1.7)$$

im Falle der Gleitung:

$$p_3^A = p_3^B < 0 \quad (1.8)$$

Die Reibkräfte (Tangentialkräfte) ergeben sich für den Fall der isotropen Rauigkeit aus dem Coulombschen Reibgesetz:

$$|\vec{p}_t| - \mu |p_3| = 0 \quad (1.9)$$

wobei  $\vec{p}^A, \vec{p}^B$  die Vektoren der Kontaktspannungen

$|\vec{p}_t|$ 

der Betrag der tangentialen Komponente des Kontaktspannungsvektors sind.

Die Vektorkomponenten in den Gleichungen (1.6) – (1.9) beziehen sich auf das lokale Koordinatensystem  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ .

## 2. Grundlagen der FEM-Lösung

Bei nichtlinearen Aufgaben bildet die inkrementelle Form des Prinzipes der virtuellen Verrückungen die Grundlage der FEM-Lösung:

$$\int_{(V)} \Delta \underline{T} \cdot \cdot \delta(\Delta \underline{A}) dV = \int_{(V)} \Delta \vec{q} \cdot \delta(\Delta \vec{u}) dV + \int_{(A_f)} \Delta \vec{f} \cdot \delta(\Delta \vec{u}) dA, \quad (2.1)$$

wobei die Bezeichnung  $\cdot \cdot$  das doppelte Skalarprodukt bedeutet.

Die Anwendung der inkrementellen Größen dient zur Linearisierung des Problems. Das Prinzip (2.1) enthält die Grundgleichungen (1.2), (1.5) und infolge der Definition der virtuellen Verrückungen auch (1.1), (1.4). Es gilt aber für ein beliebiges Materialgesetz.

Zur Lösung von Kontaktaufgaben muß die Gleichung (2.1) mit dem Inkrement der virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte ergänzt werden:

$$\int_{(V)} \Delta \underline{T} \cdot \cdot \delta(\Delta \underline{A}) dV + \int_{(A_c)} \Delta \vec{p} \cdot \delta(\Delta \vec{v}) dA = \int_{(V)} \Delta \vec{q} \cdot \delta(\Delta \vec{u}) dV + \int_{(A_f)} \Delta \vec{f} \cdot \delta(\Delta \vec{u}) dA. \quad (2.2)$$

Hier ist  $\Delta \vec{p}$  das Inkrement des Kontaktspannungsvektors und  $\Delta \vec{v}$  das Inkrement der relativen Verschiebung zwischen den Kontaktpunkten der Körper A und B. Die normalen Kontaktspannungen leisten weder im Falle des Spaltes, weil die normale Komponente des Spannungsvektors verschwindet, noch im Falle des Kontaktes, weil keine relative Verschiebung in normaler Richtung auftritt, Arbeit. Bei der Haftung der Oberflächen A und B leisten auch die tangentialen Kontaktspannungen keine Arbeit, weil keine relative Verschiebungen in tangentialer Richtung auftreten. Im Fall der Gleitung stellt aber dieses Glied die virtuelle Dissipationsarbeit, die infolge Reibkräfte entsteht, dar. Dieses Zusatzglied ermöglicht die Berücksichtigung der Gleichungen (1.6 – 1.9).

Die Befriedigung der Kontaktbedingungen wird mit Hilfe zweier unterschiedlicher iterativer Verfahren, einer Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix oder einer Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix, gewährleistet. Beide Verfahren werden im folgenden Abschnitt ausführlich erläutert.

Bei beiden Iterationen werden die Steifigkeiten bzw. die Materialeigenschaften der Kontaktelemente so

modifiziert, daß die Kontaktbedingungen befriedigt werden. Die Richtung der Änderung der Steifigkeits- bzw. Materialkoeffizienten wird durch die kinematischen und dynamischen Bedingungen der Berührung bestimmt.

Die leistungsfähige Anwendung dieser inkrementellen, iterativen Lösungsmethoden setzt die Benutzung der Substrukturtechnik voraus. Bei der Lösung der Kontaktaufgaben mit Substrukturtechnik ist es zweckmäßig, nur jene Knotenpunkte zu externen Knoten zu wählen, die auf dem potentiellen Kontaktbereich liegen (Bild 2). In diesem Fall muß die Iteration zur Erfüllung der Kontaktbedingungen für jedes Lastinkrement nur mit den Variablen der externen Knoten durchgeführt werden.

Unter Kontaktelementen versteht man fiktive finite Elemente mit besonderen Materialeigenschaften, die die Kontaktbedingungen zwischen den sich berührenden Körpern simulieren müssen. Die Kontaktelemente sind also nicht reale materielle finite Elemente. Ihre Einführung kann als rein numerisches Hilfsmittel angesehen werden.

Die Kontaktelemente müssen auf dem möglichen Kontaktgebiet der zu untersuchenden Konstruktion angenommen werden (Bild 2). Diese speziellen finiten Elemente dürfen die Festigkeitsverhältnisse der Körper nicht beeinflussen, sie sollen lediglich die mathematische Behandlung des Problems fördern.

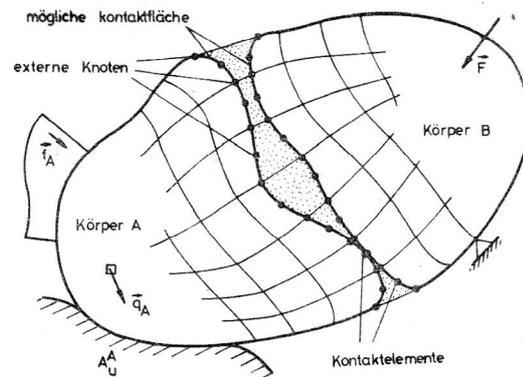


Bild 2  
Annahme der Kontaktelemente und der externen Knoten

Diese speziellen Elemente werden unterschiedlich bezeichnet:

- in der deutschsprachigen Literatur: Verbundelemente [24], Kontaktelemente [24], [25], Reibelemente [19], [26], Übergangselemente [19], Zwischenschichtenelemente [26], Linienelemente [24],
- in der englischsprachigen Literatur: gap elements [27], [28], [29], joint-elements [31], [33], thin-layer elements [20], contact elements [28], surface contact elements [28],
- in der russischsprachigen Literatur: kontaktnije konjetschnije elementi [34].

Von den Kontaktelementen, welche die Bedingungen des einseitigen Kontaktes mit Reibung simulieren sollen, werden folgende Eigenschaften gefordert:

- Zugkräfte in Normalrichtung können nicht übertragen werden,
- Tangentialkräfte werden durch ein Reibgesetz bestimmt.

Die Kontaktelemente können in folgende zwei Gruppen eingeteilt werden:

- Flächen-, (Linien-)Kontaktelemente und
- Schicht-Kontaktelemente.

Im Abschnitt 4. werden die Eigenschaften und der Aufbau der zwei obigen Typen der Kontaktelemente für den 3D- und 2D-Fall erläutert. Diese Kontaktelemente können mit den quadratischen, isoparametrischen, finiten Festkörperelementen kompatibel gekoppelt werden.

### 3. Die angewandten Iterationsmethoden

Die FEM-Grundgleichung des Systems aus den Körpern A und B (Bild 2) kann für das i-te Lastinkrement  $\Delta f^i$  in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_C) \Delta \underline{q}^i = \Delta \underline{f}^i, \quad (3.1)$$

wobei  $\underline{\underline{K}}_{AB}$  die Steifigkeitsmatrix der Körper A und B,  
 $\underline{\underline{K}}_C$  die Steifigkeitsmatrix der Kontaktelemente,  
 $\Delta \underline{q}$  das unbekannte i-te Knotenverschiebungsincrement ist.

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix des untersuchten Systems kann also in einen Festkörperteil  $\underline{\underline{K}}_{AB}$  und einen Kontaktteil  $\underline{\underline{K}}_C$  zerlegt werden, die Steifigkeitsmatrix der Kontaktelemente  $\underline{\underline{K}}_C$  kann relativ einfach zu der Steifigkeitsmatrix der Körper A und B addiert werden. Diese Eigenschaft der FEM-Grundgleichung (3.1) ermöglicht die Entwicklung von effektiven Iterationsmethoden.

#### 3.1. Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix

Im ersten Schritt kann man die Steifigkeiten der Kontaktelemente theoretisch beliebig annehmen:

$$(\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_{Co}) \Delta \underline{q}_o^i = \Delta \underline{f}^i, \quad (3.2)$$

wobei  $\underline{\underline{K}}_{Co}$  die Anfangssteifigkeit der Kontaktelemente ist. Mit einer geschickten Annahme des Anfangswertes kann aber die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte und damit auch die Rechenzeit wesentlich reduziert werden. Dazu muß man entweder eigene numerische Erfahrungen haben oder Angaben aus der Literatur (z. B. aus [25], [26]) entnehmen.

Das lineare Gleichungssystem (3.2) wird nach  $\Delta \underline{q}_o^i$  aufgelöst:

$$\Delta \underline{q}_o^i = (\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_{Co})^{-1} \Delta \underline{f}^i. \quad (3.3)$$

Mit Hilfe der berechneten Größe  $\Delta \underline{q}_o^i$  wird die Erfüllung der Kontaktbedingungen kontrolliert. Entsprechend der Kontrolle werden die Steifigkeitsmatrizen der Kontaktelemente modifiziert:

$$(\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_{Co} + \underline{\underline{K}}_{Cl}) \Delta \underline{q}_1^i = \Delta \underline{f}^i, \quad (3.4)$$

wobei  $\underline{\underline{K}}_{Cl}$  das Modifikationsglied bezeichnet.

Nach der Auflösung des Gleichungssystems (3.4) erhält man eine neue Näherung des Inkrementes der Knotenverschiebungen:

$$\Delta \underline{q}_1^i = (\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_{Co} + \underline{\underline{K}}_{Cl})^{-1} \Delta \underline{f}^i \quad (3.5)$$

Im j-ten Iterationsschritt läßt sich das Knotenverschiebungsincrement in der Form:

$$\Delta \underline{q}_j^i = (\underline{\underline{K}}_{AB} + \underline{\underline{K}}_{Co} + \dots + \underline{\underline{K}}_{Cj})^{-1} \Delta \underline{f}^i \quad (3.6)$$

berechnen.

Aus den Gleichungen (3.3), (3.5) und (3.6) ist zu erkennen, daß diese Methode in jedem Iterationsschritt eine Matrixinversion braucht, weil sich die Steifigkeit der Kontaktelemente Schritt für Schritt ändert.

Der qualitative Charakter der Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix ist für die ersten zwei Belastungsincremente  $\Delta f^1$  und  $\Delta f^2$  im Bild 3 dargestellt. Die Methode hat die Eigenschaft, daß die rechte Seite des Gleichungssystems während der Iteration immer einen konstanten Wert  $\Delta f^i$  hat. Infolgedessen gehen die den Iterationsschritten entsprechenden Geraden im Bild 3 immer vom gleichen Punkt aus. Die Neigung dieser Geraden ist zu der Steifigkeitsmatrix des Systems proportional.

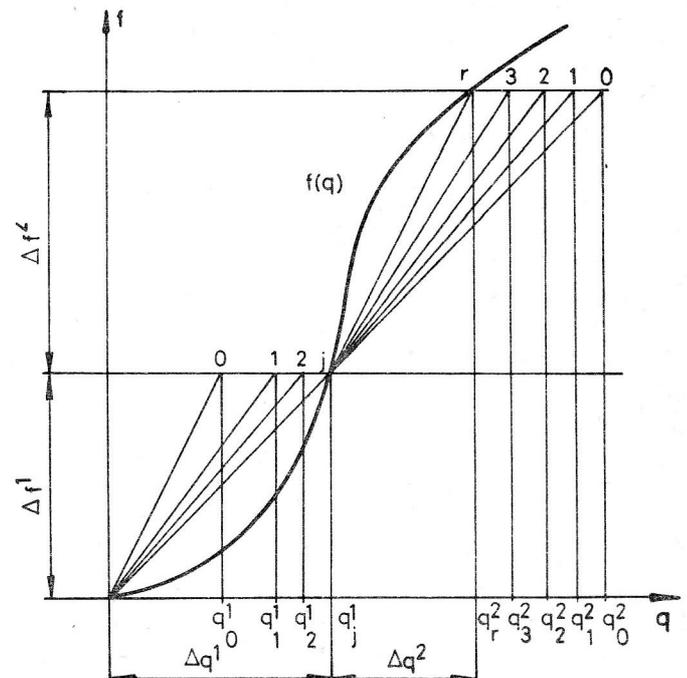


Bild 3  
Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix

In dem ersten Belastungssinkrement  $\Delta f^1$  wurde die Anfangssteifigkeit im Bild 3 zu groß gewählt. Sie muß deshalb während der Iteration solange vermindert werden, bis der exakte Wert  $\Delta q^1 = q_j^1$  erreicht wird.

Der Kontaktzustand zwischen den Körpern A und B kann nach dem ersten Inkrement durch die Kontaktsteifigkeit

$$\underline{K}_C = \sum_{m=0}^j \underline{K}_{Cm} \quad (3.7)$$

gekennzeichnet werden. Dieser Wert erinnert an die frühere Belastung, in diesem Fall an das erste Belastungssinkrement. Bei dieser Iterationsmethode enthält also die Kontaktsteifigkeit die Belastungsgeschichte und bildet die Kopplung der Inkremente. Im Bild 5a wird diese Kopplung mit Hilfe eines vereinfachten Modells veranschaulicht.

Im zweiten Belastungssinkrement wird der Endwert des vorigen Inkrementes nach (3.7) als Anfangssteifigkeit der Iteration gewählt. Im Bild 3 ist dieser Wert zu klein, deshalb muß er solange vergrößert werden, bis der exakte Wert  $\Delta q^2$  erreicht wird.

Bei der Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix können die Verschiebungssinkremente nacheinander gesondert bestimmt werden. Die Gesamt- oder totalen Größen folgen aus den inkrementellen Werten durch Summation, z. B.  $q_3^2 = \Delta q^1 + \Delta q_3^2$ .

### 3.2. Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix

Die Grundidee dieses Verfahrens stammt von Ju. B. Gnuchij [35], [36], wonach die Kontaktiteration mit der rechten Seite des Gleichungssystems vorgenommen werden kann. Die Anwendung von Kontaktelementen bzw. die Erweiterung der Methode auf den inkrementellen Fall erfolgte bisher nicht.

Im ersten Belastungssinkrement sieht die Lösung nach dem ersten Iterationsschritt ebenso aus wie bei der Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix

$$\Delta q_o^1 = (\underline{K}_{AB} + \underline{K}_{Co})^{-1} \Delta f^1. \quad (3.8)$$

Nach der Kontrolle der Kontaktbedingungen und der Modifikation der Kontaktsteifigkeit kann die Gleichung (3.4) so aufgeschrieben werden, daß der modifizierte Teil  $\underline{K}_{Cl} \Delta q_j^1$  gesondert behandelt wird:

$$(\underline{K}_{AB} + \underline{K}_{Co}) \Delta q_j^1 + \underline{K}_{Cl} \Delta q_j^1 = \Delta f_j^1, \quad (3.9a)$$

oder

$$(\underline{K}_{AB} + \underline{K}_{Co}) \Delta q_j^1 = \Delta f_j^1 - \underline{K}_{Cl} \Delta q_j^1. \quad (3.9b)$$

Das Glied  $\underline{K}_{Cl} \Delta q_j^1$  auf der rechten Seite der Gleichung (3.9b) kann als bekannte Kraft berücksichtigt werden, weil eine Lösung für  $\Delta q_j^1$  nach der Gleichung (3.8) schon zur Verfügung steht. So kann die Gleichung (3.9b) in der Form:

$$(\underline{K}_{AB} + \underline{K}_{Co}) \Delta q_j^1 = \Delta f_j^1 - \underline{K}_{Cl} \Delta q_o^1, \quad (3.10)$$

oder mit der Einführung der Bezeichnung

$$\Delta f_{\underline{1}}^1 = \Delta f^1 - \underline{K}_{Cl} \Delta q_o^1, \quad (3.11)$$

in der Form:

$$(\underline{K}_{AB} + \underline{K}_{Co}) \Delta q_j^1 = \Delta f_{\underline{1}}^1 \quad (3.12)$$

geschrieben werden.

Nach der Auflösung der Gleichung (3.10) oder (3.12) erhält man eine neue Näherung des inkrementellen Knotenverschiebungsvektors:

$$\Delta q_{\underline{1}}^1 = (\underline{K}_{AB} + \underline{K}_{Co})^{-1} \Delta f_{\underline{1}}^1, \quad (3.13)$$

Im j-ten Iterationsschritt ergeben sich die Knotenverschiebungen wie folgt:

$$\Delta q_{\underline{j}}^1 = (\underline{K}_{AB} + \underline{K}_{Co})^{-1} \Delta f_{\underline{j}}^1, \quad (3.14a)$$

wobei

$$f_{\underline{j}}^1 = (\Delta f^1 - \underline{K}_{Cl} \Delta q_o^1 - \dots - \underline{K}_{Cj} \Delta q_{\underline{j-1}}^1) \quad (3.14b)$$

ist.

Aus den Gleichungen (3.8), (3.13) und (3.14a) ist zu ersehen, daß diese Methode in jedem Lastinkrement nur eine Matrixinversion braucht. Es wird später gezeigt werden, daß diese Iterationsstrategie nicht nur für jedes Inkrement, sondern auch für die ganze Belastungsgeschichte nur eine Matrixinversion verlangt.

Die Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix wird im Bild 4 qualitativ demonstriert. Die rechte Seite des

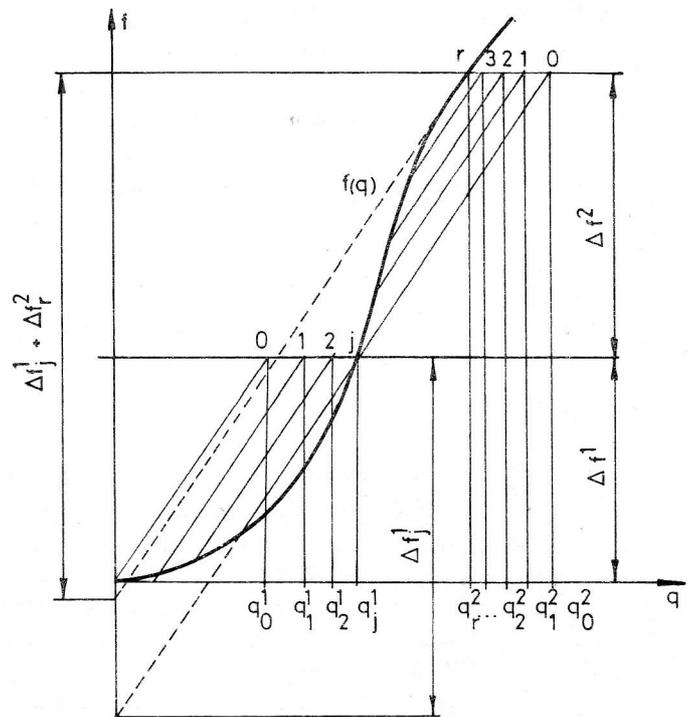


Bild 4  
Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix

linearen Gleichungssystem (3.11), (3.14b) bleibt hier nicht mehr konstant. Infolgedessen gehen die den unterschiedlichen Iterationsschritten entsprechenden Geraden nicht vom gleichen Punkt aus. Da aber die Steifigkeit des Systems bei dieser Methode konstant ist, verlaufen die Geraden in den einzelnen Iterationsschritten miteinander parallel.

In dem ersten Belastungssinkrement  $\Delta f^1$  wurde die Kontaktsteifigkeit  $\underline{K}_{C_0}$  im Bild 4 zu groß gewählt. Deshalb muß hier die rechte Seite des Gleichungssystem, das heißt das Belastungssinkrement  $\Delta f^1$ , solange modifiziert (vergrößert) werden, bis der exakte Verschiebungswert  $\Delta q^1 = q_j^1$  erreicht wird.

Der Kontaktzustand zwischen den Körpern A und B kann in diesem Fall durch die Kontaktsteifigkeit  $\underline{K}_{C_0}$  und die modifizierte Belastung  $\Delta f_j^1$  nach (3.14) gekennzeichnet werden. Die Kontaktsteifigkeit  $\underline{K}_{C_0}$  und die modifizierte Belastung  $\Delta f_j^1$  enthalten hier also die Belastungsgeschichte und bilden die Kopplung der Inkremente. Im Bild 5b wird diese Kopplung mit Hilfe eines vereinfachten Modells veranschaulicht.

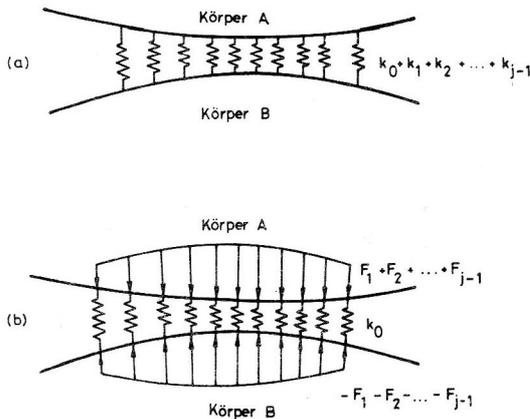


Bild 5  
Vereinfachte Kopplungsmodelle

Im zweiten Belastungssinkrement muß deshalb nicht nur die Belastung  $\Delta f^2$ , sondern die Summe  $\Delta f^2 + \Delta f_j^1$  als Belastung berücksichtigt werden. Vom Bild 4 ist zu entnehmen, daß diese Methode im zweiten Inkrement keine neue Matrixinversion erfordert. Im Bild 4 ist die Anfangsbelastung  $\Delta f^2 + \Delta f_j^1$  des zweiten Inkrementes zu groß, deshalb muß sie solange verkleinert werden, bis die Verschiebung  $q_r^2$  erreicht wird. Zu dem Zustand  $q_r^2$  gehört die Belastung  $\Delta f_j^1 + \Delta f_r^2$ .

Bei der Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix können immer Gesamtverschiebungen oder totale Verschiebungen berechnet werden. Die inkrementellen Werte können hier als Unterschiede der nacheinander kommenden Gesamtverschiebungen gebildet werden, z. B.

$$\Delta q_1^2 = q_1^2 - q_j^1$$

#### 4. Quadratische, isoparametrische 3D- und 2D-Kontaktelemente

Die Flächen-(Linien-)Kontaktelemente sind speziell aufgebaute finite Elemente. Sie bestehen aus zwei Flächen (Linien), deren Abstand die Größe  $d(\xi_1, \xi_2)$  ist (Bild 6, 7a). Die realen Körper sind jeweils von Flächen begrenzt. Bei 2D-Aufgaben können aber diese Flächen mit Hilfe von Linienelementen modelliert werden.

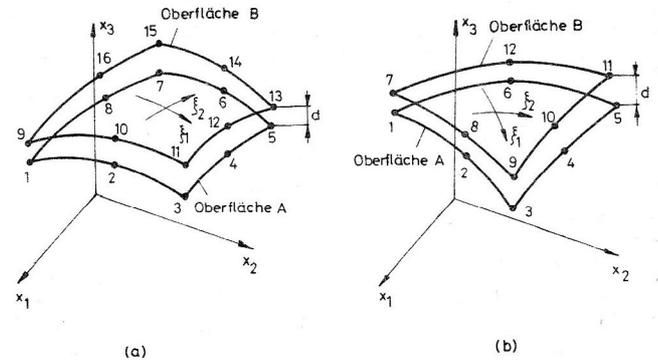


Bild 6  
Quadratische, isoparametrische Flächen-Kontaktelemente für den 3D-Fall

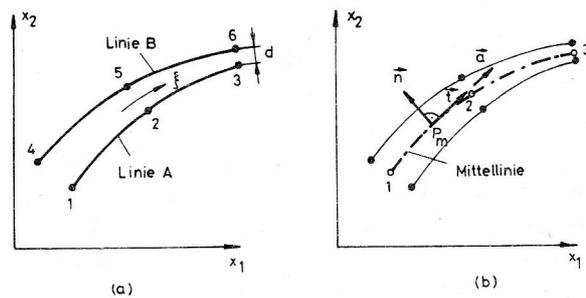


Bild 7  
Quadratische, isoparametrische Linien-Kontaktelemente für den 2D-Fall

Die Größe  $d$  bedeutet das Anfangsspiel zwischen den sich berührenden Körpern und heißt im folgenden die Dicke des Elementes. Wenn die Dicke  $d$  während der Deformation verschwindet, wird das Element als geschlossen (Fall der Berührung), und wenn sie unter der Belastung größer als Null ist, als geöffnet (keine Berührung) bezeichnet.

Im geöffneten Fall gibt es keine Verbindung zwischen den Oberflächen A und B. Im geschlossenen Fall wird aber vorausgesetzt, daß die inneren Kräfte des Elementes zu den relativen Verschiebungen zwischen den Oberflächen der Körper A und B proportional sind. Die Proportionalitätskoeffizienten werden im folgenden Normalsteifigkeit  $k_n$  und Tangentialsteifigkeiten  $k_t, k_s$  genannt.

Die Steifigkeiten  $k_n, k_t$  und  $k_s$  hängen nicht von der Dicke  $d$  des Elementes ab und bestimmen eindeutig das mechanische Verhalten des Flächen-Kontaktelementes.

Infolgedessen wird bei Flächen-Kontaktelementen sowohl ein Anfangsspiel als auch ein spielfreier Anfangszustand zwischen den sich berührenden Körpern erlaubt:  $d \geq 0$ . Hier kann die Größe  $d$  beliebig positiv oder Null sein, ein negativer Wert ist aber nicht gestattet.

Die Schicht-Kontaktelemente sind traditionell aufgebaute finite Elemente, die über nichtreale Materialeigenschaften verfügen (Bild 10, 11a). Unter nichtrealen Materialeigenschaften versteht man, daß diese Elemente aus einem fiktiven Stoff bestehen, bei dem der Elastizitätsmodul  $E$  und die Schubmoduli  $G_t$  und  $G_s$  voneinander unabhängig, in bestimmten Fällen sogar gleich Null, sind. Der Elastizitätsmodul  $E$  charakterisiert das Verhalten des Elementes senkrecht zur potentiellen Kontaktfläche, und die Schubmoduli  $G_t$ ,  $G_s$  kennzeichnen die Eigenschaften parallel zu den Oberflächen  $A$  und  $B$ . Die Moduli sind bei geöffneten Kontaktelementen gleich Null.

Das mechanische Verhalten eines Schicht-Kontaktelementes wird aber nicht nur durch die Moduli  $E$ ,  $G_t$  und  $G_s$ , sondern auch durch die Dicke  $d$  des Elementes und die Poissonsche Zahl  $\nu$  des fiktiven Stoffes definiert.

Hier ist der Wert  $\nu$  richtungsunabhängig, und es gibt keinen Zusammenhang zwischen der Poissonschen Zahl  $\nu$  und den Schubmoduli  $G_t$ ,  $G_s$ . Die Moduli  $E$ ,  $G_t$  und  $G_s$  bestimmen so die Steifigkeit des Elementes nicht eindeutig. Die normale Steifigkeit wird durch die Dicke  $d$  und die Poissonsche Zahl  $\nu$ , die tangentiale dagegen nur durch die Dicke  $d$  beeinflusst. Die Dicke folgt aus den gegebenen Aufgaben, die Poissonsche Zahl muß aber willkürlich angenommen (und danach festgehalten) werden.

Die Dicke  $d$  des Schicht-Kontaktelementes muß jeweils größer als Null sein ( $d > 0$ ), sonst tritt bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix numerische Instabilität auf. Hier besteht auch die Gefahr, daß die Eigenschaften des Elementes – bei sehr kleiner Dicke  $d$  – von der Wahl der Materialkennwerte unabhängig werden [30]. Diese Erscheinungen werden direkt durch die Rechengenauigkeit der verwendeten Rechenanlage bestimmt. Man sollte deshalb bei einer Berechnung mit diesen Elementen die höchste Genauigkeit benutzen, die der Rechner ermöglicht.

Im Falle isotroper Rauigkeitsverhältnisse kann die Reibung zwischen den Oberflächen  $A$  und  $B$  durch einen isotropen Tensor gekennzeichnet werden, das heißt, die Oberflächenrauigkeit kann mit einem Reibwert  $\mu$  angegeben werden. Bei isotropem Coulombschen Reibgesetz sind der Vektor der relativen Verschiebungen zwischen den Oberflächen und die Reibkraft zwar entgegengesetzt aber parallel gerichtet. Diese Bedingung kann bei den Kontaktelementen mit der Annahme  $k_t = k_s$  bzw.  $G_t = G_s$  erreicht werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden 3D- und 2D-Kontaktelemente mit quadratischer Ansatzfunktion verwendet. Mit ihnen erhält man genauere Ergebnisse als mit linearen Elementen, und sie passen gut in die Elementbibliotheken sowohl des Programmsystems VEM-3D der TU Miskolc als auch des Programmsystems COSAR der TU Magdeburg.

Im folgenden werden beide Kontaktelement-Typen für den 3D-Fall ausführlich abgeleitet. Die Beziehungen für den 2D-Fall werden immer nur kurz mitgeteilt.

#### 4.1. Flächen-(Linien-)Kontaktelemente

Zur Entwicklung der Flächen-Kontaktelemente wurden die Arbeiten von R. E. Goodman [17], J. G. Crose [18], H. Feldmann [19], M. Keuser [21], [22] und C. S. Desai [20], [24] als Grundlage gewählt. Die 3D-Kontaktelemente wurden bisher nur für die Probleme der Boden- bzw. Baumechanik [20], [21], [22], [24] verwendet. Für die mechanischen Probleme des Maschinenbaus wurden bisher nur 2D-Kontaktelemente [18], [19] in der Fachliteratur benutzt.

Die Geometrie und Verschiebungen der Elemente in den Bildern 6 und 7a werden mit denselben Funktionen beschrieben. Im Falle der Verschiebungen folgt:

für die Oberfläche A:

$$u_{1A} = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) u_{1i},$$

$$u_{2A} = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) u_{2i},$$

$$u_{3A} = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) u_{3i},$$

für die Oberfläche B:

$$u_{1B} = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) u_{1(i+M)}, \quad (4.1a)$$

$$u_{2B} = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) u_{2(i+M)}, \quad (4.1b)$$

$$u_{3B} = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) u_{3(i+M)}. \quad (4.1c)$$

Hierbei sind  $u_{1i}$ ,  $u_{2i}$ ,  $u_{3i}$  die Knotenverschiebungen im globalen, orthogonalen Koordinatensystem  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , und  $M$  ist die Anzahl der Knotenpunkte auf der einen Oberfläche des Elementes (für das Viereck  $M = 8$ , für das Dreieck  $M = 6$  und für das Linienelement  $M = 3$ ). Als Formfunktionen  $G_i$  werden die Formfunktionen der bekannten ebenen quadratischen isoparametrischen Viereck- und Dreieck-Elemente bzw. der 1D-Linienelemente angewendet [37]. Im 2D-Fall hängen die Formfunktionen nur von der Variable  $\xi$  ab, und die Vektoren der Knotenverschiebungen und der Verschiebungsfelder haben nur zwei Komponenten.

Die Gleichungen (4.1a – c) können auch in Matrizenform geschrieben werden:

$$\underline{u}_A(\xi_1, \xi_2) = \underline{G}(\xi_1, \xi_2) \underline{q}_A, \quad \underline{u}_B(\xi_1, \xi_2) = \underline{G}(\xi_1, \xi_2) \underline{q}_B, \quad (4.2)$$

wobei

$$[\underline{u}_A(\xi_1, \xi_2)]^T = [u_{1A}, u_{2A}, u_{3A}], \quad (4.3)$$

$$[\underline{u}_B(\xi_1, \xi_2)]^T = [u_{1B}, u_{2B}, u_{3B}],$$

$$\underline{q}_A^T = [u_{11}, u_{21}, u_{31}, \dots, u_{3M}], \quad (4.4)$$

$$\underline{q}_B^T = [u_{1(1+M)}, u_{2(1+M)}, \dots, u_{3(2M)}],$$

$$\underline{G}(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots & G_M & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & \dots & 0 & G_M & 0 \\ 0 & 0 & G_1 & \dots & 0 & 0 & G_M \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Die relativen Verschiebungen werden aus den Verschiebungen beider Flächen gebildet:

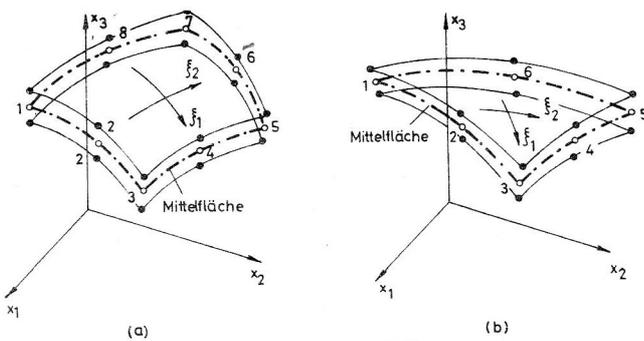
$$\Delta \underline{u}(\xi_1, \xi_2) = \underline{u}_B(\xi_1, \xi_2) - \underline{u}_A(\xi_1, \xi_2). \quad (4.6)$$

Die Gleichung (4.6) ist mit Hilfe von (4.2) folgendermaßen zu schreiben:

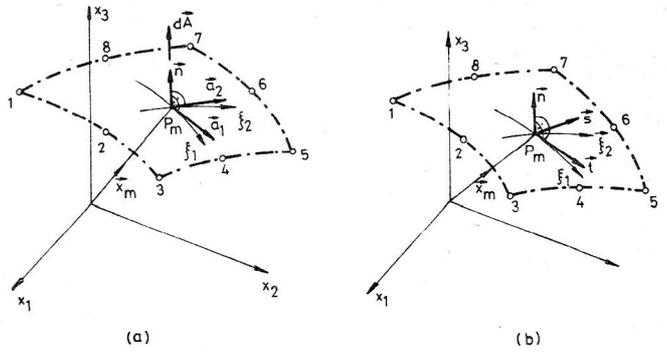
$$\begin{aligned} \Delta \underline{u}(\xi_1, \xi_2) &= [-\underline{G}(\xi_1, \xi_2) \mid \underline{G}(\xi_1, \xi_2)] \begin{bmatrix} \underline{q}_A \\ \underline{q}_B \end{bmatrix} = \\ &= \underline{Q}(\xi_1, \xi_2) \underline{q}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hier enthält der Vektor  $\underline{q}$  alle Knotenverschiebungen des Kontaktelementes.

Die Kontaktbedingungen können nur in einem an die Berührungsfläche gebundenen lokalen krummlinigen Koordinatensystem aufgeschrieben werden. In dieser Arbeit werden kleine Verschiebungen und Verzerrungen vorausgesetzt, deshalb kann das lokale Koordinatensystem zu der undeformierten Form der potentiellen Kontaktfläche, das heißt zu der fiktiven Mittelfläche des Kontaktelementes (Bild 7b, 8, 9), definiert werden.



**Bild 8**  
Mittelfläche der 3D-Kontaktelemente



**Bild 9**  
Krummliniges, lokales Koordinatensystem bei dem Flächen-Kontaktelement

Für die Ortskoordinaten der fiktiven Mittelfläche ergibt sich die Beziehung:

$$\underline{x}_m(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} [\underline{x}_A(\xi_1, \xi_2) + \underline{x}_B(\xi_1, \xi_2)], \quad (4.8)$$

wobei  $\underline{x}_A$  und  $\underline{x}_B$  die Ortskoordinaten der Oberfläche A und B bedeuten.

Berücksichtigt man die Analogie zwischen Geometrie und Verschiebungen des Elementes, so können die Komponenten des Ortsvektors der Mittelfläche  $\underline{x}_m(\xi_1, \xi_2)$  in gleicher Form wie (4.1) beschrieben werden:

$$x_{1m}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) x_{1mi}, \quad (4.9a)$$

$$x_{2m}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) x_{2mi}, \quad (4.9b)$$

$$x_{3m}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^M G_i(\xi_1, \xi_2) x_{3mi}, \quad (4.9c)$$

wobei  $x_{1mi}$ ,  $x_{2mi}$ ,  $x_{3mi}$  die Knotenpunktskoordinaten der Mittelfläche sind.

Ein rechtwinkliges lokales Koordinatensystem zur Mittelfläche kann in zwei Schritten abgeleitet werden (Bild 9). Im ersten Schritt können die Tangentenvektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  zu den Koordinatenlinien  $\xi_1$  und  $\xi_2$  dargestellt werden:

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{x}_m}{\partial \xi_1} = a_{11} \vec{e}_1 + a_{12} \vec{e}_2 + a_{13} \vec{e}_3, \quad (4.10a)$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{x}_m}{\partial \xi_2} = a_{21} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{23} \vec{e}_3. \quad (4.10b)$$

Mit Hilfe der Komponenten der Tangentenvektoren  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  kann auch das skalare Flächenelement  $dA$  gebildet werden, das man bei der Integration braucht:

$$\begin{aligned} dA &= \sqrt{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 + (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2 + \\ &\quad + (a_{11}a_{22} - a_{13}a_{21})^2} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (4.11a)$$

d. h.

$$dA = c(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.11b)$$

Bei Kenntnis des skalaren Flächenelementes und der Tangentenvektoren bekommt man den normalen Einheitsvektor in der Form:

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{dA} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3. \quad (4.12)$$

Die Vektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  liegen zwar in der Tangentenebene der Mittelfläche, stehen im allgemeinen aber nicht senkrecht zueinander. In der Tangentenebene nehmen wir zueinander senkrechte Einheitsvektoren nach Bild 9b an:

$$\vec{t} = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 + t_3 \vec{e}_3, \quad (4.13)$$

$$\vec{s} = (\vec{n} \times \vec{t}) = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \vec{e}_2 + s_3 \vec{e}_3.$$

Hier bedeutet  $|\vec{a}_1|$  den Betrag des Tangentenvektors  $\vec{a}_1$ . So steht uns mit den Vektoren  $\vec{t}, \vec{s}, \vec{n}$  ein orthogonales lokales Koordinatensystem zur Verfügung.

Im 2D-Fall (Bild 7b) erhält man die folgenden Ausdrücke für den Tangentenvektor  $\vec{a}$  der Mittellinie:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{x}_m}{\partial \xi} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \quad (4.14)$$

für das skalare Linienelement:

$$dL = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} d\xi = J d\xi \quad (4.15)$$

und für die Einheitsvektoren des lokalen Koordinatensystems:

$$\vec{t} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2, \quad (4.16)$$

$$\vec{n} = -t_2 \vec{e}_1 + t_1 \vec{e}_2.$$

Der Vektor der relativen Verschiebungen nach (4.7) kann folgendermaßen in das orthogonale lokale Koordinatensystem transformiert werden:

$$\Delta \underline{u}_{t,s,n}(\xi_1, \xi_2) = \underline{T}_u(\xi_1, \xi_2) \Delta \underline{u}_{1,2,3}(\xi_1, \xi_2) \quad (4.18)$$

wobei  $\Delta \underline{u}_{t,s,n}$  der Vektor der relativen Verschiebungen im lokalen Koordinatensystem  $t, s, n$  und

$\Delta \underline{u}_{1,2,3}$  der Vektor der relativen Verschiebungen im globalen Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$  ist.

Die Transformationsmatrix  $\underline{T}_u$  läßt sich mit den Koordinaten der Einheitsvektoren des lokalen Koordinatensystems ausdrücken:

für den 3D-Fall:

$$\underline{T}_u = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad (4.19a)$$

für den 2D-Fall:

$$\underline{T}_u = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ -t_2 & t_1 \end{bmatrix} \quad (4.19b)$$

Der Vektor der inneren Kräfte (Kontaktkräfte) des Elementes enthält im 3D-Fall drei und im 2D-Fall zwei Komponenten:

$$\underline{\sigma}_{t,s,n} = \begin{bmatrix} \tau_{tn} \\ \tau_{sn} \\ \sigma_n \end{bmatrix}; \quad \underline{\sigma}_{t,n} = \begin{bmatrix} \tau_{tn} \\ \sigma_n \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Wir setzen voraus, daß die inneren Kräfte in tangentialer und in normaler Richtung voneinander unabhängig und proportional zu den entsprechenden relativen Verschiebungen sind. Infolgedessen kann man die Verbindung zwischen den inneren Kräften und den relativen Verschiebungen mit einer Diagonalmatrix  $\underline{k}$  angeben:

$$\underline{\sigma}_{t,s,n} = \underline{k}_{t,s,n} \Delta \underline{u}_{t,s,n}. \quad (4.21)$$

Wir wollen mit Hilfe des Kontaktelementes das Coulombsche Reibgesetz für isotrope Oberflächenrauigkeit simulieren, nach dem die Reibkraft und der Vektor der relativen Verschiebungen parallel sein müssen. Diese Bedingung kann mit einer speziellen Annahme der Proportionalitätskoeffizienten erreicht werden:

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_t & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

wobei  $k_t$  die tangentielle Steifigkeit und  $k_n$  die normale Steifigkeit des Elementes ist.

Für den 2D-Fall läßt sich die Matrix in folgender Form schreiben:

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Die Steifigkeitskoeffizienten  $k_t$  und  $k_n$  müssen so gewählt werden, daß das Element die Kontaktbedingungen erfüllt. Die Befriedigung der Kontaktbedingungen wird auf iterativem Wege erreicht.

Die Steifigkeitsmatrix des Flächen-Kontaktelementes kann aus dem Ausdruck

$$\int_{(A^e)} \Delta \underline{u}^T \underline{\sigma} dA \quad (4.24)$$

hergeleitet werden, wobei  $A^e$  die Mittelfläche des Elementes ist. Der Ausdruck (4.24) enthält die Formänderungsarbeit infolge Normalkräfte und die Dissipationsarbeit infolge Reibkräfte des Kontaktelementes. Die Formänderungsarbeit der Normalkräfte muß theoretisch Null, praktisch – wegen des Näherungscharakters der Methode – im Vergleich zu den anderen Energieanteilen des untersuchten Systems, vernachlässigbar klein sein. Die Normalsteifigkeit  $k_n$  muß dazu im Falle des Spieles (keine Berührung) gleich Null, im Falle der Berührung theoretisch unendlich groß sein. So kann auch die Durchdringung beider Körper vollständig verhindert werden. Die Normalsteifigkeit ist aber praktisch nicht unendlich groß, sondern sie hat nur einen sehr großen Wert, somit können auf dem Kontaktgebiet auch vernachlässigbar kleine Durchdringungen auftreten.

Nach dem Einsetzen der Beziehungen (4.7), (4.18) und (4.21) in den Ausdruck (4.24) erhält man das folgende Ergebnis:

$$\int_{(A^e)} \Delta \underline{u}^T \underline{\sigma} dA = \underline{q}^T \underline{K}_c \underline{q}, \quad (4.25)$$

$(A^e)_{t,s,n} \quad t,s,n$

wobei die Steifigkeitsmatrix des Flächen-Kontaktelementes

$$\underline{K}_c = \int_{(A^e)} \underline{Q}^T \underline{T}^T \underline{k} \underline{T} \underline{Q} dA = \int_{(A^e)} \underline{k}_c dA \quad (4.26)$$

lautet. Das skalare Flächenelement  $dA$  kann im 3D-Fall nach der Gleichung (4.11), im 2D-Fall in der Form

$$dA = c(\xi) d\xi \quad (4.27)$$

angegeben werden. Die Funktion  $c(\xi)$  läßt sich folgendermaßen berechnen:

– für den ebenen Spannungszustand:  $c = bJ$ , (4.28a)

– für den ebenen Formänderungszustand:  $c = J$ , (4.28b)

– für rotationssymmetrische Aufgaben:  $c = 2\pi x_{lm} J$  (4.28c)

wobei  $b$  die Scheibendicke und  $J$  mit der Gleichung (4.15) gegeben ist.

Die tatsächliche Berechnung der Steifigkeitsmatrix des Flächen-Kontaktelementes erfolgt mittels numerischer Integration nach der Gaußquadratur

für den 3D-Fall:

$$\underline{K}_c = \int_{\xi_2=-1}^1 \int_{\xi_1=-1}^1 \underline{k}_c(\xi_1, \xi_2) c(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \sum_{j=1}^R \sum_{k=1}^R H_j H_k \underline{k}_c(\xi_{1j}, \xi_{2k}) c(\xi_{1j}, \xi_{2k}), \quad (4.29)$$

und für den 2D-Fall:

$$\underline{K}_c = \int_{\xi=-1}^1 \underline{k}_c(\xi) c(\xi) d\xi \approx \sum_{j=1}^R H_j \underline{k}_c(\xi_j) c(\xi_j). \quad (4.30)$$

Hier sind  $H_j, H_k$  die Gewichtskoeffizienten,  $\xi_{1j}, \xi_{2k}$  die Stützstellenkoordinaten und  $R = 3$  die Anzahl der Stützstellenpunkte.

#### 4.2. Schicht-Kontaktelemente

Die hier abgeleiteten Schicht-Kontaktelemente in den Bildern 10 und 11a unterscheiden sich von den traditionellen isoparametrischen Elementen durch folgende Eigenschaften:

- der Elastizitätsmodul  $E$  und der Schubmodul  $G$  werden voneinander unabhängig behandelt und können auch gleich Null sein;
- in Normalrichtung zu der potentiellen Kontaktfläche (im 3D-Fall in Richtung  $\xi_3$ , im 2D-Fall in Richtung  $\xi_2$ ) wird immer nur eine lineare Approximation, in den anderen Richtungen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  bzw. im 2D-Fall in Richtung  $\xi_1$  dagegen eine quadratische Approximation angewendet;
- zum Aufbau der Steifigkeitsmatrix müssen die Verzerrungen und Spannungen in einem lokalen, krummlinigen Koordinatensystem aufgeschrieben werden.

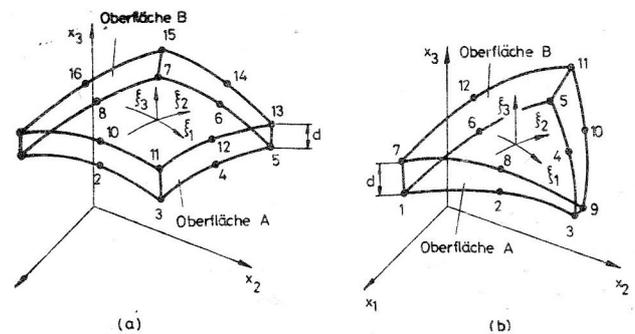


Bild 10 Quadratische, isoparametrische Schicht-Kontaktelemente für den 3D-Fall

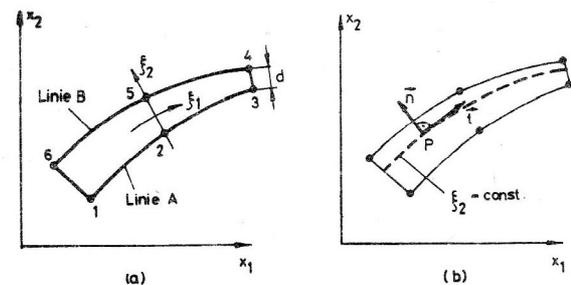


Bild 11 Quadratische, isoparametrische Schicht-Kontaktelemente für den 2D-Fall

Zur Erarbeitung dieser Elemente wurden wir durch die Arbeiten J. T. Stadter [29], J. Padovon [27] und G. N. Pande [30] angeregt. Diese Arbeiten beschäftigen sich zwar nur mit 2D-Elementen, eine Erweiterung ihrer Ergebnisse für den räumlichen Fall ist relativ einfach möglich.

Die Geometrie und die Verschiebungen werden ebenfalls für die Schicht-Kontaktelemente mit den gleichen Ansätzen beschrieben:

die Geometrie:

$$x_1 = \sum_{i=1}^N G_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{1i},$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^N G_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{2i},$$

$$x_3 = \sum_{i=1}^N G_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{3i},$$

die Verschiebungen:

$$u_1 = \sum_{i=1}^N G_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_{1i}, \quad (4.31a)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^N G_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_{2i}, \quad (4.31b)$$

$$u_3 = \sum_{i=1}^N G_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_{3i}, \quad (4.31c)$$

wobei  $N = 2M$  die Anzahl der Knoten des Elementes (für das Viereck  $N = 16$ , für das Dreieck  $N = 12$ , für das 2D-Element  $N = 6$ ),

$x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}$  die Ortskoordinaten der Knotenpunkte und

$u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}$  die Knotenverschiebungen in den Richtungen  $x_1, x_2, x_3$  sind.

Im 2D-Fall haben alle Größen nur zwei Komponenten, und die Formfunktionen hängen nur von den Veränderungen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  ab.

Im 3D-Fall lassen sich die Formfunktionen  $G_i^*$  aus den Formfunktionen  $G_i$  der ebenen, quadratischen, isoparametrischen Viereck- und Dreieck-Elemente [37] berechnen:

$$G_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_i(\xi_1, \xi_2) \frac{1 - \xi_3}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (4.32a)$$

$$G_{(i+M)}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_i(\xi_1, \xi_2) \frac{1 + \xi_3}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (4.32b)$$

Im 2D-Fall ergeben sich die Formfunktionen  $G_i^*$  aus den Formfunktionen  $G_i$  des eindimensionalen, quadratischen, isoparametrischen Elementes [37]:

$$G_i^*(\xi_1, \xi_2) = G_i(\xi_1) \frac{1 - \xi_2}{2}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.33a)$$

$$G_{(i+3)}^*(\xi_1, \xi_2) = G_i(\xi_1) \frac{1 + \xi_2}{2}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.33b)$$

Der Vektor der Verzerrungen enthält bei den räumlichen Aufgaben sechs Komponenten:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^T = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}], \quad (4.34a)$$

bei ebenen Aufgaben (ebener Spannungszustand und ebener Formänderungszustand) drei Komponenten:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^T = [\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}], \quad (4.34b)$$

und bei rotationssymmetrischen Aufgaben vier Komponenten:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^T = [\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}, \epsilon_3]. \quad (4.34c)$$

Die Verzerrungen können durch die Knotenverschiebungen in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{\underline{B}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \underline{\underline{q}}, \quad (4.35)$$

wobei  $\underline{\underline{q}}$  der Vektor der Knotenverschiebungen ist.

Die Matrix  $\underline{\underline{B}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ergibt sich für den 3D-Fall folgendermaßen:

$$\underline{\underline{B}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & | & \dots & b_{1i} & 0 & 0 & | & \dots & b_{1N} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & | & \dots & 0 & b_{2i} & 0 & | & \dots & 0 & b_{2N} & 0 \\ 0 & 0 & b_{31} & | & \dots & 0 & 0 & b_{3i} & | & \dots & 0 & 0 & b_{3N} \\ b_{21} & b_{11} & 0 & | & \dots & b_{2i} & b_{1i} & 0 & | & \dots & b_{2N} & b_{1N} & 0 \\ 0 & b_{31} & b_{21} & | & \dots & 0 & b_{3i} & b_{2i} & | & \dots & 0 & b_{3N} & b_{2N} \\ b_{31} & 0 & b_{11} & | & \dots & b_{3i} & 0 & b_{1i} & | & \dots & b_{3N} & 0 & b_{1N} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Die Matrizelemente können aus den Ableitungen der Formfunktionen  $G_i^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  nach der Gleichung (4.32) gebildet werden:

$$b_{1i} = \frac{\partial G_1^*}{\partial x_1}, \quad b_{2i} = \frac{\partial G_i^*}{\partial x_2}, \quad b_{3i} = \frac{\partial G_i^*}{\partial x_3}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.37)$$

Die Matrix  $\underline{B}(\xi_1, \xi_2)$  ergibt sich für den ebenen Fall zu:

$$\underline{B}(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & b_{1i} & 0 & \dots & b_{1N} & 0 \\ 0 & b_{21} & \dots & 0 & b_{2i} & \dots & 0 & b_{2N} \\ b_{21} & b_{11} & \dots & b_{2i} & b_{1i} & \dots & b_{2N} & b_{1N} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

und für den rotationssymmetrischen Fall zu:

$$\underline{B}(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & b_{1i} & 0 & \dots & b_{1N} & 0 \\ 0 & b_{21} & \dots & 0 & b_{2i} & \dots & 0 & b_{2N} \\ b_{21} & b_{11} & \dots & b_{2i} & b_{1i} & \dots & b_{2N} & b_{1N} \\ b_{0i} & 0 & \dots & b_{0i} & 0 & \dots & b_{0N} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

wobei die Matrizelemente aus den Formfunktionen  $G_i^*(\xi_1, \xi_2)$  nach (4.33) abgeleitet werden können:

$$b_{1i} = \frac{\partial G_i^*}{\partial x_1}, \quad b_{2i} = \frac{\partial G_i^*}{\partial x_2}, \quad b_{0i} = \frac{G_i^*}{x_1}, \quad (4.40)$$

( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Wir nehmen in den Schicht-Kontaktelementen nach Bild 12 Koordinatenflächen  $\xi_3 = \text{const.}$  an und definieren das lokale krummlinige Koordinatensystem  $\vec{t}, \vec{s}, \vec{n}$  zu diesen Koordinatenflächen. Bei den Berechnungen braucht man die  $\xi_3 = \text{const.}$  Koordinatenflächen, die die Gaußschen Integrationspunkte enthalten.

Hier werden die Einheitsvektoren  $\vec{t}, \vec{s}, \vec{n}$  des lokalen Koordinatensystems theoretisch auch von der Veränderlichen  $\xi_3$  abhängen. Im allgemeinen ändert sich aber die Dicke des Kontaktelementes nur in geringem Maße.

Infolgedessen laufen die Koordinatenflächen  $\xi_3 = \text{const.}$  näherungsweise parallel zueinander, so daß die Änderung der Richtungen  $\vec{t}, \vec{s}, \vec{n}$  entlang der Dicke vernachlässigbar klein bleibt.

Ein orthogonales, lokales Koordinatensystem kann – wie bei dem räumlichen Flächen-Kontaktelement – in zwei Schritten definiert werden. Im ersten Schritt können die Tangentenvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  zu den Koordinatenlinien  $\xi_1, \xi_2$  und von ihnen der normale Einheitsvektor  $\vec{n}$  gebildet werden. Im zweiten Schritt wird ein weiterer Einheitsvektor  $\vec{s}$  in der Tangentenebene so

aufgenommen, daß er sowohl zum Normalenvektor  $\vec{n}$  als auch zu dem Tangenten-Einheitsvektor  $\vec{t}$  der Koordinatenlinie  $\xi_1$  senkrecht steht.

Die Komponenten der Tangentenvektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  kann man aus der Jacobischen Matrix entnehmen:

$$\vec{a}_1 = J_{11} \vec{e}_1 + J_{12} \vec{e}_2 + J_{13} \vec{e}_3, \quad (4.41a)$$

$$\vec{a}_2 = J_{21} \vec{e}_1 + J_{22} \vec{e}_2 + J_{23} \vec{e}_3. \quad (4.41b)$$

Die Jacobische Matrix läßt sich aus folgenden Beziehungen berechnen:

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_1} x_{1i} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_1} x_{2i} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_1} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_2} x_{1i} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_2} x_{2i} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_2} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_3} x_{1i} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_3} x_{2i} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial G_i^*}{\partial \xi_3} x_{3i} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Der normale Einheitsvektor  $\vec{n}$  der Koordinatenfläche  $\xi_3 = \text{const.}$  ergibt sich durch ein Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = n_1 \vec{e}_2 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3. \quad (4.43)$$

Den tangentialen Einheitsvektor  $\vec{t}$  bekommt man, wenn der Vektor  $\vec{a}_1$  durch seinen Beitrag  $|\vec{a}_1|$  geteilt wird:

$$\vec{t} = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 + t_3 \vec{e}_3, \quad (4.44)$$

Der dritte Einheitsvektor läßt sich schließlich in der Form

$$\vec{s} = \vec{n} \times \vec{t} = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \vec{e}_2 + s_3 \vec{e}_3 \quad (4.45)$$

berechnen.

Im 2D-Fall (Bild 11b) erhält man die folgenden Ergebnisse:

$$\vec{t} = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2, \quad \vec{n} = -t_2 \vec{e}_1 + t_1 \vec{e}_1, \quad (4.46a)$$

wobei die Komponenten der Vektoren

$$t_1 = \frac{1}{J} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \quad t_2 = \frac{1}{J} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \quad (4.47)$$

sind. Die Größe  $J$  kann aus dem skalaren Linienelement einer Koordinatenlinie  $\xi_2 = \text{const.}$  entnommen werden:

$$dL = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2} d\xi_1 = J d\xi_1. \quad (4.48)$$

Die Verzerrungsvektoren (4.34a – c) sind im globalen Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$  definiert. Zum Aufbau

der Steifigkeitsmatrix ist es aber notwendig, die Verzerrungskomponenten im lokalen Koordinatensystem zu haben. Die Verzerrungsvektoren müssen deshalb ins lokale Koordinatensystem wie folgt transformiert werden:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.49)$$

t, s, n      1, 2, 3

wobei die Transformationsmatrix für den räumlichen Fall

$$\underline{\underline{T}}_{\epsilon} = \begin{bmatrix} t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_1 t_2 & t_2 t_3 & t_1 t_3 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 & s_1 s_2 & s_2 s_3 & s_1 s_3 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & n_1 n_2 & n_2 n_3 & n_1 n_3 \\ 2t_1 s_1 & 2t_2 s_2 & 2t_3 s_3 & (t_1 s_2 + t_2 s_1) & (t_2 s_3 + t_3 s_2) & (t_1 s_3 + t_3 s_1) \\ 2s_1 n_1 & 2s_2 n_2 & 2s_3 n_3 & (s_1 n_2 + s_2 n_1) & (s_2 n_3 + s_3 n_2) & (s_1 n_3 + s_3 n_1) \\ 2t_1 n_1 & 2t_2 n_2 & 2t_3 n_3 & (t_1 n_2 + t_2 n_1) & (t_2 n_3 + t_3 n_1) & (t_1 n_3 + t_3 n_1) \end{bmatrix} \quad (4.50a)$$

für ebene Aufgaben

$$\underline{\underline{T}}_{\epsilon} = \begin{bmatrix} t_1^2 & t_2^2 & t_1 t_2 \\ t_2^2 & t_1^2 & -t_1 t_2 \\ -2t_1 t_2 & 2t_1 t_2 & (t_1^2 - t_2^2) \end{bmatrix}, \quad (4.50b)$$

und für rotationssymmetrische Aufgaben

$$\underline{\underline{T}}_{\epsilon} = \begin{bmatrix} t_1^2 & t_2^2 & t_1 t_2 & 0 \\ t_2^2 & t_1^2 & -t_1 t_2 & 0 \\ -2t_1 t_2 & 2t_1 t_2 & (t_1^2 - t_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50c)$$

definiert ist.

Die Spannungen der Schicht-Kontaktelemente können aus dem Hookeschen Materialgesetz in bekannter Weise bestimmt werden:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.51)$$

t, s, n      t, s, n

Die Matrix der Materialkennwerte  $\underline{\underline{C}}$  lautet für den räumlichen Fall

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} E_2(1-\nu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2(1-\nu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (4.52a)$$

für den ebenen Spannungszustand

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad (4.52b)$$

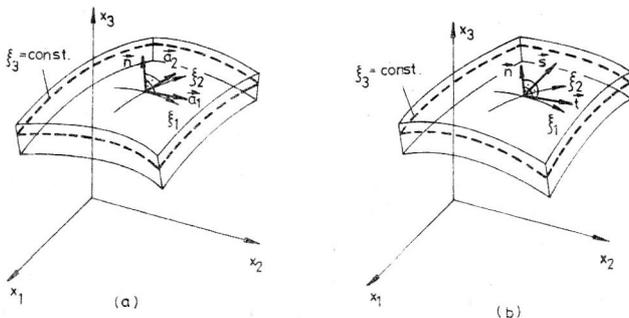


Bild 12  
Krummliniges, lokales Koordinatensystem und eine  $\xi_3 = \text{const.}$  Koordinatenfläche bei dem 3D-Schicht-Kontaktelement

für den ebenen Formänderungszustand

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} (1-\nu)E_2 & E_2 & 0 \\ E_2 & (1-\nu)E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.52c)$$

und für rotationssymmetrische Aufgaben

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} (1-\nu)E_2 & E_2 & 0 & E_2 \\ E_2 & (1-\nu)E_2 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ E_2 & E_2 & 0 & (1-\nu)E_2 \end{bmatrix} \quad (4.52d)$$

In den Matrizen (4.52 a – d) ist zu erkennen, daß die Moduli E und G voneinander unabhängig behandelt werden können. Da man hier das isotrope Coulombsche Reibgesetz simulieren will, ist es ausreichend, in der Matrix (4.52a) nur einen Schubmodul einzuführen.

Für Verschiebungselemente erhält man bekanntlich die Elementsteifigkeitsmatrix in der Form

$$\underline{\underline{K}}_c = \int_{(V^e)} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{B}} dV = \int_{(V^e)} \underline{\underline{k}}_c dV, \quad (4.53)$$

wobei die Matrix  $\underline{\underline{B}}$  mit (4.36), (4.38), (4.39), die Matrix  $\underline{\underline{T}}_\epsilon$  mit (4.50a – c) und die Matrix  $\underline{\underline{C}}$  mit (4.52a – d) gegeben sind.  $V^e$  bedeutet das Volumen des Elementes. Das Volumenelement  $dV$  läßt sich in der Form:

– für räumliche Aufgaben:

$$dV = \det \underline{\underline{J}} |d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3|, \quad (4.54a)$$

– für den ebenen Spannungszustand:

$$dV = b \det \underline{\underline{J}} |d\xi_1 d\xi_2|, \quad (4.54b)$$

– für den ebenen Formänderungszustand:

$$dV = \det \underline{\underline{J}} |d\xi_1 d\xi_2|, \quad (4.54c)$$

– für rotationssymmetrische Aufgaben:

$$dV = 2\pi x_1 \det \underline{\underline{J}} |d\xi_1 d\xi_2| \quad (4.54d)$$

beschreiben, wobei  $\det \underline{\underline{J}}$  die Determinante der Jacobischen Matrix (4.42) und  $b$  die Scheibendicke sind.

Die tatsächliche Berechnung der Steifigkeitsmatrix des Kontaktelementes erfolgt mittels numerischer Integration nach der Gaußquadratur. Es lautet z. B. für den 3D-Fall zu:

$$\underline{\underline{K}}_c \approx \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \sum_{k=1}^K H_i H_j H_k \underline{\underline{k}}_c(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}) \det \underline{\underline{J}}(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}). \quad (4.55)$$

Hier sind  $H_i, H_j, H_k$  die Gewichtungskoeffizienten und  $\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}$  die Stützstellenkoordinaten der Quadratur. Entsprechend der angewandten Näherungsansätze wird für die Anzahl der Gaußschen Integrationspunkte in Tangentialrichtung  $R = 3$  und in Normalrichtung  $K = 2$  gewählt.

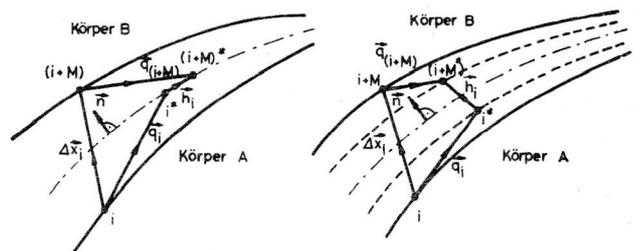
## 5. Berücksichtigung der Kontaktbedingungen

Bei beiden Kontaktelement-Typen werden die Kontaktbedingungen mit Knotenpunktvariablen aufgeschrieben. In den kinematischen Bedingungen werden Knotenverschiebungen, in den dynamischen Bedingungen aber Knotenkräfte verwendet. Knotenverschiebungen und Knotenkräfte können als primäre Größen der FEM-Berechnung berücksichtigt werden, von denen man deshalb eine höhere Genauigkeit erwartet. Die Verzerrungen und die daraus berechneten Spannungen können als Ableitungen der Näherungsansätze gebildet werden. Infolge der Ableitung entsteht immer ein bestimmter Genauigkeitsverlust. Deshalb werden wir auf die Anwendung dieser Größen bei der Formulierung der Kontaktbedingungen verzichten.

### 5.1. Kinematische Bedingung für die Berührung bei Flächen-Kontaktelementen

Im Bild 13a ist ein Normalenschnitt des Kontaktelementes dargestellt. Die Körper A und B befinden sich in dem Knotenpunktpaar  $i, (i+M)$  in Berührung, wenn der Distanzvektor  $\vec{h}_i$  des Knotenpunktpaares nach der Deformation keine Normalenkomponente hat:

$$\vec{n} \cdot \vec{h}_i = 0, \quad (5.1)$$



**Bild 13**  
Veranschaulichung der kinematischen Kontaktbedingungen

wobei  $\vec{n}$  der Normaleneinheitsvektor der fiktiven Mittelfläche des Elementes im Knotenpunkt  $i$  ist. Der Zusammenhang (5.1) ist die kinematische Bedingung für den Kontakt.

Für die numerische Berechnung bedeutet die Bedingung (5.1), daß der Betrag dieses Skalarproduktes einen vorgeschriebenen kleinen Wert nicht überschreiten kann:

$$|\vec{n} \cdot \vec{h}_i| \leq \delta. \quad (5.2)$$

Die Angabe dieses Wertes  $\delta$  hängt immer von den Dimensionen der untersuchten Konstruktion und den

Genauigkeitsansprüchen der zu lösenden Aufgabe. Zum Beispiel muß ein viel kleinerer Wert  $\delta$  für eine Werkzeugmaschinenkonstruktion, mit der eine Präzisionsbearbeitung von Metallen durchgeführt wird, als für eine gewöhnliche Maschinenkonstruktion in der Landwirtschaft angegeben werden.

### 5.2. Kinematische Bedingung für die Berührung bei Schicht-Kontaktelementen

Bei der Formulierung der kinematischen Kontaktbedingungen dieses Elemententyps wird die Normaldehnung  $\epsilon_n$  benutzt. Diese Größe wird aber unmittelbar mit Knotenverschiebungen ausgedrückt.

Die Körper A und B befinden sich in einem Knotenpunktpaar  $i, (i + M)$  in Berührung, wenn die Normaldehnung  $\epsilon_n$  des Schicht-Kontaktelementes dort

$$\epsilon_n = -1 \quad (5.3)$$

ist. Die Bedingung bedeutet, daß die Dicke des Kontaktelementes im Falle der Berührung verschwinden muß.

Bei der Darstellung der Normaldehnung gehen wir von ihrer Definition aus:

$$\epsilon_n = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Hier ist  $l_0$  eine Länge in der Richtung  $\vec{n}$  vor der Deformation und  $l$  dieselbe Länge nach der Deformation. Die Größen  $l_0$  und  $l$  lassen sich nach dem Bild 13 durch die Knotenverschiebungsvektoren und den Abstand  $\vec{\Delta x}_i$  der Knotenpunkte  $i$  und  $(i + M)$  vor der Deformation einfach ausdrücken:

$$\epsilon_n = \frac{[\vec{q}_{(i+M)} - \vec{q}_i] \cdot \vec{n}}{\vec{\Delta x}_i \cdot \vec{n}} \quad (5.4)$$

Die Bedingung (5.3) bedeutet für die numerischen Berechnungen die Erfüllung der folgenden Ungleichung

$$|\epsilon_n + 1| \leq \delta, \quad (5.5)$$

wobei  $\delta$  ein gegebener kleiner Wert ist. Da die Normaldehnung  $\epsilon_n$  eine spezifische Größe ist, hängt der Wert  $\delta$  nicht mehr von den Dimensionen der Konstruktion, sondern nur von den Genauigkeitsansprüchen der zu lösenden Aufgabe ab.

### 5.3. Dynamische Bedingung für die Berührung

Die dynamischen Kontaktbedingungen werden sowohl für Flächen- als auch für Schicht-Kontaktelemente einheitlich behandelt. Die Knotenkräfte  $\underline{S}$  des Kontaktelementes werden im globalen Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$  im Falle der Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix zu

$$\underline{S} = \underline{K}_c \underline{q} \quad (5.6a)$$

wobei  $\underline{K}_c$  die modifizierte Steifigkeitsmatrix nach (3.7) ist und im Falle der Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix in der Form

$$\underline{S} = \underline{K}_{\infty} \underline{q} + \sum_{j=1}^r \underline{K}_{cj} \Delta \underline{q}_j^1 + \sum_{i=1}^n \underline{K}_{ci} \Delta \underline{q}_i^2 + \dots \quad (5.6b)$$

berechnet. Hier sind  $r$  und  $n$  die nötige Anzahl der Iterationsschritte in den ersten zwei Lastinkrementen.

Zur Formulierung der dynamischen Kontaktbedingungen müssen die Knotenkräfte in das lokale Koordinatensystem der fiktiven Mittelfläche transformiert werden:

$$\underline{S}_{i,t,s,n} = \underline{T}_u \underline{S}_i \quad (5.7)$$

$\underline{S}_{i,t,s,n}$  und  $\underline{S}_i$  enthalten die Komponenten der Knotenkraft  $\underline{S}_i$  im Knotenpunkt  $i$  in den Richtungen  $\vec{t}, \vec{s}, \vec{n}$  bzw.  $x_1, x_2, x_3$ . Im Falle der Berührung muß die Dicke  $d$  des Elementes im Bild 14 verschwinden, deshalb erhält man für die Knotenkräfte aus Gleichgewichtsgründen die Beziehung

$$\vec{S}_i = -\vec{S}_{(i+M)} \quad (5.8)$$

Die Körper A und B befinden sich im Knotenpunktpaar  $i$  und  $(i + M)$  in Berührung, wenn

$$S_{in} > 0, \quad (5.9)$$

wobei  $S_{in}$  die Normalenkomponente der Knotenkraft ist. Diese Größe hat + Vorzeichen, wenn die Richtung der Kraftkomponente und die Richtung der Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}$  gleich sind.

Der Kontaktbereich läßt sich mittels eines Reibgesetzes in ein Haft- und Gleitgebiet unterteilen. Nach dem Coulombschen Reibgesetz befindet sich das Punktpaar in Haftung, wenn der Zusammenhang

$$|S_{ir}| \leq \mu |S_{in}| \quad (5.10)$$

erfüllt ist. Hier bedeutet  $\mu$  den Reibkoeffizient und  $S_{ir}$  die vollständige Tangentialkraft

$$S_{ir} = \sqrt{S_{it}^2 + S_{is}^2} \quad (5.11)$$

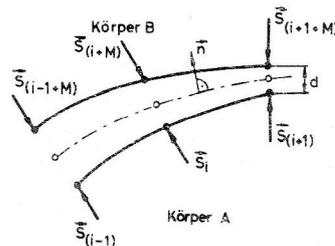


Bild 14  
Innere Kräfte in einem Normalschnitt der beiden Kontaktelemente

Zwischen den Punkten tritt Gleiten auf, wenn die Beziehung

$$|S_{ir}| > \mu |S_{in}| \quad (5.12)$$

gilt. In diesem Fall muß das Kontaktelement die Gleichung

$$|S_{ir}| - \mu |S_{in}| = 0 \quad (5.13)$$

befriedigen.

Für die numerische Berechnung bedeutet die Bedingung (5.13), daß der Betrag des obigen Ausdruckes einen vorgeschriebenen kleinen Wert nicht überschreiten kann:

$$\frac{1}{\mu |S_{in}|} \left| |S_{ir}| - \mu |S_{in}| \right| \leq \delta. \quad (5.14)$$

Auf der linken Seite der Ungleichung (5.14) steht wieder eine spezifische Größe, deshalb hängt die Angabe des Wertes  $\delta$  auch hier nur von des Genauigkeitsansprüchen der Aufgabe ab.

## 6. Iterative Änderung der Steifigkeits- bzw. Materialkoeffizienten der Kontaktelemente

Die Eigenschaften der Kontaktelemente werden in normaler und tangentialer Richtung als voneinander unabhängig vorausgesetzt. So kann die Befriedigung der normalen und tangentialen Kontaktbedingungen gesondert behandelt werden. In beiden Fällen erfolgt die Erfüllung der Bedingungen auf iterativem Wege.

Für die Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix findet man in der Fachliteratur weder für 2D- noch für 3D-Aufgaben, und zwar weder für Flächen- noch für Schicht-Kontaktelemente, Angaben zur iterativen Änderung der Steifigkeits- bzw. Materialkoeffizienten.

Für die Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix fehlen Angaben im 3D-Fall (Flächen- und Schicht-Kontaktelemente).

Für die Fälle, für die keine Formeln zur Verfügung stehen, kann man als ersten Schritt versuchen, die bekannten Rekursionsregeln zu erweitern. Kann ihre Anwendbarkeit durch numerische Tests nicht nachgewiesen werden, muß man weitere numerische Erfahrungen sammeln und durch ihre Verallgemeinerung neue Rekursionsformeln ableiten.

Im folgenden werden erste numerische Erfahrungen für die Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix im 2D-Fall zusammengefaßt.

### 6.1. Normale Kontaktiteration für Flächen-Kontaktelemente

Nach den Literaturquellen [19], [26] sollte die Steifigkeit  $k_n$  der Kontaktelemente  $10^4$ - bis  $10^5$ mal größer als die durchschnittliche Steifigkeit der Festkörperelemente in der Nachbarschaft des Kontaktbereiches gewählt werden. Es fehlen aber Hinweise, was zu tun ist, wenn die normalen Kontaktbedingungen trotzdem nicht befriedigt werden.

In diesem Fall haben wir bisher bei 2D-Aufgaben die folgende Regel erfolgreich angewendet:

(a) Wenn die Bedingung  $|\vec{n} \cdot \vec{h}_i| \leq \delta$  erfüllt wird, muß die Größe  $k_n$  nicht geändert werden.

(b) Wenn die Bedingung  $\vec{n} \cdot \vec{h}_i > 0$  besteht (der Fall des Spieles), muß man die dynamische Bedingung (5.9) zugrunde legen

( $\alpha$ ) Die Beziehung  $S_{in} > 0$  bedeutet, daß das Kontaktelement zu steif ist. Die Steifigkeit  $k_n$  wird nach der folgenden Formel vermindert:

$$k_{n(j+1)} = \frac{1}{10} k_{nj}. \quad (6.1)$$

Hier weisen die Indizes  $j$  und  $(j+1)$  auf die Iterationsschritte hin.

( $\beta$ ) Die Beziehung  $S_{in} \leq 0$  bedeutet, daß das Element in Normalrichtung einer Zugbeanspruchung unterliegt, was nicht zulässig ist. Die Steifigkeit  $k_n$  muß also in diesem Fall verschwinden:

$$k_{n(j+1)} = 0. \quad (6.2)$$

(c) Wenn die Bedingung  $\vec{n} \cdot \vec{h}_i < 0$  besteht, dann liegt eine Durchdringung vor, weil das Element zu weich ist. In diesem Fall muß deshalb die Steifigkeit  $k_n$  vergrößert werden:

$$k_{n(j+1)} = 10 k_{nj} \quad (6.3)$$

### 6.2. Normale Kontaktiteration für Schicht-Kontaktelemente

J. T. Stadter [29] hat für das Schicht-Kontaktelement mit linearem Ansatz eine Rekursionsformel entwickelt. Da unser Schicht-Kontaktelement eine lineare Näherung in normaler Richtung hat, kann die Gültigkeit der Beziehung auch auf dieses Element erweitert werden:

$$E_{(j+1)} = -\epsilon_{nj} E_j, \quad (6.4)$$

wobei  $E$  der Youngsche Modul und  $\epsilon_n$  die Dehnung in Normalrichtung sind.

Bei der Ableitung der Gleichung (6.4) setzen wir voraus, daß die Normalspannung  $\sigma_n$  auf dem Kontaktbereich während des Schlusses des Kontaktelementes näherungsweise konstant bleibt.

Infolgedessen wird die Normalspannung  $\sigma_n$  innerhalb eines Schrittes der Kontaktiteration unverändert gehalten:

$$\sigma_n = E_{(j+1)} \epsilon_{n(j+1)} = E_j \epsilon_{nj}. \quad (6.5)$$

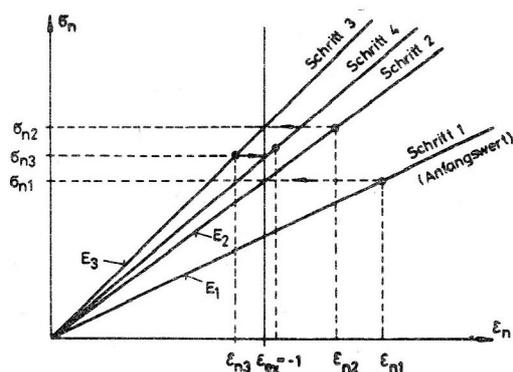
Nach Einsetzen der Kontaktbedingung (5.3) erhält man aus der Gleichung (6.5) unmittelbar die Rekursionsformel (6.4).

Der Anfangswert für den Modul  $E$  muß so gewählt werden, daß einige Normaldehnungswerte  $\epsilon_n$  für den Kontaktbereich näherungsweise gleich  $-1$  sind.

Beim Iterationsprozeß benutzt man die Formel (6.4) in folgender Weise:

- (a) Wenn die Bedingung  $|\epsilon_n + 1| \leq \delta$  erfüllt wird, muß die Größe E nicht geändert werden.
- (b) Wenn der Zusammenhang  $\epsilon_n > -1$  und  $|\epsilon_n + 1| > \delta$  besteht (der Fall des Spieles), muß man die dynamische Bedingung (5.9) verwenden:
- (α) Die Beziehung  $S_{in} > 0$  bedeutet, daß das Kontaktelement zu steif ist, also muß der Modul E mit Hilfe der Gleichung (6.4) vermindert werden.
- (β) Die Beziehung  $S_{in} \leq 0$  bedeutet, daß das Element in Normalrichtung eine Zugbeanspruchung hat. In diesem Fall muß der Elastizitätsmodul E gleich Null sein.
- (c) Wenn die Bedingung  $\epsilon_n < -1$  und  $|\epsilon_n + 1| > \delta$  besteht, dann liegt eine Durchdringung vor, weil das Kontaktelement zu weich ist. Der Modul E muß in diesem Fall mit der Formel (6.4) vergrößert werden.

Das Schema für die Änderung des Elastizitätsmoduls E wird im Bild 15 dargestellt.



**Bild 15**  
Schema für die Änderung des Elastizitätsmoduls E.

### 6.3. Tangentiale Kontaktiteration

Durch diese Iteration wird die Befriedigung des Reibgesetzes gewährleistet, d. h., es wird die Gleitzone innerhalb des Kontaktbereiches bestimmt.

Die Fachliteratur benutzt im 2D-Fall sowohl für Flächenkontaktelemente [18], [19], [26] als auch für Schicht-Kontaktelemente [27] die gleiche Formel wie für die Modifikation der Tangentialsteifigkeit  $k_t$  bzw. des Schubmoduls G.

Dabei geht man davon aus, daß sich die Berührungspunkte in Haftung befinden. Dementsprechend muß man die Iteration mit einem verhältnismäßig großen Wert  $k_t$  bzw. G beginnen.

- (a) Wenn die Bedingung der Haftung (5.10) erfüllt wird, muß der Wert nicht geändert werden.
- (b) Wenn die Bildung der Gleitung (5.12) besteht, muß der Anfangswert

(α) entweder mit der Groseschen Formel [18]:

$$k_{t(j+1)} = \mu \frac{S_n}{S_r} k_{tj}, \quad (6.6)$$

(β) oder mit der durch Feldmann [19] modifizierten Rekursionsformel

$$k_{t(j+1)} = \left( \mu \frac{S_n}{S_t} \right)^a k_{tj} \quad (6.7)$$

solange geändert werden, bis die Gleichung (5.14) erfüllt wird.

Mit der entsprechenden Wahl des Exponenten a in der Gleichung (6.7) kann die Iteration beschleunigt werden. Bei Schicht-Kontaktelementen stehen natürlich in den Gleichungen (6.6) und (6.7) statt der Tangentialsteifigkeiten die Schubmoduli.

## 7. Ausblick auf weitere Untersuchungen

Die Arbeit wird in folgenden Hauptrichtungen fortgesetzt:

- Vergleich der beiden Iterationsmethoden und der beiden Kontaktelementtypen,
- Gestaltung von effektiven Rekursionsformeln sowohl für den 3D-Fall bei den beiden Iterationsformen als auch für den 2D-Fall bei der Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix,
- Kopplung der Lösungsstrategien, Auswahl des effektivsten Lösungsweges.
- Nachweis der Anwendbarkeit des ausgewählten Lösungsweges für Kontaktaufgaben des Maschinenbaus.

Über die Ergebnisse dieser Untersuchung wird in einer weiteren Arbeit berichtet.

## LITERATUR

- [1] Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. Journ. für Mathematik 92., p. 156 – 171. (1881).
- [2] Шгаерман, И. Я.: Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
- [3] Пономарёв, С. Д., Бидерман, В. Л., Лихарев, К. К., Макушин, В. М., Малинин Н. Н., Феодосев, В. И.: Расчёты на прочность в машиностроении. Том 3., Гл. 6. Машгиз. Москва 1958.
- [4] Lubkin, J. L.: Handbook of engineering mechanics., Chapter 42: Contact problems (ed. by W. Flugge), McGraw-Hill, New York – Toronto – London. 1962.
- [5] Fichera, G.: Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraint. Encyclopedia of Physics (ed. by F. Flugge) Vol. VIa/2., Springer-Verlag, Berlin., 1972.
- [6] Páczelt, I.: Some remarks to the solution of quadratic programming problems. Publ. Techn. Univ. Heavy Ind. Miskolc, Ser. D. Nat. Sci., Vol. 33 (1979), pp. 137 – 156.
- [7] Páczelt, I.: Incremental variational principles in contact problems. Acta Technica Acad. Sci. Hung. 96 (1. – 4.) pp. 19 – 57. (1983).
- [8] Hung, N. D., Saxce, G.: Frictionless contact of elastic bodies by finite element method and mathematical programming technique. Comp. & Struct., Vol. 11., pp. 55 – 67.

- [9] Fischer, F. D.: Zur Lösung des Kontaktproblems elastischer Körper mit ausgedehnter Kontaktfläche durch quadratische Programmierung. *Computing*, 13, 353 – 384 (1974).
- [10] Panagiotopoulos, P. D.: A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact- and Friction-boundary Value Problem in the Theory of Elasticity. *Ingenieur-Archives* 44 (1975), pp. 421 – 432.
- [11] Fredriksson, B., Ryndholm, G., Sjöblom, P.: Variational inequalities in structural mechanics with emphasis on contact problems. *Proc. Conf. on Nonlin. Solid and Struct. Mech.*, Geilo, Norway, Sept. 1977.
- [12] Gaertner, R.: Investigation of plane elastic contact allowing for friction. *Comp. & Struct.*, Vol. 7., pp. 59 – 63., 1977.
- [13] Fredriksson, B.: On elastic contact problems with friction., Linköping Studies in Science and Technology. *Dissertations No. 6.*, (1976).
- [14] Fredriksson, B.: Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems. *Comp. & Struct.*, Vol. 6., pp. 281 – 290., (1976).
- [15] Bo Torstenfelt: Contact problems with friction in general purpose finite element computer programs. *Comp. & Struct.*, Vol. 16., pp. 487 – 493., (1983).
- [16] Bo Torstenfelt: An automatic incrementation technique for contact problems with friction. *Comp. & Struct.*, Vol. 19., No. 3., pp. 393 – 400. (1984).
- [17] Goodman, R. E., Taylor, R. L., Brekke, T. L.: A model for the mechanics of jointed rock. *Journ. Soil Mech. and Found. Div., Proc. of the ASCE.*, May 1968, 637 – 659.
- [18] Crose, J. G., Mack, T. E., Wooley, G. R., Smith, R. E.: Nonlinear Finite Element Analysis of Buttress Threaded Casing Connections. *ASME-Paper 76-PET-82*, 1976.
- [19] Feldmann, H.: Spannungsberechnung an Gewinden von Schraube-Mutter-Verbindungen mittels der Methode der finiten Elemente. *Diss.*, TU Braunschweig, 1981.
- [20] Desai, C. S., Zaman, M. M., Lightner, J. G., Siriwardane, H. J.: Thin-layer element for interfaces and joints. *Int. Journ. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 8., 19 – 43, (1984).
- [21] Keuser, M., Mehlhorn, G.: Bond between prestressed steel and concrete – computer analysis using ADINA. *Comp. & Struct.*, Vol. 17., No. 5. – 6., pp. 669 – 676. 1983.
- [22] Keuser, M.: Verbundelemente für nichtlineare Finite-Element-Berechnungen von Stahlbaukonstruktionen. *VDI Fortschrittberichte.*, Reihe 4., Bauingenieurwesen Nr. 71., VDI Verlag Düsseldorf., 1985.
- [23] Mehlhorn, G., Kolleger, J., Keuser, M., Kolmar, W.: Nonlinear contact problems – a finite element approach implemented in ADINA. *Comp. & Struct.*, Vol. 21., No. 1./2., pp. 69 – 80., 1985.
- [24] Desai, C. S.: Behavior of Interfaces Between Structural and Geologic Media. *Proc. Int. Conf. on Advances in Geotechn. Earthquake Engng. and Soil Dynamics.*, St. Louis, 1981.
- [25] Blisse, T.: Realisierung und Testung eines einfachen Algorithmus zur Erfassung von Kontaktproblemen im PS COSAR. *Diplomarbeit*, TH Magdeburg, 1985.
- [26] Hinzmann, R. D.: Beitrag zur Berechnung des Kontaktproblems mit Reibung mittels der Methode der finiten Elemente. *Diss.*, TU Braunschweig, 1980.
- [27] Padovan, J., Moscarello, R., Stafford, J., Tabaddor, F.: Pantographing self adaptive gap elements. *Comp. & Struct.*, Vol. 20., No. 4., pp. 745 – 758., 1985.
- [28] Mackerle, J.: Survey of general purpose finite element and boundary element computer programs for structural and solid mechanics applications structural analysis systems. *Pergamon Press* 1986.
- [29] Stadter, J. T., Weiss, R. O.: Analysis of contact through finite element gaps. *Comp. & Struct.*, Vol. 10., pp. 867 – 873., 1979.
- [30] Pande, G. N., Sharma, K. G.: On joint/interface elements and associated problems of numerical ill-conditioning. *Int. Journ. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 3., pp. 293 – 300., (1979).
- [31] Schäfer, H.: A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, (1975), 335 – 354.
- [32] Katona, M. G.: A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts. *Int. Journ. Num. Meth. Geomech.*, Vol. 7, 371 – 384, (1983).
- [33] Herrmann, L. R.: Finite Element Analysis of Contact Problems., *Journ. Engng. Mech. Div. Proc. of the ASCE.*, Vol. 104., No. EM5., Oct. 1978., pp. 1043 – 1057.
- [34] Изотов, А. Д.: Расчёт нестационарно нагруженных подшипников. Глава 5. „Машиностроение“ Ленинградское Отделение 1982.
- [35] Gnuchij, Ju. B.: Solution of contact problems of the theory of elasticity and plasticity. *Problemy Prochnosti.*, No. 12, pp. 99 – 104., Dec. 1982. (english translation).
- [36] Гнучий, Ю. Б.: Напряженно-деформированное состояние контактирующих тел, подверженных термомеханическим воздействиям. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата механических наук. Киев 1981.
- [37] Altenbach, J., Sacharov, A. S.: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. *VEB Fachbuchverlag Leipzig*, 1982.

#### Anschriften der Verfasser:

Dipl.-Ing. Janos Egert (z. Z. Fernaspirant, TU Magdeburg)  
 Technische Universität Miskolc  
 Lehrstuhl für Technische Mechanik  
 Miskolc – Egyetemvaros, H. 3515

Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach  
 Technische Universität „Otto von Guericke“  
 Sektion Maschinenbau  
 Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik  
 Magdeburg  
 DDR – 3010