

Eine Möglichkeit zur a priori-Bandbreitenminimierung bei Verwendung des hybriden Gleichgewichtsmodells in der Methode der finiten Elemente

Dieter Huste, Peter Pfau

0. Einleitung

Bei Verwendung des hybriden Gleichgewichtsmodells (HGM) in der Methode der finiten Elemente (FEM) spielen Invertierungen der Ausgangsmatrizen eine große Rolle.

Deshalb besitzen Überlegungen zu Fragen der numerischen Stabilität, der Verbesserung der Kondition sowie der Bandbreitenminimierung einen hohen Stellenwert. Anspruchsvolle FEM-Rechnerprogramme arbeiten zwar mit interner Bandbreitenminimierung, die aber nur in dem Maße wirksam werden kann, wie es die Ausgangsmatrizen gewährleisten.

In dem vorliegenden Beitrag wird eine Möglichkeit vorgestellt, bereits bei der Elemententwicklung eine Bandbreitenminimierung vorzunehmen.

1. Grundlagen des HGM

Das HGM – vorgeschlagen von Pian 1964 [1] – arbeitet mit zwei voneinander unabhängigen Feldansätzen

- einem Ansatz für das Spannungsfeld im Inneren des beschriebenen Elements, der die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen hat, und
- einem zweiten Ansatz für die Randverschiebungen, der die Kompatibilität der Nachbarelemente sicherstellen soll.

In den weiteren Darlegungen wird der Werkstoff als isotrop, linear elastisch vorausgesetzt.

Mit den nachstehend angegebenen Ausgangsgrößen

- $\{\beta\}$ – Vektor der Spannungsfreiwerte β_i
- $\{\sigma\}$ – Spannungsvektor
- $\{q\}$ – Vektor der Knotenverschiebungen q_i
- $\{\epsilon\}$ – Verzerrungsvektor
- $\{s\}$ – Vektor der Randschnittgrößen
- $\{u\}$ – Vektor der Randverschiebungen
- $[P]$ – Matrix des Spannungsansatzes
- $[L]$ – Matrix des Verschiebungsansatzes
- $[E]$ – Elastizitätsmatrix
- $[R]$ – Matrix der Randspannungen
- $[k]$ – Elementsteifigkeitsmatrix
- $[K]$ – Systemsteifigkeitsmatrix

lassen sich die Grundgleichungen in folgender Form darstellen:

$$\{\sigma\} = [P] \beta \quad (1)$$

$$\{u\} = [L] q \quad (2)$$

$$\{s\} = [R] \beta \quad (3)$$

$$\{\sigma\} = [E] \epsilon \quad (4)$$

Das Potential der Komplementärenergie lautet

$$\pi^* = 0.5 \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV - \int_{\Omega} \{s\}^T \{u\} d\Omega + \{q\}^T \{Q\} \quad (5)$$

mit V – Inneres des Elements und
 Ω – Rand des Elements.

Durch Einsetzen von (1) – (4) in (5) erhält man

$$\pi^* = 0.5 \int_V \{\beta\}^T [P]^T [E]^{-1} [P] \{\beta\} dV - \int_{\Omega} \{\beta\}^T [R]^T [L] \{q\} d\Omega + \{q\}^T \{Q\} \quad (6)$$

Mit der Zusammenfassung

$$[H] = \int_V [P]^T [E]^{-1} [P] dV \quad \text{und} \quad (7)$$

$$[T] = \int_{\Omega} [R]^T [L] d\Omega \quad (8)$$

ergibt sich

$$\pi^*(\beta, q) = 0.5 \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [T] \{q\} + \{q\}^T \{Q\} \quad (9)$$

Die Forderung nach Stationarität (auf Elementebene) bei Variation nach β

$$\frac{\partial \pi^*(\beta, q)}{\partial \beta} = 0$$

ergibt

$$[H] \{\beta\} - [T] \{q\} = 0 \quad (10)$$

beziehungsweise

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\} \quad (11)$$

Mit

$$[k] = [T]^T [H]^{-1} [T] \quad (12)$$

folgt

$$\pi^*(q) = -0.5 \{q\}^T [k] \{q\} + \{q\}^T \{Q\} \quad (13)$$

Diese Formulierung stimmt mit der der klassischen Verschiebungsmethode überein. Die Bestimmung der gesuchten Knotenverschiebungen erfolgt wie dort nach der Gleichung

$$\{q\} = [K]^{-1} \{Q\} \quad (14)$$

Der Grad des Spannungs- und des Verschiebungsansatzes darf nicht völlig unabhängig voneinander gewählt werden. So ist auf jeden Fall die von Tong und Pian [2] als notwendige Bedingung für das Entstehen regulärer Gesamtsteifigkeitsmatrizen formulierte Bedingung

$$i \geq f_k - f_s$$

mit

i – Mindestanzahl der Freiwerte β_i

f_k – Anzahl der Knotenfreiheitsgrade des Elements

f_s – Anzahl der Starrkörperfreiheitsgrade

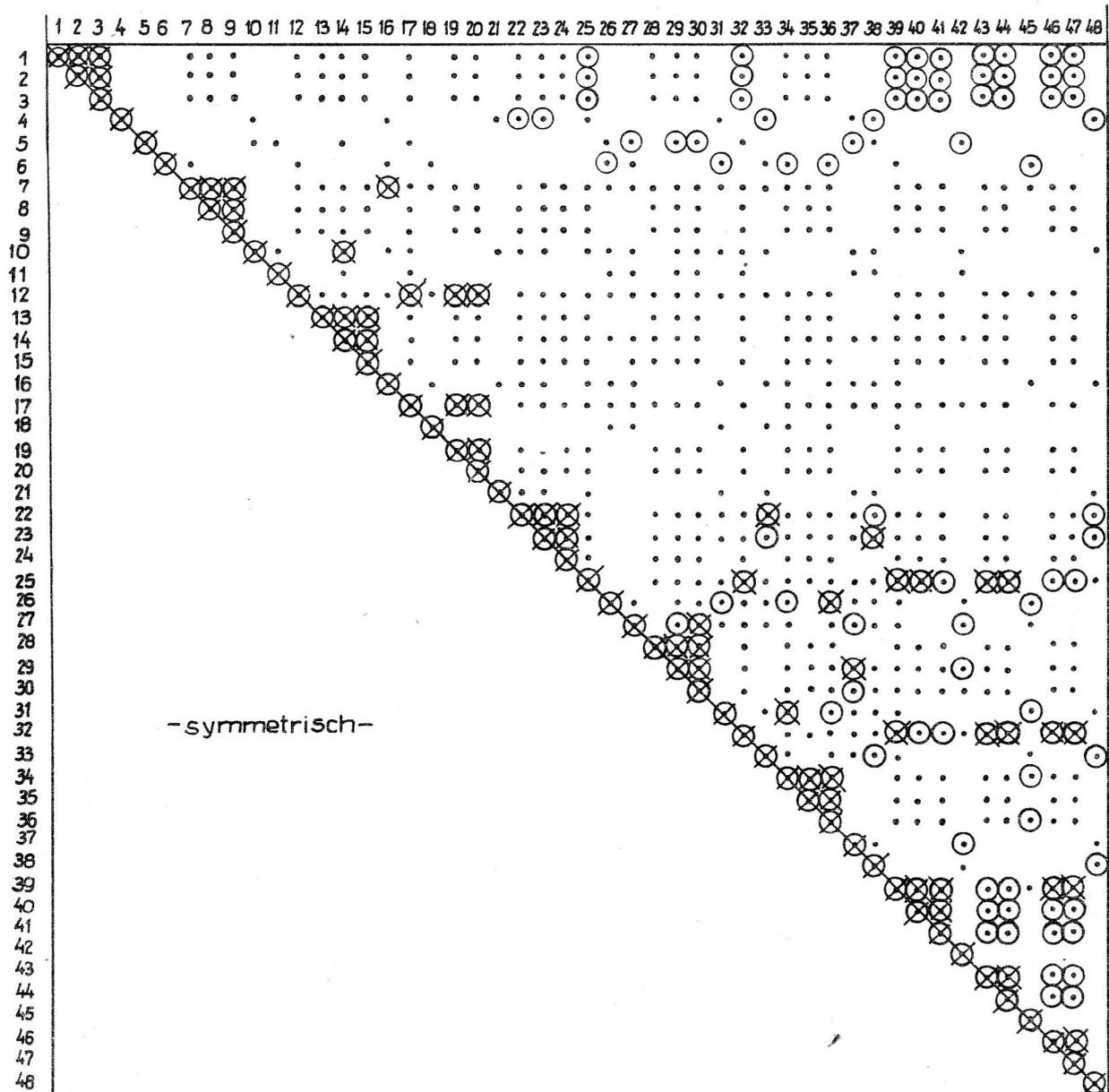


Bild 1
[H]-Matrix-3D-Element-vollquadr. Spannungsansatz

- Elemente konventioneller Polynomansatz
- Elemente teilweise orthog. Ansatz
- X Elemente vollständig orthog. Ansatz

einzuhalten. Diese Bedingung stellt eine untere Schranke für die Zahl der Spannungsfreiwerte β_i dar.

Aus (11) und (12) geht die große Bedeutung der inversen Matrix von [H] hervor. Es lohnt sich deshalb, bei Elemententwicklungen von vornherein [H]-Matrizen mit minimaler Bandbreite und guter Kondition anzustreben.

2. Möglichkeiten zur Gestaltung der [H]-Matrix

Die Notwendigkeit einer verbesserten Gestaltung der [H]-Matrix wurde sichtbar, als wir den Versuch unternahmen, ein hybrides 3D-Quaderelement 1. Ordnung mit 6 Freiheitsgraden je Knoten zu entwickeln. Der dafür gewählte vollquadratische Spannungsansatz be-

sitzt nach Einarbeiten der Gleichgewichtsbedingungen 48 Freiwerte β_i . Die Piansche Bedingung wurde eingehalten. In Anlehnung an die Arbeiten von Schubert [3] bis [5] wurde ein unnormierter Quader gewählt und der Ursprung des Elementkoordinatensystems in einen Eckpunkt gelegt.

Die entstehende [H]-Matrix brachte numerisch einige Schwierigkeiten, da sie schlecht konditioniert und von voller Bandbreite war. So beträgt die Belegung mit von Null verschiedenen Elementen 60 %, und es sind Unterschiede in den Exponenten der eingehenden geometrischen Größen von fünf Ordnungen vorhanden. Die Belegung ist im Bild 1 dargestellt.

Die Invertierung dieser Matrix auf der Anlage E 1056 unter Nutzung der zur Verfügung stehenden Programm-

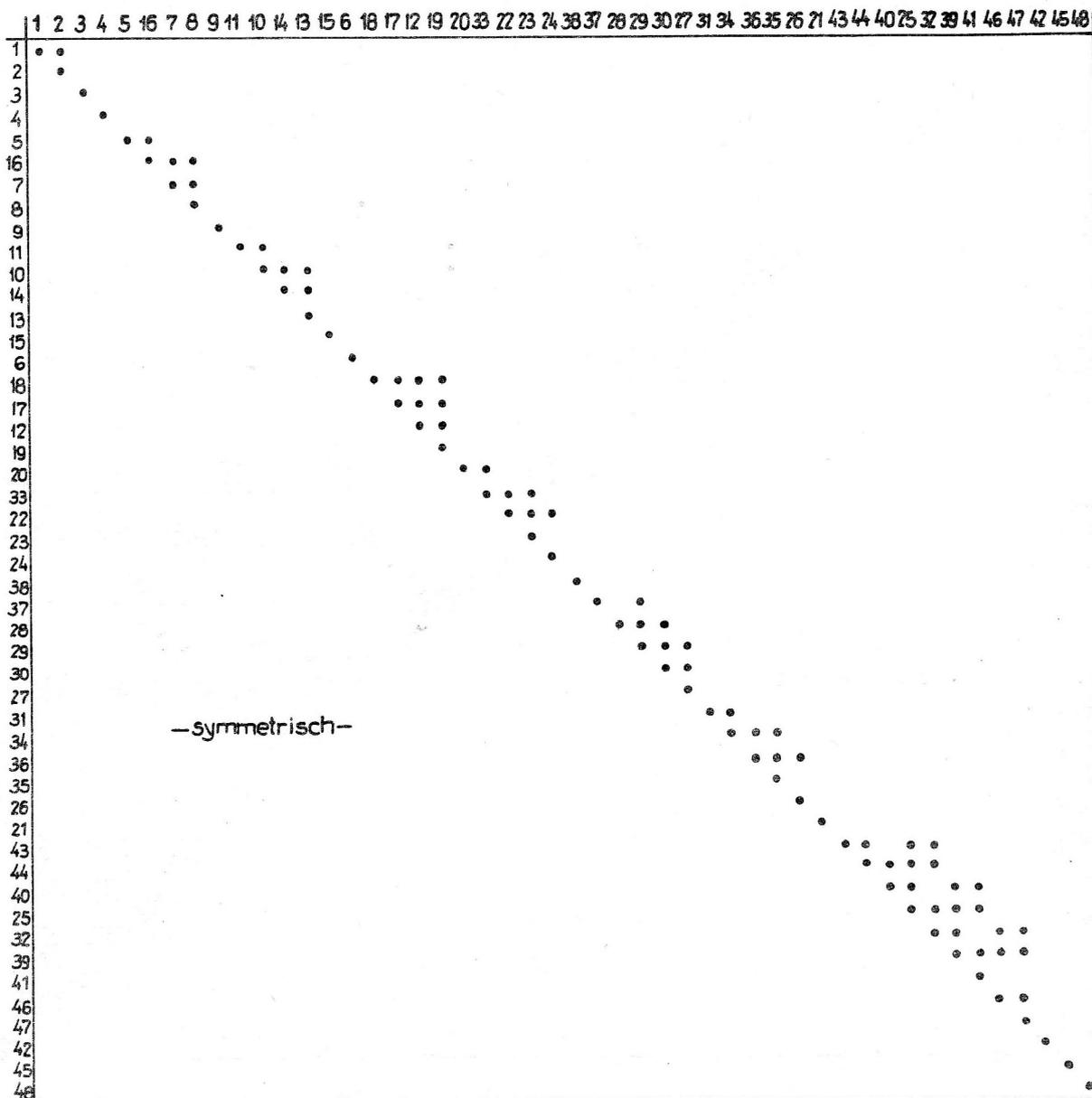


Bild 2
[H]-Matrix-3D-Element-vollquadr. orthog. Spannungsansatz

bibliothek [6] war nach Cholesky nicht möglich und gelang erst nach Gauss-Jordan unter Vorschaltung einer internen Normierung.

Diese Tatsache führte zum Versuch, eine neue [H]-Matrix bereitzustellen, die eine schwächere Belegung mit kleinerer Bandbreite und eine bessere Kondition besitzt.

Ein Zwischenergebnis ergab sich dadurch, daß der Koordinatenursprung des kartesischen Systems in den Mittelpunkt des Quaders verschoben wurde, so daß die Koordinatenachsen Symmetrieachsen wurden. Gleichzeitig wurde eine Normierung des Quaders auf den Einheitswürfel vorgenommen. Die Belegung mit von Null verschiedenen Elementen von nur noch 13 % ist im Bild 1 vergleichend dargestellt.

Die erzielte Verbesserung ist das Resultat einer teilweisen Orthogonalität der Ansatzfunktionen. Weitere Verbesserungen sind zu erwarten, wenn es gelingt, den Potenzfunktionenansatz des Spannungsfeldes für das vorliegende Integrationsintervall vollständig zu orthogonalisieren. Dieses Vorhaben führt auf die Klasse der Legendreschen Polynome, hier bis zum Polynom 3. Grades für das Intervall $[-0.5; 0.5]$ berechnet und nach der Regel

$$\int_{-0.5}^{0.5} f_i(x) f_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

normiert:

$$f_0(x) = 1$$

$$f_1(x) = 2\sqrt{3}x$$

$$f_2(x) = 6\sqrt{5}(x^2 - 1/12)$$

$$f_3(x) = \sqrt{7}(20x^3 - 3x).$$

Mit diesen orthogonalen Ansatzfunktionen, und zwar mit einem vollquadratischen Ansatz, wurde eine Neuberechnung der [H]-Matrix vorgenommen. Der Ansatz für σ_x lautet z. B. noch ohne Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) = & f_0 \beta_1 + f_1(x) \beta_7 + f_1(y) \beta_{13} \\ & + f_1(z) \beta_{19} + f_1(x) f_1(y) \beta_{25} \\ & + f_1(y) f_1(z) \beta_{31} + f_1(x) f_1(z) \beta_{37} \\ & + f_2(x) \beta_{43} + f_2(y) \beta_{49} + f_2(z) \beta_{55}. \end{aligned}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	$-\nu$										
2		1										
3			$2(1+\nu)$									
4				$1 + 2\frac{b^2}{a^2}(1+\nu)$	$-\nu$							
5					1							
6						1	$-\nu$					
7							$1 + 2\frac{a^2}{b^2}(1+\nu)$					
8								$1 + 2\frac{b^2}{a^2}(1+\nu)$				
9									$1 + 2\frac{a^2}{b^2}(1+\nu)$			
10										$1 + 2\frac{b^2}{a^2}(1+\nu)$	$-\nu$	$-\nu\frac{b^2}{a^2}$
11											1	
12												1

Bild 3
[H]-Matrix-Rechteckscheibe-vollquadr. orthog. Spannungsansatz

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
-1	1	$-\nu$															
2		1															
3			$2(1+\nu)$														
4				1	$-\nu$												
5					1												
6						$2(1+\nu)$											
7							1	$-\nu$									
8								1									
9									$2(1+\nu)$								
10										1	$-\nu$						
11											1						
12			-symmetrisch-									1	$-\nu$				
13													$\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta} (1+\nu)$	$\frac{5}{2} (1+\nu)$			
14														$\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\alpha} (1+\nu)$	$-\nu$		
15															1		
16																$2(1+\nu)$	
17																	$2(1+\nu)$

Bild 4
[H]-Matrix-Rechteckplatte-vollquadr. orthog. Momentenansatz

Die Belegung der nun entstehenden [H]-Matrix mit von Null verschiedenen Elementen beträgt nur noch 6 %. Sie ist ebenfalls im Bild 1 vergleichend dargestellt.

Durch gezielte Umnummerierung der Reihen kann eine weitere Verdichtung der Bandstruktur erreicht werden. Im Ergebnis entsteht die im Bild 2 dargestellte [H]-Matrix mit der Bandbreite 5, die sich zudem ohne Ausnahme aus nicht verketteten Untermatrizen zusammensetzt. Die größte Untermatrix hat die Dimension 9 mal 9.

Da die vorliegende Orthogonalisierung nur eine lineare Transformation darstellt, läßt sich zeigen, daß die zu berechnende Elementsteifigkeitsmatrix $[k] = [T]^T [H]^{-1} [T]$ invariant gegenüber dieser Transformation ist.

Damit liegt der Vorteil der Nutzung orthogonaler Ausgangspolynome auf der Hand. Er besteht in

- einer bedeutenden Verringerung der Rechenzeit,
- einer verbesserten numerischen Genauigkeit ohne Nachschaltung evtl. notwendiger Iterationsschritte,
- einer erhöhten Transparenz auch der [T]-Matrix.

Die erreichten Ergebnisse wurden auf bekannte 2D-Rechteckelemente angewandt. Die unter Nutzung vollquadratischer Spannungsansätze berechneten [H]-Matrizen sind für das Scheibenelement im Bild 3 und für das Plattenelement im Bild 4 dargestellt. Das Auftreten von nicht verketteten Untermatrizen der Dimension 3 mal 3 bzw. 4 mal 4 gestattet sogar in beiden Fällen eine problemlose analytische Invertierung.

3. Zusammenfassung

Mit der Nutzung der Legendreschen Polynome bei der Aufstellung des Spannungsfeldes für Rechteck- bzw. Quaderelemente beim HGM gelingt es, [H]-Matrizen bereitzustellen, die sich durch minimale Bandbreite und gute Kondition auszeichnen. Damit wird es möglich, Rechenzeit einzusparen, die numerische Genauigkeit zu erhöhen und im 2D-Fall sogar die numerische Inversion zu vermeiden.

Die Anwendung der orthogonalen Ansätze auf die Berechnung der Matrix [T] führt zu einer bedeutenden Erhöhung ihrer Transparenz. Daraus folgen einige Erkenntnisse über das hybride Gleichgewichtsmodell, über die in einem weiteren Aufsatz berichtet werden soll.

LITERATUR

- [1] Pian, T. H. H.: Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions. AIAA-Journal, 2 (1964), 1333 – 1336.
- [2] Tong, P.; Pian, T. H. H.: A Variational Principle and the Convergence of a Finite Element Method Based on Assumed Stress Distributions. International Journal of Solids and Structures, 5 (1969), 463 – 472.
- [3] Schubert, B.: Scheibenelemente mit Knotenverschiebungen und Knotenverzerrungen. Materialien 2. Weiterbildungsseminar Schiffsfestigkeit, WPU Rostock, Sektion Schiffstechnik, 1983, 120 – 134.
- [4] Schubert, B.: Eine hybride FE-Scheibenfamilie zur Berechnung dünnwandiger Tragwerke. Wissenschaftliche Beiträge, IHS Wismar 3/1984, 22 – 24.
- [5] Schubert, B.: Dokumentation rechteckiges hybrides Scheibenelement, Typ HGM 12/4 R.
- [6] Programmbibliothek MABIF, Katalog, Erweiterung 1981. AdW der DDR, Zentralinstitut für Isotopen- und Strahlenforschung, Leipzig, Informations- und Rechenzentrum.

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. Dieter Huste
Offiziershochschule „Rosa Luxemburg“
PSF 79292/SB
Suhl
6 0 2 3

Dr.-Ing. Peter Pfau
Technische Universität Karl-Marx-Stadt
Sektion Maschinen-Bauelemente
PSF 964
Karl-Marx-Stadt
9 0 1 0