

# Die Erweiterung des Programmsystems COSAR auf die Lösung nichtlinearer Probleme der Festkörpermechanik

Heinz Köppe, Wolfgang Lenz, Johannes Altenbach

## 1. Einleitung

Das Berufsbild des Berechnungsingenieurs ist in der heutigen Zeit starken Veränderungen unterworfen. Waren seine Möglichkeiten bei statischen und dynamischen Berechnungen relativ komplizierter Bauteile bisher stark eingeschränkt, so eröffnet der Einzug moderner Technik in Entwurfs- und Konstruktionsbüros vollkommen neue Möglichkeiten bei der Lösung solcher Probleme. Die Zugänglichkeit zu leistungsfähigen Arbeitsplatzcomputern und Großrechenanlagen bietet immer bessere Voraussetzungen, umfangreiche und effektive numerische Berechnungsverfahren zu notwendigen Bauteil- und Strukturanalysen einzusetzen. Unter diesen Verfahren spielt die Methode der finiten Elemente eine dominierende Rolle. Besonders für Untersuchungen bei linear-elastischem Materialverhalten übersteigt die national und international verfügbare Software heute das Überschaubare. Neben großen Programmsystemen existieren viele kleinere Spezialprogramme, die auf bestimmte Problemklassen und Rechner zugeschnitten sind.

Unter den in der DDR nachnutzbaren großen FEM-Systemen zur Berechnung dreidimensionaler Bauteile hat das Programmsystem COSAR in den letzten Jahren eine breite Anwendung in der Industrie und Forschung gefunden. Die zunehmend schnelle Verbreitung von COSAR ist im wesentlichen in folgenden Aspekten zu sehen:

- leistungsfähiger Pre- und Postprozessor
- umfangreicher Elementkatalog
- Portabilität auf unterschiedliche Rechner und Rechnersysteme (16-Bit- und 32-Bit-Rechentechnik)
- umfangreiche Serviceleistungen durch den Vertreiber.

Die Notwendigkeit einer Einbeziehung nichtlinearer Effekte bei Bauteiluntersuchungen beruht auf den ständig steigenden Anforderungen an die Genauigkeit und Aussagefähigkeit der Ergebnisse und eine bessere Auslastung der Tragfähigkeitsreserven im Sinne der Materialökonomie. Die prinzipielle Verfügbarkeit von Computern mit hohen Rechengeschwindigkeiten und großen Speicherkapazitäten bietet die Möglichkeit, dieses Aufgabenfeld ebenfalls mit Hilfe der Methode der finiten Elemente zu bearbeiten. International werden von Softwarefirmen diesbezüglich umfangreiche Programmpakete angeboten, die sowohl physikalisch nichtlineares als auch geometrisch nichtlineares Verhalten berücksichtigen können. Aus der umfangreichen Literatur sind solche Programmsysteme wie ADINA, ABAQUS-EPGEN, ANSYS, NASTRAN, NISA usw. bekannt.

Der erreichte Entwicklungsstand von COSAR, die wachsenden Forderungen der Industriepartner nach nichtlinearen Lösungsverfahren und der Wunsch der Entwicklergruppe, international konkurrenzfähige universelle FE-Software zu entwickeln, waren ausschlaggebend für die Konzeption und Entwicklung eines Programmzweiges COSAR/N zur nichtlinearen Bauteilanalyse. Die Möglichkeiten einer Nutzung schon in COSAR vorhandener Programmteile, wie die zum Pre- und Postprozess, zur Substrukturtechnik, zum Einspeicherungsprozess usw., bringt natürlich Vorteile bei einer Programmentwicklung. Man muß aber auch sagen, daß eine Programmentwicklung im Rahmen eines schon bestehenden Programmsystems gleichermaßen Einschränkungen und Kompromisse in der Konzeption erforderlich macht. Davon ausgehend, wurde versucht, eine Konzeption zu entwickeln, die einerseits die Berechnung einer großen Klasse von nichtlinearen Aufgaben der Festkörpermechanik, speziell des Maschinenbaus, ermöglicht, aber andererseits einen integrierbaren Baustein des Gesamtkonzeptes von COSAR darstellt.

## 2. Der Programmzweig COSAR/N(nichtlinear)

### 2.1. Programmumfang COSAR/N

Die internationale Entwicklung von leistungsfähigen FEM-Programmen zur Lösung linearer Feldprobleme der Mechanik geht dahin, die subjektiven Fehlereinflüsse des Nutzers auf ein Mindestmaß zu reduzieren. Die hauptsächlichsten Fehler werden bei der Modellfindung und deren Umsetzung in ein FE-Netz gemacht. Adaptive Netzgeneratoren gekoppelt mit umfangreichen a priori und a posteriori Fehlerabschätzungen rücken immer mehr in den Vordergrund bei der Konzeption und Gestaltung moderner Finite-Elemente-Systeme. Gerade die Kopplung von FE- und CAD-Prozessen erhöht die Bedeutung solcher Entwicklungen.

Ein ähnlich hoher Grad der Unabhängigkeit von subjektiven Fehlereinflüssen des Nutzers wird man bei vergleichbaren Systemen zur nichtlinearen Analyse vorerst nicht erwarten können. Deshalb liegen die Ansprüche an die fachliche Qualifikation und an die Erfahrungen des Nutzers beim Einsatz solcher Verfahren weit höher. Neben der eigentlichen Modellfindung muß er sich zusätzlich mit folgenden oder ähnlichen Fragestellungen auseinandersetzen:

- geometrisch lineares oder nichtlineares Verhalten,
- welches Materialverhalten liegt vor und wie sieht dessen Approximation aus,
- welche Last- oder Zeitschritteinteilung ist notwendig,
- welcher Art sind die Nichtlinearitäten (global oder lokal).

Wenn es auch nicht gelingen wird, alle diese Fragen vom Computer beantworten zu lassen, so muß ein FEM-Programm zur nichtlinearen Analyse, welches einem breiten Nutzerkreis zugänglich sein soll, neben der Möglichkeit einer effektiven Abarbeitung auch eine Zahl von aktiven Unterstützungshilfen zur richtigen Beschreibung und zur Ablaufsteuerung des nichtlinearen Berechnungsprozesses enthalten.

Das Programmsystem COSAR wurde vorrangig zur Lösung maschinenbautechnischer Aufgaben entwickelt. Unter diesem Gesichtspunkt sind auch die Entwicklungen des nichtlinearen Zweiges zu sehen. Die Ursachen von Nichtlinearitäten mechanisch beanspruchter Bauteile können entweder durch das Materialverhalten (physikalisch nichtlinear) oder durch die Größe der Verformungen (geometrisch nichtlinear) bedingt sein. Diese treten in entsprechenden Anwendungsfällen unabhängig oder in gekoppelter Form auf. Stabtragwerke und dünnwandige Schalenkonstruktionen neigen sehr häufig unter entsprechender Belastung zu geometrisch nichtlinearem Verhalten. Zur Berücksichtigung unterschiedlichen nichtlinearen Materialverhaltens werden in COSAR/N Möglichkeiten geschaffen, nichtlinear-elastische, elastisch-plastische und viskoplastische Gesetze zu implementieren. Durch die eindeutige Definition von Schnittstellen für Eingangs- und Ausgangsgrößen lassen sich in COSAR abgeschlossene und kompakte Materialprozessoren auf Strukturebene aufbauen, die sowohl für statische als auch für dynamische Berechnungen anwendbar sind. Im Bild 1 ist der konzeptionell vorgesehene Umfang von COSAR/N dargestellt, der in der weiteren Zeitfolge schrittweise umgesetzt wird. Vorrangig werden in der ersten Realisierungsphase Lösungsmöglichkeiten für geometrisch lineare, aber physikalisch nichtlineare Probleme geschaffen.

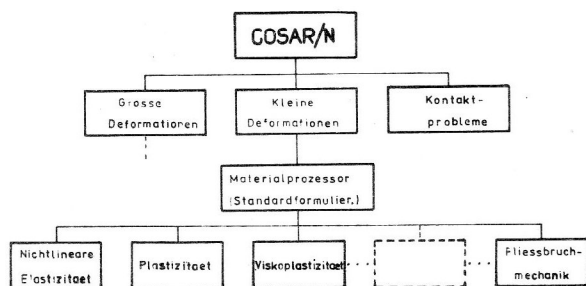


Bild 1  
Geplanter Programmumfang von COSAR/N(nichtlinear)

## 2.2. Die Deformationsgesetze in der Standardformulierung

Die Notwendigkeit einer variablen Erfassung des Materialverhaltens in einem allgemeingültigen FE-Programm erfordert für die Vielzahl der möglichen Deformationsgesetze eine vereinheitlichte Darstellung. Schwierigkeiten in dieser Richtung stellen neben der großen Zahl von Gesetzen die unterschiedlichen Ausgangspositionen, die Vielfalt der verwendeten Operatoren, programmierungstechnisch ungünstig formulierte Beziehungen usw. dar. Von Bergander [1] wurde eine Standardformulierung vorgeschlagen, mit welcher sich jedes beliebige inelastische Materialverhalten in einer einheitlichen Form direkt oder durch eine Approximation beschreiben läßt. Diese Formulierung führt auf einen durch die Gleichungen 2.1 und 2.2 dargestellten Satz von Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der Zeit<sup>1)</sup>:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{C}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{d}_T(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \dot{T} + \underline{d}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \quad (2.1)$$

$$\dot{\underline{h}} = \underline{B}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{e}_T(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \dot{T} + \underline{e}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \quad (2.2)$$

Mit der Einhaltung eines solchen Standardkonzeptes schafft man eine effektive Möglichkeit, bei entsprechender Modularität des Programmes, Materialgesetze problemlos gegeneinander austauschen zu können. Bei der Definition standardisierter Datenschnittstellen ist sogar ein Austausch von Programmroutinen zur Materialbeschreibung zwischen unterschiedlichen FE-Systemen denkbar. Daraus läßt sich ein weiterer wichtiger Aspekt ableiten. Die eigentliche Programmentwicklung kann unabhängig von besonderen Kenntnissen des Materialverhaltens erfolgen. Dieser Bereich bleibt dann Spezialisten auf diesem Gebiet vorbehalten, wodurch es zu einer effektiven Zusammenarbeit zwischen Mechanikern und Werkstoffexperten kommen kann. Für die im Bild 1 dargestellten Materialien soll in den nächsten Abschnitten die Standardformulierung mit einem konkreten Deformationsgesetz angegeben werden. Dabei werden kleine Deformationen vorausgesetzt.

### 2.2.1. Nichtlinear elastisches Materialverhalten

Nichtlinear-elastisches Materialverhalten ist typisch für viele Elastomere, kautschukartige Materialien und für einige Buntmetalle. Bekannt sind aber auch Modelle aus der Bodenmechanik. Die Matrizen  $\underline{C}$  und  $\underline{J}$  sind symmetrische Matrizen. Aufgrund der Unabhängigkeit der Werkstoffeigenschaften von sich während des Belastungsprozesses ändernden Materialfunktionen und des skleronomen Charakters des Zusammenhanges zwischen  $\dot{\underline{\sigma}}$  und  $\dot{\underline{\epsilon}}$  reduziert sich die Standardformulierung (2.1) zu

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{C} \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{d}_T \dot{T} \quad (2.3)$$

oder

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{J} \dot{\underline{\sigma}} + \underline{b}_T \dot{T} \quad (2.4)$$

1) Im folgenden werden Vektoren und Matrizen in den Formeln durch Unterstreichen gekennzeichnet.

Im Fall eines isothermen Zustandes wird der Vektor  $\underline{d}_T = 0$  bzw.  $\underline{h}_T = 0$ . Die hier vorgestellte Beschreibung geht auf Kauderer [2] zurück. Für den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen wird folgendes Gesetz angenommen:

$$\underline{\sigma} = 3K\kappa(\epsilon_0)\underline{\sigma} + G\alpha(\psi_0^2)\underline{\epsilon}^* \quad (2.5)$$

mit

$$\underline{\sigma}^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$$

$\underline{\epsilon}^*$  – Vektor der Komponenten des Verzerrungsdeviators

$\psi_0$  – Schubdeformationsintensität

$\epsilon_0$  – Volumendehnung

$G$  – Gleitmodul

$K$  – Kompressionsmodul

Die funktionale Beschreibung für  $\kappa(\epsilon_0)$  und  $\alpha(\psi_0^2)$  entsteht durch Reihenentwicklungen

$$\kappa(\epsilon_0) = 1 + \kappa_1 \epsilon_0 + \kappa_2 \epsilon_0^2 + \dots \quad (2.6)$$

$$\alpha(\psi_0^2) = 1 + \alpha_2 \psi_0^2 + \alpha_4 \psi_0^4 + \dots \quad (2.7)$$

Die in den Summanden der Reihe vorkommenden Konstanten sind experimentell ermittelte Werte.

### 2.2.2. Elastisch-plastisches Materialverhalten

Der Programmzweig „Elastoplastisches Materialverhalten“ ermöglicht derzeit die Berechnung von ebenen, axialsymmetrischen und räumlichen Problemstellungen mit den Elementen des COSAR-Elementkataloges unter der Voraussetzung physikalisch nicht-linearen Materialverhaltens. Der Formelsatz (2.1 – 2.2) für inelastische Deformationsgesetze reduziert sich dabei auf:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{C} \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{d}_T \dot{T} \quad (2.8)$$

$$\dot{\underline{h}} = \underline{B} \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{e}_T \dot{T} \quad (2.9)$$

Die kinematischen und statischen Gleichungen der Elastostatik gelten aufgrund der Materialunabhängigkeit weiterhin. Zur Beschreibung des Materialverhaltens sind dagegen weitere Voraussetzungen und Annahmen erforderlich. Die Beschreibung dieser Zusammenhänge erfolgt auf der Grundlage der Fließtheorie. Es wurden folgende im Maschinenbau allgemein übliche Voraussetzungen getroffen:

- Die Verzerrungen sind darstellbar als Summe aus elastischen und plastischen Anteilen
- Änderungen der Bauteilgeometrie werden nicht erfasst (plastische Verzerrungen in der Größenordnung der elastischen),
- das Werkstoffverhalten sei skleronom,
- der Werkstoff sei plastisch inkompressibel.

Weiterhin erforderlich ist eine Fließbedingung, das heißt die mathematische Formulierung der Abgrenzung zwi-

schen elastischem und plastischem Materialverhalten. Im Fließ- und Verfestigungsbereich gelte das differentielle Fließgesetz nach PRANDTL und REUSS. Auf dieser Basis lassen sich mit den Grundbeziehungen der Elastoplastizität

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^p \quad (2.10)$$

$$\text{Fließbedingung: } f(\underline{\sigma}, \underline{h}, T) = \theta \quad (2.11)$$

$$\text{Belastungsbedingung: } \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}\right) \dot{\underline{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right) \dot{T} \geq 0 \quad (2.12)$$

$$\text{Normalenregel: } \dot{\underline{\epsilon}}^p = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}\right) \dot{\lambda} \quad (2.13)$$

$$\text{Gleichung zur Änderung der Parameter: } \dot{\underline{h}} = \underline{q} \dot{\lambda} \quad (2.14)$$

die Matrizen der Standardformulierung ermitteln. Der nichtnegative skalare Faktor  $\dot{\lambda}$  bestimmt dabei die Größe der plastischen Dehnungen. Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\underline{C} = \underline{E} - \frac{\underline{E}^T \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T \underline{E}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\psi}^T \underline{q}} \quad (2.15)$$

$$\underline{d}_T = \frac{\underline{E}^T \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\alpha}_{th} - \underline{E}^T \underline{\alpha}_{th} \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\psi}^T \underline{q}} - \underline{E} \underline{\alpha}_{th} \quad (2.16)$$

$$\underline{B} = \frac{\underline{q} \underline{\psi}^T \underline{E}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\psi}^T \underline{q}} \quad (2.17)$$

$$\underline{e}_T = \frac{\underline{q} \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right) - \underline{q} \underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\alpha}_{th}}{\underline{\varphi}^T \underline{E} \underline{\varphi} - \underline{\psi}^T \underline{q}} \quad (2.18)$$

$$\text{mit } \underline{\psi} = \frac{\partial f}{\partial \underline{h}} \quad \text{und} \quad \underline{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

$\underline{E}$  – Elastizitätsmatrix

$\underline{\alpha}_{th}$  – thermischer Ausdehnungskoeffizient

$$\underline{\alpha}_{th}^T = \underline{\alpha}_{th}$$

$$[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Die Fließbedingung  $f(\underline{\sigma}, \underline{h}, T)$  ist im allgemeinsten Fall abhängig von den Spannungen  $\underline{\sigma}$ , der Temperatur  $T$  und einer Reihe von Zustandsparametern  $\underline{h}$ . Die effektive Handhabung erfordert jedoch die Begrenzung der Zahl der Parameter  $\underline{h}$  auf die Erfassung wesentlicher Effekte im Materialverhalten. Eine recht allgemeine Form für die Fließbedingung stellt unter diesem Gesichtspunkt eine Fließbedingung vom Typ „elliptischer Zylinder“ dar [3], [4]. Sie habe folgende Form:

$$f(\underline{g}, \underline{h}) = (\underline{\sigma} - \underline{a})^T \underline{A} (\underline{\sigma} - \underline{a}) - \sigma_F^2 = 0 \quad (2.19)$$

Diese Form enthält als Sonderfall die Fließbedingung nach VON MISES und ist mathematisch auch relativ einfach zu handhaben, da es keine singulären Punkte auf der Fließfläche gibt, die eine Sonderbehandlung erfordern. Diese Form erlaubt durch die Parameter  $\underline{a}$  die Erfassung einer kinematischen Verfestigung, durch die Fließspannung  $\sigma_F$  die Berücksichtigung einer isotropen Verfestigung sowie durch die Matrix  $\underline{A}$  die Erfassung isotroper und anisotroper Materialverfestigung.

Wegen der Aufspaltbarkeit der Verzerrungen (2.9) läßt sich auch die Steifigkeitsbeziehung in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen. Somit liefert die FE-Diskretisierung das folgende Differentialgleichungssystem

$$(\underline{K}^e - \underline{K}^p) \dot{\underline{v}} = \underline{\dot{f}} - \underline{\dot{f}}_T \quad (2.20)$$

das im Zusammenhang mit (2.7) zu lösen ist, wobei  $\underline{\dot{f}}_T$  die temperaturabhängigen Anteile enthält. Für die Realisierung der hier beschriebenen Strategie wurde ein Plastizitätsprozessor, der streng modular aufgebaut ist, erarbeitet. Durch die Definition von Schnittstellen wird die Implementierung von unterschiedlichen Lösungsverfahren sowie der Austausch von Materialverhalten beschreibenden Programmen ermöglicht.

### 2.2.3. Viskoplastisches Materialverhalten

Gegenüber der Elastoplastizität stellt das Deformationsgesetz in der Viskoplastizität eine Beziehung mit rheonomen Eigenschaften dar. Dies bedeutet, daß ausgehend von einer Grenzfläche (FB) im n-dimensionalen Spannungsraum das Material mit einer vom aktuellen Spannungszustand abhängigen Geschwindigkeit fließt. Die wichtigsten viskoplastischen Deformationsgesetze sind so formuliert, daß eine Abhängigkeit der Dehnungsgeschwindigkeit von der Spannungsgeschwindigkeit vorliegt. Betrachtet man einen isothermen Zustand, nimmt die Standardformulierung die konkrete Form

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{J}_E \dot{\underline{\sigma}} + \underline{b} \quad (2.21)$$

$$\dot{\underline{h}} = \underline{c} \quad (2.22)$$

an. Der interne Zustandsvektor  $\underline{h}$  reduziert sich in den meisten Anwendungsfällen auf eine skalare Größe, die die Verfestigung des Materials beschreibt. Die Matrix  $\underline{J}_E$  ist nur abhängig vom aktuellen Spannungszustand und kann ähnlich der für nichtlinear elastisches Materialverhalten gebildet werden. Die viskoplastischen Dehnungsgeschwindigkeitsanteile erhält man somit aus

$$\dot{\underline{\epsilon}}^{VP} = \underline{b}(\underline{g}, \underline{h}) \quad (2.23)$$

$$\dot{\underline{\epsilon}}^{VP} = \frac{3}{2\sigma_v} f(\sigma_v) \cdot g(\underline{h}) \underline{s} \quad (2.24)$$

$$\underline{h} = f(\sigma_v) \cdot g(\underline{h}) \quad (2.25)$$

$$\text{mit } f(\sigma_v) = \begin{cases} B \sigma_v^b \\ \dot{B} \sinh\left(\frac{\sigma_v}{b}\right) \end{cases}$$

$\underline{s}$  – Vektor der Deviatorspannungen

$\sigma_v$  – 2. Invariante des Spannungsdeviators

Für die Verfestigungsfunktion kann der Verlauf für

$$g(\underline{h}) = \begin{cases} h^\beta & \text{für } h < h_c \\ h_c^\beta & \text{für } h \geq h_c \end{cases} \quad (2.26)$$

mit  $\beta < 0$  angegeben werden.

### 3. Die Substrukturtechnik

Durch die Nutzung der Substrukturtechnik können geometrisch komplizierte Bauteile in einfach zu beschreibende Teilstrukturen zerlegt werden, für welche dann die Problemdaten gesondert bereitgestellt werden können. Besitzt ein FE-Programm dann noch einen Datengenerator mit einem umfangreichen Standardstrukturkatalog, sinkt der Bereitstellungsaufwand und die Fehleranfälligkeit der Daten des rechnerinternen Modells auf ein Minimum. Besondere Bedeutung erlangt das Substrukturkonzept aber auch bezüglich der oftmals sehr hohen Rechenzeiten bei komplexen Bauteilberechnungen. Die Möglichkeit einer Unterteilung in Substrukturen erlaubt eine schrittweise Abarbeitung des Problems in mehreren Rechnerläufen. Unter gegebenen Umständen können einzelne Substrukturen problemlos ausgetauscht werden, und gleichartige müssen nur einmal aufgebaut werden. Ein weiterer Vorteil der Substrukturtechnik zeigt sich darin, daß die Bandweiten der Teilstrukturen relativ einfach gering gehalten werden können, weil eine einfache Topologie eine optimale Numerierung erleichtert. Der gezielte Einsatz der Substrukturtechnik zur Behandlung nichtlinearer Prozesse kann wesentlich zu einer Erhöhung der Effektivität des Berechnungsablaufes beitragen.

Der erhöhte Berechnungsaufwand bei nichtlinearen Problemen entsteht vor allem durch die Abhängigkeit der Steifigkeitsmatrix von Feld- und Zustandsgrößen. Bei einer inkrementellen Vorgehensweise bedeutet dies den Neuaufbau der Steifigkeitsmatrix und deren anschließende Zerlegung zur Gleichungssystemlösung in jedem Inkrement. Verwendet man eine konstante Steifigkeitsmatrix, ergibt sich der höhere Aufwand dann durch den notwendigen Iterationsprozeß. Zur weiteren Erläuterung soll an dieser Stelle der Begriff der „örtlichen“ Nichtlinearität eingeführt werden. Darunter soll verstanden werden, daß die Gebiete mit nichtlinearen Eigenschaften begrenzte Bereiche der Gesamtstruktur darstellen. Während des gesamten Belastungsprozesses erfolgt keine Ausbreitung auf andere Strukturen. In solchen Fällen kann eine Substrukturierung unter dem Gesichtspunkt „lineare“ und „nicht-lineare“ Teilstrukturen vorgenommen werden. Wenn solch eine Einteilung gelingt, läuft der eigentliche nichtlineare Berechnungsprozeß nur für die Hyper-

struktur und die Substrukturen, die die nichtlinearen Bereiche enthalten, ab. Die Zustandsgrößen der anderen Strukturen werden erst nach Abarbeitung aller Zeit- oder Lastschritte durch Rückrechnung ermittelt. Ist eine eindeutige Lokalisierung zu Beginn der Rechnung nicht möglich, muß für jede Struktur in jedem Inkrement das Eintreten der nichtlinearen Effekte überprüft werden. Fällt der Test positiv aus, ist die entsprechende Substruktur in den „nichtlinearen Berechnungsprozeß“ einzugliedern. Diese Vorgehensweise besitzt gegenüber der Verwendung einer Gesamtstruktur Vorteile, solange sich noch einige Strukturen linear verhalten. Denkbar ist auch eine einmalige automatische Unterteilung anhand bestimmter Kriterien. Man könnte zum Beispiel für den Fall der Elastoplastizität die maximale Vergleichsspannung in den Teilstrukturen nach der elastischen Rechnung mit der Fließspannung vergleichen. Liegt dieser Wert einen bestimmten Prozentsatz unter der Fließgrenze, wird diese Struktur als „linear“ angesehen.

#### 4. Der Lösungsalgorithmus

Ausgehend von einer Standardformulierung führt die mathematische Modellierung der nichtlinearen Aufgabe auf ein Anfangs-Randwert-Problem für die unbekanntes Feldgrößen. Aus der Potentialformulierung für die Zeitableitungen der Feldgrößen entsteht das zu lösende Randwertproblem in Form eines algebraischen Gleichungssystems. Das Anfangswertproblem resultiert dann aus der Zeitabhängigkeit der Stoffgrößen im Deformationsgesetz. Numerisch kann die Lösung des Anfangs-Randwert-Problems in zwei getrennten Schritten erfolgen.

1. Lösen des linearen Gleichungssystems (Direkte Verfahren, iterative Verfahren)
2. Integration der zeitabhängigen Feldgrößen (Runge-Kutta-Verfahren, Euler-Cauchy-Verfahren)

Der größte numerische Aufwand steckt in der Lösung des Gleichungssystems, da die Abhängigkeit der Steifigkeitsmatrix von den Zustandsgrößen in jedem Schritt einen Neuaufbau dieser Matrix erforderlich macht. Aus diesem Grund wird sehr häufig anstelle der veränderlichen Steifigkeitsmatrix mit einer konstanten gerechnet, was natürlich einen Iterationsprozeß in jedem Schritt nach sich zieht. Nach [5] wird folgender Iterationszyklus vorgeschlagen:

1. Aufspaltung der Steifigkeitsmatrix in einen konstanten und veränderlichen Anteil

$$\underline{K}(\underline{z}) = \underline{K}_0 + \Delta \underline{K}(\underline{z}) \quad (2.27)$$

$\underline{z}$  – Vektor aller Zustandsgrößen

2. Iterationszyklus bis  $\dot{\underline{v}}^i$  und  $\dot{\underline{v}}^{i-1}$  bis auf einen zugelassenen Fehler übereinstimmen

$$\dot{\underline{v}}^i = \underline{K}_0^{-1} (\underline{f}(\underline{z}, t) - \Delta \underline{K}(\underline{z}) \dot{\underline{v}}^{i-1}) \quad (2.28)$$

$\dot{\underline{v}}$  – Vektor der Ableitungen der Feldgrößen

Die zur Lösung des Anfangswertproblems eingesetzten Algorithmen gehören zur Klasse der „step-by-step“-Integrationsverfahren. Die richtige Wahl der Zeitschrittlänge ist von entscheidender Bedeutung für die Genauigkeit der Ergebnisse bei diesen Lösungsmethoden.

Im internationalen Maßstab werden in Programmsystemen zur nichtlinearen Analyse vorwiegend inkrementell-iterative Lösungsstrategien angewendet. Speziell bei nichtlinearen, skleronomen Materialeigenschaften umgeht man die direkte Integration des Anfangswertproblems, indem der gesamte Belastungsverlauf in eine endliche Zahl von Lastschritten unterteilt wird und eine Lösung innerhalb des Inkrementes durch einen Iterationsprozeß ermittelt wird. Im wesentlichen verwendet man das Newton-Raphson-Verfahren in seinen Modifikationen oder entsprechende Quasi-Newton-Verfahren zur Iteration. Ausgehend von diesen Erfahrungen wurde für den Programmzweig COSAR/N vorerst diese Vorgehensweise realisiert.

#### 4.1. Newton-Raphson-Iterationsverfahren

Das Prinzip dieses Verfahrens besteht darin, innerhalb eines Lastinkrementes durch Veränderung des Steifigkeitsverhaltens und das Aufbringen von Zusatzlasten ein Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften herzustellen.

$$\underline{K}_T^i \Delta \underline{v}^k = \underline{f}_{ex}^{i+1} - \underline{f}_{IN}^k \quad (2.29)$$

$$\underline{v}^{i+1} = \underline{v}^i + \sum_{k=1}^m \Delta \underline{v}^k \quad (2.30)$$

$\underline{K}_T^i$  – Tangentensteifigkeitsmatrix im Inkrement  $i$

$\Delta \underline{v}^k$  – Verschiebungszustand im  $k$ -ten Iterationszyklus

$\underline{f}_{ex}^{i+1}$  – Lastvektor für das  $(i+1)$ -te Inkrement

$\underline{f}_{IN}^k$  – nichtausbalancierter Restkraftvektor des  $k$ -ten Iterationsschrittes

In der Anwendung unterscheidet man zwischen dem Standard-Newton-Raphson-Verfahren und dem modifizierten Verfahren. Beim Standardverfahren paßt man die Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationszyklus der erreichten Zwischenlage an. Durch die Aufstellung und Invertierung der Tangentensteifigkeitsmatrix in jedem Iterationszyklus wird dieses Verfahren sehr aufwendig. Hinsichtlich dreidimensionaler Finite-Element-Rechnungen erscheint es bei den Operationengeschwindigkeiten der heute im Normalbetrieb zur Verfügung stehenden Computer fraglich, dieses Verfahren mit vertretbarem Aufwand anzuwenden. Einen Kompromiß, der aber mit geringerer Konvergenzgeschwindigkeit erkauft wird, stellt das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren dar. Bei dieser Vorgehensweise berücksichtigt man die Nichtlinearitäten nur über die nichtausbalancierten Gleichgewichtskräfte. Die Steifigkeitsmatrix bleibt während der Iteration innerhalb eines Lastinkrementes konstant. Bei guter Konvergenz dieses Verfahrens, das

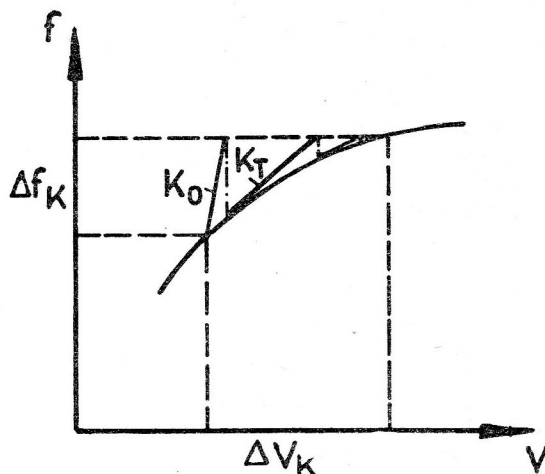
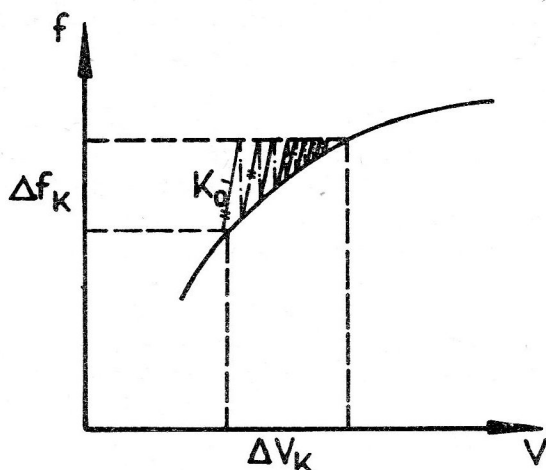


Bild 2  
Modifiziertes und Standard-Newton-Raphson-Verfahren

heißt bei schwachen Nichtlinearitäten, kann auch mit einer konstanten Steifigkeitsmatrix über mehrere Lastschritte gerechnet werden.

#### 4.2. BFGS-Methode

Dieses zur Klasse der Quasi-Newton-Verfahren gehörende Schema gewinnt in letzter Zeit als Alternative zu den Newton-Raphson-Verfahren an Bedeutung. Der wesentliche Vorteil den Newton-Raphson-Verfahren gegenüber besteht darin, daß in jedem Iterationsschritt sofort die invertierte Steifigkeitsmatrix aufgebaut werden kann. Die eigentliche Steifigkeitsmatrix muß nur zu Beginn der Rechnung aufgebaut und invertiert werden. Nach [6] ergeben sich folgende Beziehungen für den Iterationszyklus:

$$\underline{\delta}^i = \underline{v}^i - \underline{v}^{i-1} \quad (2.31)$$

$i$  – Iterationsschritt

$\underline{v}^i$  – Verschiebung des  $i$ -ten Iterationsschrittes

$$\underline{\kappa}^i = \Delta \underline{f}_R^{i-1} - \Delta \underline{f}_R^i \quad (2.32)$$

In jedem Iterationsschritt muß das Gleichgewicht

$$\underline{K}^i \underline{\delta}^i = \underline{\kappa}^i \quad (2.33)$$

erfüllt sein.

Der Iterationsprozeß besteht aus den nachfolgenden Arbeitsschritten:

1. Berechnung des Verschiebungsincrementenvektors

$$\Delta \underline{v} = (\underline{K}^{i-1})^{-1} \Delta \underline{f}_R^{i-1} \quad (2.34)$$

$$\underline{v}^i = \underline{v}^{i-1} + \beta \Delta \underline{v} \quad (2.35)$$

2. Bestimmung des Skalars  $\beta$  in einem sogenannten „line-search“-Prozeß, so daß das Produkt

$$\Delta \underline{v}^T \Delta \underline{f}_R^i = 0 \quad (2.36)$$

wird.

#### 3. Veränderung der inversen Steifigkeitsmatrix

$$(\underline{K}^i)^{-1} = (\underline{A}^i)^T (\underline{K}^{i-1})^{-1} \underline{A}^i \quad (2.37)$$

mit

$$\underline{A}^i = \underline{I} + \underline{v}^i + (\underline{w}^i)^T$$

$\underline{I}$  – Einheitsmatrix

$$\underline{v}^i = \left[ \frac{(\underline{\delta}^i)^T \underline{\kappa}^i}{(\underline{\delta}^i)^T \underline{K}^{i-1} \underline{\delta}^i} \right] \frac{1}{2} \underline{K}^{i-1} \underline{\delta}^i - \underline{\kappa}^i \quad (2.38)$$

$$\underline{w}^i = \frac{\underline{\delta}^i}{(\underline{\delta}^i)^T \underline{\kappa}^i} \quad (2.39)$$

Ein zentrales Problem in diesem Zyklus stellt der „line-search“-Prozeß dar. Eine Möglichkeit ergibt sich aus einer linearen Interpolation von  $\beta$  nach jedem iterativen Schritt in der Form

$$\beta^{i+1} = \beta^i - \frac{\Delta \underline{v}^T \Delta \underline{f}_R^i (\beta^i - \beta^{i-1})}{\Delta \underline{v}^T (\Delta \underline{f}_R^i - \Delta \underline{f}_R^{i-1})} \quad (2.40)$$

#### 4.3. Konvergenzbeschleunigung

Durch den Einsatz von Beschleunigungsverfahren versucht man, eine verbesserte Konvergenzgeschwindigkeit während der Iteration innerhalb eines Lastinkrementes zu erreichen. Die Konvergenzgeschwindigkeit innerhalb des Iterationszyklus verschlechtert sich immer dann, wenn es zu einer starken Ausbreitung der nichtlinearen Bereiche bezüglich der Gesamtstruktur kommt. Diese Algorithmen finden vorrangig Anwendung im Zusammenhang mit dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren. Aus der großen Zahl von solchen Beziehungen seien an dieser Stelle nur die  $\alpha$ -Beschleunigungsalgorithmen erwähnt. Anhand der einfachsten Form, der AITKEN-Beschleunigung, soll das Prinzip vorgestellt werden.

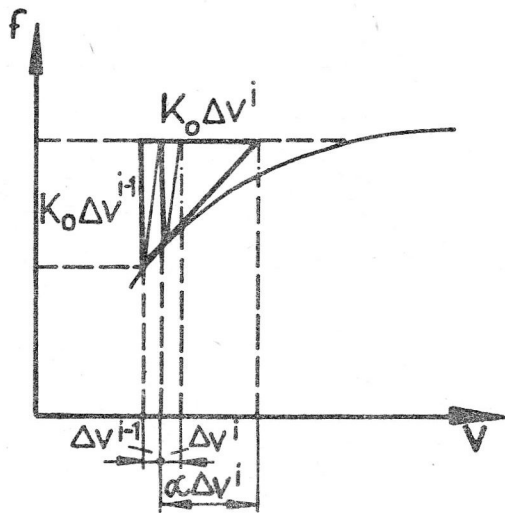


Bild 3  
AITKEN – Beschleunigung

Innerhalb eines Iterationszyklus wird versucht, durch eine Überrelaxation einen verbesserten Verschiebungswert in folgender Form zu ermitteln:

$$\underline{v}^i = \underline{v}^{i-1} + \underline{\alpha}^{i-1} \Delta \underline{v}^i \quad (2.41)$$

$\underline{\alpha}^{i-1}$  stellt eine Diagonalmatrix dar, deren Elemente sich aus dem im Bild 3 stark umrandeten Dreieck mit Hilfe des Strahlensatzes ableiten lassen

$$\frac{\underline{K} \Delta \underline{v}_k^{i-1}}{\underline{K} \Delta \underline{v}_k^i} = \frac{\Delta \underline{v}_k^{i-1} + \underline{\alpha}_k^i \Delta \underline{v}_k^i}{\underline{\alpha}_k^i \Delta \underline{v}_k^i} \quad (2.42)$$

$$\underline{\alpha}_k^i = \frac{\Delta \underline{v}_k^{i-1}}{\Delta \underline{v}_k^{i-1} - \Delta \underline{v}_k^i} \quad (2.43)$$

## 5. Transiente Vorgänge

Die Einbeziehung dynamischer Beanspruchungen in Bauteiluntersuchungen spielt im zunehmenden Maße eine große Rolle. Durch die vorgesehene Konzeption von COSAR/N wird es möglich, transiente Vorgänge mit Nichtlinearitäten zu lösen. Ausgangspunkt ist das Schwingungsdifferentialgleichungssystem:

$$\underline{M} \ddot{\underline{v}} + \underline{C} \dot{\underline{v}} + \underline{K} \underline{v} = \underline{f}_t \quad (2.44)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{\underline{v}}(t = t_0) = \dot{\underline{v}}_0; \quad \underline{v}(t = t_0) = \underline{v}_0 \quad (2.45)$$

$\underline{M}$  – Massenmatrix

$\underline{C}$  – Dämpfungsmatrix

$\underline{K}$  – Steifigkeitsmatrix

$\underline{v}$  – verallgemeinerte Verschiebungen

$\underline{f}_t$  – zeitabhängiger Kraftvektor

Die Erweiterung der statischen Gleichungsbeziehung um den Beschleunigungs- und Dämpfungsanteil erfordert

statt eines Gleichungssystemlösers Verfahren zur numerischen Integration des Differentialgleichungssystems. Bei den nichtlinearen Problemen bieten sich direkte Verfahren zur Lösung an, die in Form der „step-by-step“-Integration die Feldgrößen und deren erste Ableitungen zu diskreten Zeitpunkten ermitteln. Dazu können explizite oder implizite Verfahren eingesetzt werden. Zur Berücksichtigung nichtlinearer Effekte wird jeder Zeitschritt als quasistatischer Zustand betrachtet und dann darin iteriert. Unter dem Gesichtspunkt des numerischen Aufwandes scheiden bei den augenblicklichen Rechengeschwindigkeiten der vorhandenen Rechenanlagen für umfangreiche Probleme die expliziten Verfahren aus. Aufgrund der bedingten numerischen Stabilität dieser Algorithmen ergeben sich sehr kleine Schrittweiten oder anders formuliert, zur Ermittlung der Bewegungsverläufe in einem bestimmten Zeitraum sind sehr viele Iterationsschritte notwendig. Wenn man dann noch bedenkt, daß jetzt in jedem Zeitschritt die Steifigkeitsmatrix geändert wird oder sich ein Iterationszyklus anschließt, erkennt man den enormen Berechnungsaufwand. Weitaus günstiger erweisen sich in dieser Hinsicht die impliziten Methoden, die unbedingt stabil arbeiten. Dies bedeutet, das man den strengen Restriktionen wie bei den expliziten Verfahren nicht ausgesetzt ist. Die Größe der Schrittweite richtet sich nur nach den Genauigkeitsansprüchen des Nutzers an die Ergebnisse. Aus diesem Grund werden für einen dynamischen Programmzweig innerhalb von COSAR/N hauptsächlich implizite Verfahren implementiert.

## 6. Abschließende Betrachtungen

Im Abschnitt 2.1 wurde darauf hingewiesen, daß eine bestimmte Anzahl von Entscheidungshilfen und automatische Ablaufsteuerungen notwendig sind, um solch einen nichtlinearen Programmzweig einem großen Nutzerkreis zugänglich zu machen. Gegenstand solcher Untersuchungen sind vor allem automatische Lastschrittsteuerungen, automatisches Ein- und Ausschalten von Beschleunigungsalgorithmen, selbständiges Erkennen, wann die Steifigkeitsmatrix verändert werden muß usw. Zu diesem Problemkreis gibt es in der Literatur sehr viele Hinweise, die aber oftmals nur für spezielle Problemklassen anwendbar sind.

## LITERATUR

- [1] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung des Anfangs-Randwertproblems. ZAMM 58 (489 – 499) 1978.
- [2] Kauderer, H.: Nichtlineare Mechanik. Springer-Verlag Berlin 1958.
- [3] Koczyk, S.: Die Kontinuumstheorie der Plastizität. TH Magdeburg, 1978, Dissertation B.
- [4] Korneev, V., Langer, U.: Approximate solution of plastic flow problems. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1984.
- [5] Bergander, H.: Einheitliches Konzept der Gleichungen des nichtlinear inelastischen Materialverhaltens für FEM-Programmentwicklungen. Vorträge zum Problemseminar Finite Elemente II, TU Dresden, Heft 5 (206 – 225), 1977.

- [ 6 ] Bathe, K.J.: Finite element procedures in engineering analysis. Prentice Hall Book Company Inc., 1982.
- [ 7 ] Altenbach, J., Gabbert, U.: Das universelle Finite-Elemente-Programmsystem COSAR – Gegenwärtiger Stand und Entwicklungstendenzen. Technische Mechanik, 9(1988) Heft 1.
- [ 8 ] Gabbert, U., Koepe, H., Baumgarten, H., Lenz, W.: Nichtlineare Berechnungsstrategien im universellen FEM-Programmsystem COSAR. XI. IKM, Berichte 2, Weimar 1987.
- [ 9 ] Koepe, H., Lenz, W.: Konzeption für die Behandlung nichtlinearer Probleme mittels der FEM im Rahmen des COSAR-Konzeptes. Forschungsbericht (unveröffentlicht), 1986.
- [10] Koepe, H., Lenz, W.: Die Erweiterung des Programmsystems COSAR zur Berechnung nichtlinearer Problemstellungen der Festkörpermechanik. Tagung Festkörpermechanik, 30. August – 2. September 1988. VEB Fachbuchverlag Leipzig, Band A.

**Anschrift der Verfasser:**

Dr.-Ing. Heinz Köppe  
Dr.-Ing. Wolfgang Lenz  
Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach  
Technische Universität „Otto von Guericke“  
Sektion Maschinenbau  
PSF 124  
Magdeburg  
3 0 1 0