

Zur Lösung ebener und räumlicher, geometrisch nichtlinearer Aufgaben mit Hilfe der Methode der finiten Elemente bei elastisch-plastischen Materialgesetzen mit kinematisch-isotroper Verfestigung

Justin Murin, Martin Dutko, Holm Altenbach

1. Einleitung

Bei der Spannungs- und Deformationsanalyse im Körper mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ist die Auswahl geeigneter Elemente von besonderer Bedeutung. Hierbei ist zwischen dicken und dünnen Körpern zu unterscheiden. Für dünne Körper haben sich degenerierte Elemente durchgesetzt (vgl. z. B. [1], [2]). Für dicke, massive Körper werden die bekannten 8- bis 21-Knoten-Vollkörperelemente verwendet, falls keine Vereinfachungen durch ebene oder axialsymmetrische Modellierungen möglich sind.

Das FEM Programmsystem „NEANKO“ [3] wurde für zwei- und dreidimensionale Aufgaben entwickelt. Dabei wurde ein elastisch-plastisches Materialgesetz mit Verfestigung implementiert, wobei zunächst kleine Verzerrungen und kleine Verschiebungen vorausgesetzt wurden [4]. Nachfolgend wurde entsprechend [5], [6] für die Lösung geometrisch nichtlinearer Aufgaben die totale (TL) und die mitgehende (UL) Lagrangesche Formulierung für das 8- bis 21-Knoten-Vollkörperelement implementiert.

Im Beitrag werden Konstitutivgleichungen für physikalische Nichtlinearität mit kinematisch-isotroper Verfestigung eingeführt. Deren Einbau in das Programmsystem NEANKO gestattet die Lösung zwei- und dreidimensionaler nichtlinearer Aufgaben, wobei große Verschiebungen und Drehungen bei jedoch kleinen Verzerrungen vorausgesetzt werden.

2. Grundgleichungen

Folgende Aussagen müssen die Grundgleichungen zur Beschreibung linearer oder nichtlinearer Deformationsprozesse enthalten:

- Kinematik der Bewegung (Beschreibung des Deformationsprozesses durch das Verschiebungsfeld, Verzerrungsmaße, die den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen angeben, usw.)
- Kinetik der Bewegung (Bewegungsgleichungen des Kontinuums, Spannungstensoren, Spannungsgeschwindigkeiten)
- Thermodynamik des Deformationsprozesses (u. a. Ableitung eines Variationsprinzips)
- Konstitutivgleichungen (Beziehungen zwischen kinematischen, kinetischen und thermodynamischen Variablen des Deformationsprozesses)

2.1. Kinematik

Zur Beschreibung der Bewegung wird in der Festkörpermechanik üblicherweise die Lagrangesche Betrachtungsweise angewendet. Dabei werden alle Größen auf die Anfangskonfiguration bezogen, die in den meisten Fällen bekannt ist. Auf Bild 1 sind neben der Ausgangskonfiguration 0K zwei weitere Konfigurationen dargestellt:

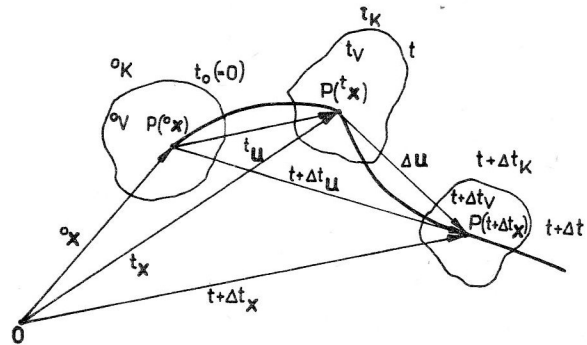


Bild 1
Bewegung des Kontinuums

die vorangehenden Konfiguration tK und die momentane Konfiguration ${}^{t+\Delta t}K$. Die 3 Konfigurationen entsprechen folgenden Zeitpunkten t_0 meist $t_0 = 0$), t und $t + \Delta t$ (Δt ist der Zuwachs der Zeit). Die kinematischen Größen werden auf 0K bezogen, was der (TL)-Formulierung entspricht. Für den Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor gilt [7]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{E} = {}^t\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E} = 1/2 [(1 + \nabla^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T \cdot (1 + \nabla^t\mathbf{u}) - 1] \quad (1)$$

Dabei bedeuten:

- ∇ – Nabla-Operator (Ableitungen bezüglich der Koordinaten der Anfangskonfiguration),
- ${}^{t+\Delta t}\mathbf{E}$ – Verzerrungstensor für den Momentanzustand, wobei sich dieser aus dem Verzerrungstensor im vorangegangenen Zustand ${}^t\mathbf{E}$ und dem Zuwachs $\Delta\mathbf{E}$ zusammensetzt,
- ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ – Verschiebungsvektor, der den Abstand zwischen einem Punkt in der vorangehenden Konfiguration und dem gleichen Punkt in der momentanen Konfiguration angibt sowie
- $\mathbf{1}$ – Einheitstensor.

Weitere kinematische Größen können Bild 1 entnommen werden. Die Zeit t kann als Parameter ohne physikalische Bedeutung aufgefaßt werden. Die gewählten Bezeichnungen entsprechen der Standardliteratur (vgl. z. B. [7] bis [9]), die verwendeten Regeln der Tensorrechnung können beispielsweise [8] und [10] entnommen werden.

2.2. Kinetik

Die in den Grundgleichungen auftretenden Variablen müssen den Bedingungen von Symmetrie und Objektivität genügen. Außerdem müssen sie im Hillschen Sinne arbeitskonjugiert sein [8], [9], [11], [12]. Die arbeitskonjugierte Tensorgröße zum Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor ist der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor

$${}^{t+\Delta t}S = {}^tS + \Delta S$$

Dabei ist:

- ${}^{t+\Delta t}S$ — 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor in der momentanen Konfiguration,
- tS — der entsprechende Tensor in der vorangehenden Konfiguration und
- ΔS — sein Zuwachs im Zeitschritt Δt .

S hat keine physikalische Bedeutung, diese besitzt jedoch der Cauchysche Spannungstensor T . Der Zusammenhang zwischen den Spannungstensoren läßt sich wie folgt angeben [8]

$${}^{t+\Delta t}T = ({}^{t+\Delta t}\rho / {}^0\rho) F \cdot {}^{t+\Delta t}S \cdot F^T \quad (2)$$

Hierbei bedeuten:

- ${}^{t+\Delta t}\rho, {}^0\rho$ — Massendichte in ${}^{t+\Delta t}K$ bzw. 0K und
- F — Deformationsgradient ($F = \nabla {}^{t+\Delta t}X$).

2.3. Thermodynamik

In dieser Arbeit werden ausschließlich isotherme Prozesse betrachtet, so daß sich die entsprechenden thermodynamischen Ausführungen (vgl. z. B. [10]) auf die Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen reduzieren. Das Gleichgewicht des Körpers zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ läßt sich wie folgt angeben [9]:

$$\int_{{}^0V} ({}^tS + \Delta S) \cdot \delta ({}^tE + \Delta E) d^0V = {}^{t+\Delta t}R \quad (3)$$

${}^{t+\Delta t}R$ stellt die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte dar und kennzeichnet die Variation. Da mit dem Green-Lagrangeschen Tensor ein Verzerrungstensor für kleine Verzerrungen eingeführt wurde, bleiben die weiteren Ausführungen auf kleine Verzerrungen beschränkt (trotzdem können große Verschiebungen und Drehungen betrachtet werden).

2.4. Konstitutivgleichungen

Im Falle hypoelastischen Materials werden die Spannungskremente aus den Verzerrungskrementen berechnet [9]

$$\dot{S} = ({}^4L) \cdot \dot{E} \quad (4)$$

Dabei sei $({}^4L)$ ein Tensor 4. Stufe, der die Materialeigenschaften kennzeichnet (bezogen auf 0K). Für den Sonderfall elastisch-isotropen Materials enthält dieser Tensor die Laméschen Konstanten. Die Äquivalenz der Konstitutivgl. (4) zum Hookeschen Gesetz bei infinitesimalen Verschiebungen ist offensichtlich. Diese Tatsache ergibt sich aus der Verwendung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors und des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors, da hiermit der Spannungszustand invariant gegenüber Starrkörperbewegungen ist. Eine Konsequenz daraus ist, daß jede Materialbeschreibung, die für infinitesimale Verschiebungen und unter Verwendung der klassischen Spannungs- und Verzerrungstensoren aufgestellt wurde, direkt in Berechnungen bei großen Verschiebungen und Drehungen, aber kleinen Verzerrungen benutzt werden kann. Einzige Bedingung ist die Verwendung der 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen und der Green-Lagrangeschen Verzerrungen [9]. Nachfolgend wird dies auf das elastisch-plastische Materialgesetz angewendet.

Im Rahmen des in dieser Arbeit analysierten Materialgesetzes wird von einem Materialmodell mit kinematisch-isotroper Verfestigung ausgegangen. Die Plastizitätsbedingung läßt sich in diesem Fall wie folgt beschreiben [14]:

$$F(S, a, k) = f(S - a) - k(\beta, \int \dot{E}_p) = 0 \quad (5)$$

Die Plastizitätsbedingung erfährt eine Verschiebung und Aufweitung, jedoch keine Gestaltänderung (Bild 2). $a = a(S)$ ist der Verschiebungstensor, der die Verschiebung des Zentrums der Plastizitätsbedingung zur Zeit t bezüglich 0K angibt. k bestimmt die Größe der Plastizitätsbedingung in Abhängigkeit von der plastischen Verzerrung in der Form des Odqist-Parameters. β ist der Parameter der gemischten Verfestigung, der den idealen Bauschingereffekt wiedergibt ($\beta = 1$ — rein-isotrope

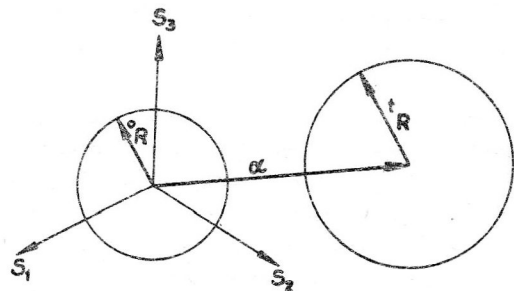


Bild 2
Plastizitätsbedingung im Oktaederraum bei kinematisch-isotroper Verfestigung (Translation — Beschreibung durch den Verschiebungstensor a , Aufweitung — Beschreibung durch die Funktion k)

Verfestigung, $\beta = 0$ – rein-kinematische Verfestigung). Die skalare Größe \dot{E}_P läßt sich aus den Geschwindigkeiten der plastischen Verzerrungen \dot{E}^P wie folgt bestimmen:

$$\dot{E}_P = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{E}^P \cdot \dot{E}^P}$$

Die Bedingung der plastischen Belastung (der Endpunkt des Spannungstensors liegt bei plastischer Belastung auf der Plastizitätsfläche) ist das totale Differential der Plastizitätsfunktion $dF = 0$. Unter Beachtung von (5) erhält man damit

$$\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} - \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{a} - dk = 0 \quad (6)$$

Mit \dot{S} und \dot{a} werden entsprechend der Zuwachs des Spannungstensors bzw. des Verschiebungstensors im Zeitinkrement Δt bezeichnet. dk stellt eine Veränderung der Plastizitätsfläche dar. Diese kann wie folgt ausgedrückt werden

$$dk = \beta k,$$

so daß Gl. (6) in folgende Gl. übergeht

$$\frac{\partial f}{\partial S} \cdot (\dot{S} - \dot{a}) = \beta k \quad (7)$$

Weiterhin wird vorausgesetzt, daß der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten werden kann

$$E = E^E + E^P$$

Folglich lassen sich die plastischen Verzerrungsinkremente mit dem assoziierten Fließgesetz (Prandtl-Reuss-Gesetz) angeben

$$E^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial S}$$

$\dot{\lambda}$ ist ein zu bestimmendes Skalar ($\dot{\lambda} \geq 0$) und stellt eine Funktion der Belastungsparameter dar.

Der Zuwachs des Verschiebungstensors \dot{a} kann entweder nach der Pragerschen Regel bzw. der Zieglerschen Modifikation angegeben werden [15], [16]. Die Zieglersche Modifikation ist deshalb besonders günstig, da sie gegenüber Dimensionsänderungen der Aufgabe invariant ist. Sie hat die Form

$$\dot{a} = \dot{\mu} (S - a)$$

Die skalare Funktion $\dot{\mu}$ erhält man durch Einsetzen von Gl. (9) in Gl. (7)

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \dot{S} - \beta k}{\frac{\partial f}{\partial S} \cdot (S - a)} \quad (10)$$

Den Zuwachs des Spannungstensors \dot{S} kann man mit Hilfe der Fließregel (8) ausdrücken

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (4)L^E \cdot \dot{E}^E = (4)L^E \cdot (\dot{E} - \dot{E}^P) = \\ &= (4)L^E \cdot (\dot{E} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial S}) \end{aligned} \quad (11)$$

Dabei ist $(4)L^E$ der Materialtensor der elastischen Konstanten. Die skalare Funktion erhält man entsprechend der Zieglerschen Modifikation [15] bis [17]. D. h. für eine Plastizitätsbedingung ohne singuläre Punkte sind die Projektionen des Spannungstensorinkrements und des plastischen Verzerrungstensorinkrements auf die äußere Normale zur Plastizitätsbedingung einander proportional (Bild 3)

$$(\dot{S} - c \dot{E}^P) \cdot \frac{\partial f}{\partial S} = 0 \quad (12)$$

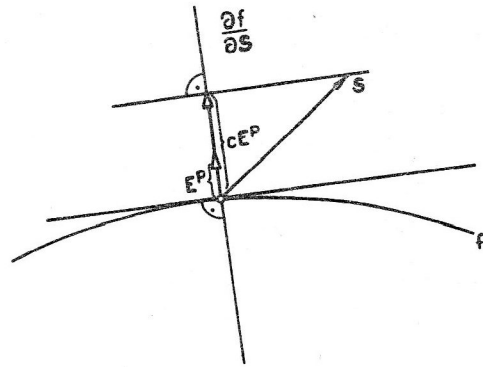


Bild 3
Erläuterung von Gl. (12)

Gl. (12) ist eigentlich eine Bedingung der plastischen Belastung für rein-kinematische Verfestigung nach Prager ($\beta = 0$ – Ziegler ging bei Einführung dieser Bedingung vom Pragerschen Verfestigungsmodell aus). Durch Einsetzen der Gln. (8) und (11) in Gl. (12) erhält man

$$\dot{\lambda} = \frac{(4)L^E \cdot \dot{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial S}}{(4)L^E \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + c \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \frac{\partial f}{\partial S}} \quad (13)$$

Unter Berücksichtigung der Gln. (12) und (13) ergibt sich für den Zuwachs des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\dot{S} = (4)L^{EP} \cdot \dot{E}, \quad (14)$$

wobei $(4)L^{EP}$ ein vierstufiger Materialtensor ist. Dieser berücksichtigt die Verfestigung und hat die Form

$$(4)L^{EP} = (4)L^E - \frac{(4)L^E \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \frac{\partial f}{\partial S} \cdot (4)L^E}{(4)L^E \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + c \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \frac{\partial f}{\partial S}} \quad (15)$$

Der Parameter c wird durch Einsetzen des Fließgesetzes (8) in Gl. (12) bestimmt

$$c = \frac{\dot{S} \cdot \dot{E}^P}{\dot{E}^P \cdot \dot{E}^P} = \sqrt{2/3} \frac{\dot{S} \cdot \dot{E}^P}{E_P} \quad (16)$$

Da die konstitutiven Gln. auch für den einachsigen Fall gilt, erhält man für die Konstante c folgenden Wert [15], [18]:

$$c = 2/3 H$$

mit H als Verfestigungsparameter aus dem einachsigen Versuch.

Die konkrete Form des Tensors ${}^{(4)}L^{EP}$ erhält man nach Einführung von Plastizitätsbedingungen. Die von-Mises-Bedingung lautet für das eingeführte Verfestigungsmodell

$$F = 3/2 (S^D - a^D) \cdot (S^D - a^D) - \sigma_Y^2 = 0 \quad (17)$$

mit S^D als Spannungstensor,

a^D Verschiebung der Plastizitätsfläche in der Ebenen des Spannungstensors und

σ_Y als Fließgrenze zur Zeit t .

Nach Einsetzen von Gl. (17) in Gl. (15) erhält man den konkreten Ausdruck für den Materialtensor

$${}^{(4)}L^{EP} = {}^{(4)}L^E - \frac{9G^2 (S^D - a^D) \cdot (S^D - a^D)}{\sigma_Y^2 (3G + H)} \quad (18)$$

Mit Gl. (18) erhält man aus der Konstitutivgl. (14) die Spannungszuwächse. Zur Kontrolle der Erfüllung der Plastizitätsbedingung ist es notwendig, die Zuwächse des Verschiebungstensors für die Plastizitätsbedingung zu ermitteln. Diese erhält man durch Einsetzen von Gl. (17) in Gl. (10) und Gl. (9). Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$\dot{a}^D = (3/2 \sigma_Y^2) (1 - \beta) (S^D - a^D) (S^D - a^D) \cdot \dot{S} \quad (19)$$

3. Matrizen-Formulierung

Um die eingeführten Beziehungen in ein FEM-Programm zu implementieren, werden die Tensorgleichungen in Matrizen-Gleichungen überführt. Die konstitutive Gl. (14) geht damit in folgende Form

$$\Delta S = C^{EP} \Delta E \quad (20)$$

über, wobei ΔS und ΔE die Matrizen der Zuwächse des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors bzw. des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors sind (vgl. z. B. [11]) sind. Der elastoplastische Operator nach der von-Mises-Bedingung hat die auf Bild 4 gezeigte Struktur, wobei λ , μ^* die Laméschen Konstanten sind, und es gilt

$$A = \frac{9G^2}{\sigma_Y^2 (3G + H)} \quad (22)$$

$$C^{EP} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu^* A \bar{E}_{11}^D \bar{E}_{11}^D & \lambda - A \bar{E}_{11}^D \bar{E}_{22}^D & \lambda - A \bar{E}_{11}^D \bar{E}_{33}^D & -A \bar{E}_{11}^D \bar{E}_{12}^D & -A \bar{E}_{11}^D \bar{E}_{23}^D & -A \bar{E}_{11}^D \bar{E}_{13}^D \\ \lambda + 2\mu^* A \bar{E}_{22}^D \bar{E}_{22}^D & \lambda - A \bar{E}_{22}^D \bar{E}_{33}^D & -A \bar{E}_{22}^D \bar{E}_{12}^D & -A \bar{E}_{22}^D \bar{E}_{23}^D & -A \bar{E}_{22}^D \bar{E}_{13}^D & \\ \lambda + 2\mu^* A \bar{E}_{33}^D \bar{E}_{33}^D & -A \bar{E}_{33}^D \bar{E}_{12}^D & -A \bar{E}_{33}^D \bar{E}_{23}^D & -A \bar{E}_{33}^D \bar{E}_{13}^D & & \\ \text{SYM.} & \mu^* A \bar{E}_{12}^D \bar{E}_{12}^D & -A \bar{E}_{12}^D \bar{E}_{23}^D & -A \bar{E}_{12}^D \bar{E}_{13}^D & & \\ & -\mu^* A \bar{E}_{23}^D \bar{E}_{23}^D & -A \bar{E}_{23}^D \bar{E}_{13}^D & & & \\ & & \mu^* A \bar{E}_{13}^D \bar{E}_{13}^D & & & \end{bmatrix} \quad (21)$$

Bild 4
Elastoplastischer Operator bei von-Mises-Bedingung

Die Terme des reduzierten Deviators des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors kann man wie folgt schreiben

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_{11}^D - a_{11}^D & S_{12}^D - a_{12}^D & S_{13}^D - a_{13}^D \\ & S_{22}^D - a_{22}^D & S_{23}^D - a_{23}^D \\ \text{SYM} & & S_{33}^D - a_{33}^D \end{bmatrix} \quad (23)$$

Die Beziehungen für den Zuwachs des Verschiebungstensors der Plastizitätsfläche (19) lauten in Matrixschreibweise

$$\Delta a = \frac{3(1 - \beta)}{2 \sigma_Y^2} S_S \begin{bmatrix} \bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

dabei ist 0 eine Null-Submatrix und S_S ein Skalarprodukt

$$S_S = \bar{S}^T \Delta S \quad (25)$$

4. Testrechnungen

Um die Richtigkeit der Implementierung der eingeführten Beziehungen in das Programmsystem NEANKO zu prüfen, wurden 3 Testrechnungen durchgeführt.

Das erste Beispiel bezieht sich auf einen dünnen Streifen (Bild 5) unter gleichmäßiger Belastung. Das Berech-

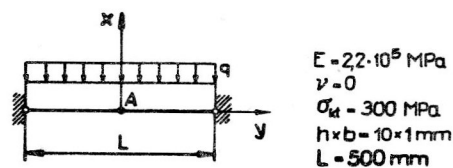


Bild 5
Beispiel 1 – dünner Streifen

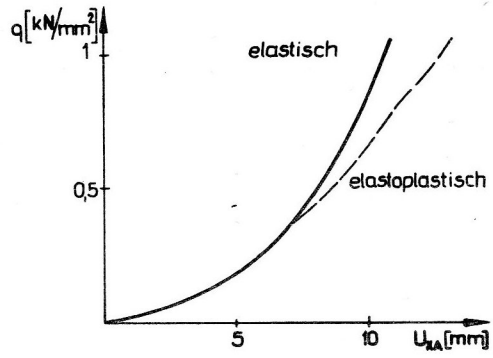


Bild 6
Durchsenkungen in der Mitte des Streifens

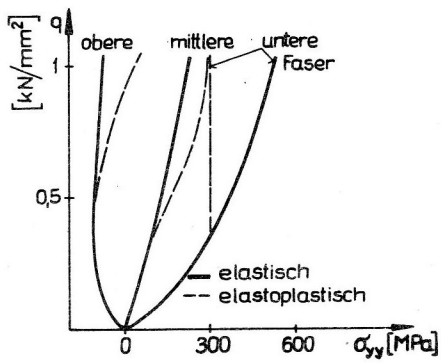


Bild 7
Spannungsverläufe in der Mitte des Streifens

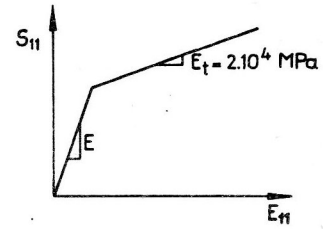


Bild 8
Erläuterung zum Parameter der gemischten Verfestigung

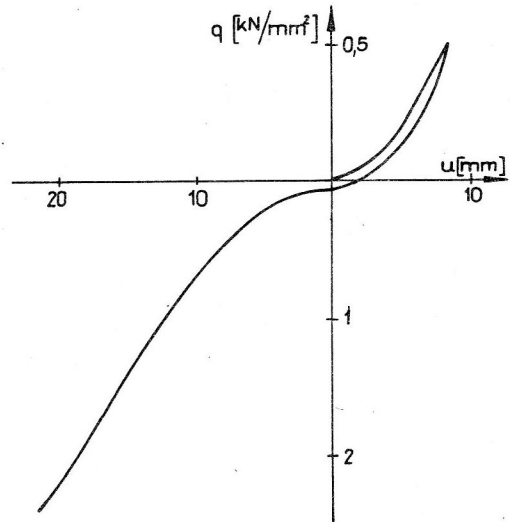


Bild 9
Durchbiegungen bei gemischter Verfestigung

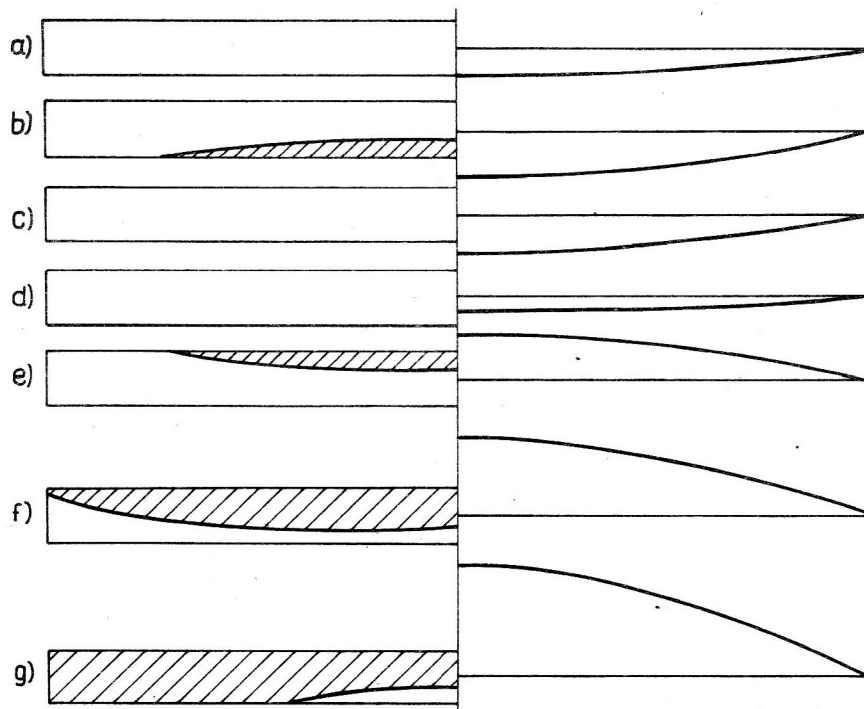


Bild 10
Ausbreitung der plastischen Zone und Durchbiegungslinie

nungsmodell besteht aus fünf räumlichen Vollkörperelementen. Aufgrund der Symmetrie wurde nur die Hälfte des Streifens vernetzt und gerechnet. Zur Beurteilung des Einflusses der Plastizität bei geometrischer Nichtlinearität wurde eine elastische und eine elastisch-plastische (ohne Verfestigung) Rechnung durchgeführt. Auf Bild 6 ist der Verlauf der Durchsenkungen in der Mitte des Streifens dargestellt. Im Bild 7 sind die Spannungen an der gleichen Stelle aufgetragen. Die Ergebnisse stimmen gut mit den in [19] angeführten überein. Der Einfluß des Parameters der gemischten Verfestigung wurde am gleichen Beispiel untersucht (Bild 8). Für diesen Parameter wurde das Intervall $(-1; 1)$ gewählt. Im Bild 9 ist der Verlauf der Durchbiegung in der Mitte des Streifens angegeben. Im Bild 10 ist die Ausbreitung der plastischen Zone und die entsprechende Durchbiegungslinie in Abhängigkeit von der Belastung zu sehen. Der Einfluß des Parameters β auf die gesamte Durchbiegung des Streifens kann leider nicht vollständig beurteilt werden, da die plastifizierte Zone bei Belastung und anschließender Entlastung klein ist – Bild 10g. Daher hat sich der Einfluß des Parameters nur lokal ausgewirkt. In einer kleinen Zone hat sich die Fließgrenze verändert. Die Wahl solcher Belastungen, die große Plastifizierungen hervorrufen würden und damit einen deutlichen Einfluß des Parameters zeigen, ist nur nach Überschreiten durch die lokalen Extrema in der Belastungs-Durchbiegungs-Kurve möglich. Die eingesetzten Verfahren (Newton-Raphson, Newton) gestatten nicht die Lösung des entsprechenden Problems.

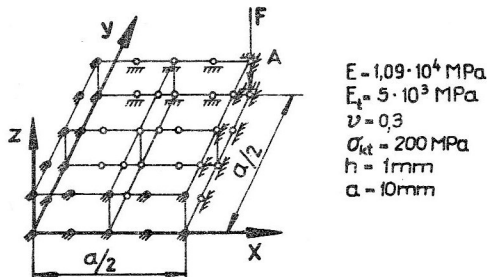


Bild 11
Beispiel 2 – Viertel einer Quadratplatte

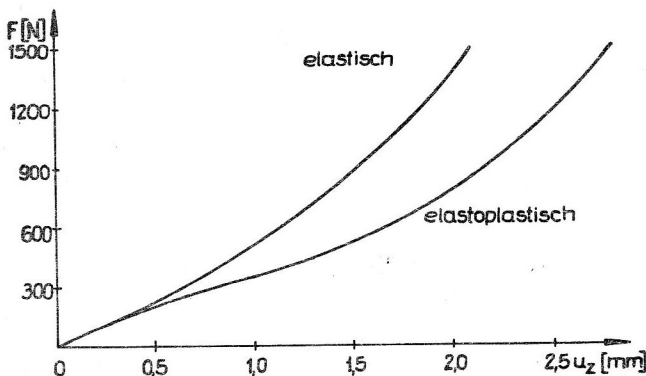


Bild 12
Durchbiegungen in der Mitte der Quadratplatte

Das letzte Beispiel bezieht sich auf eine quadratische, eingespannte Platte, die in der Mitte durch eine Einzelkraft belastet ist. Aufgrund der Symmetrie wurde ein Viertel der Platte vernetzt (Bild 11). Wie im Streifenbeispiel wurde eine elastische und eine elastisch-plastische (mit Verfestigung) Rechnung durchgeführt. Der Verlauf der Durchbiegung der Platte ist auf Bild 12 dargestellt.

LITERATUR

- [1] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. – Dissertation, Universität Stuttgart, 1976.
- [2] Murín, J.: Berechnung dünnwandiger Konstruktionen mit 3D-degenerierten Schalenelemente. – In: Proc. Fachtagung „Numerische Methoden in der Mechanik“, Vysoke Tatry, 1976. – S. 6 – 11.
- [3] Syč-Milý, J., Benča, Š., Jelemský, J., Murín, J., Élesztos, P.: Programmsystem für nichtlineare Analyse mit FEM. – Abschlußbericht (slowakisch), Bratislava, 1986
- [4] Benča, Š., Dutko, M.: Realisierung des elastisch-plastischen Materialmodells mit gemischter Verfestigung für 3D-Aufgaben. – In: Strojnický časopis. – Bratislava 36(1985)1. – S. 61 – 71.
- [5] Murín, J.: Analyse endlicher Verschiebungen für 3D-Aufgaben mit FEM. – In: Strojnický časopis. – Bratislava 38(1987)4. – S. 459 – 466.
- [6] Murín, J., Dutko, M.: UL-Formulierung der geometrisch nichtlinearen 3D-Aufgaben mit FEM. – In: Strojnický časopis. – Bratislava 39 (1988) 3. – S. 336 – 343.
- [7] Chernykh, K. F.: Nelineynaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh. – Leningrad: Mashinostroeniye, 1986. – 336 S.
- [8] Betten, J.: Elastizitäts- und Plastizitätslehre. – Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1985. – 310 S.
- [9] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. – Berlin (West) u. a.: Springer, 1986. – 820 S.
- [10] Lur'e, A. I.: Nelineynaya teoriya uprugosti. – Moskva: Nauka, 1980. – 512 S.
- [11] Duszek, M.: Problems of geometrically non-linear theory of plasticity. – Ruhr-Universität Bochum, 1980.
- [12] Kleiber, M., König, J. A., Sawczuk, A.: Studies on plastic structures: Stability, anisotropic hardening, cyclic loads. – In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – Amsterdam 33 (1982). – S. 256 – 283.
- [13] Kachanov, L. M.: Osnovy teorii plastichnosti. – Moskva: Nauka, 1969. – 420 S.
- [14] Chakrabarty, J.: Theory of Plasticity. – New York: McGraw-Hill, 1987. – 791 S.
- [15] Clavuot, C., Ziegler, H.: Über einige Verfestigungsregeln. – In: Ingenieur-Archiv. – Berlin (West) 28 (1959). – S. 13 – 26.
- [16] Ziegler, H.: A modification of Prager's hardening rule. – In: Quarterly of Applied Mathematics. – Providence 17 (1959). – S. 55 – 65.
- [17] Zyczkowski, M.: Combined loading in the theory of plasticity. – Warszawa: PWN, 1981.
- [18] Shield, R. T., Ziegler, H.: On Prager's Hardening Rule. – In: ZAMP. – Basel/Stuttgart 9 (1958). – S. 260 – 276.
- [19] Sattler, J. M.: Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität. – Dissertation, Universität Stuttgart, 1980.

Anschriften der Autoren:

Dozent Ing. Justin Murin, CSc.
Lehrstuhl für Mechanik
Elektrotechnische Fakultät der Slowakischen
Technischen Hochschule
Mlynska dolina, Bratislava

Ing. Martin Dutko
Lehrstuhl für Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie
Maschinenbau-Fakultät der Slowakischen
Technischen Hochschule
Gottwaldovo nam. 17
812 31 Bratislava
ČSSR

Dr. sc. techn. Holm Altenbach
Wissenschaftsbereich Werkstofftechnik
Sektion Technologie der metallverarbeitenden Industrie
Technische Universität „Otto von Guericke“ Magdeburg
PSF 124
Boleslav-Bierut-Platz 5
Magdeburg
DDR — 3010