

Zur Berechnung des aerodynamisch erzeugten Schalls im Nah- und Fernfeld

Sven-Jürgen Hiller

1. Einleitung

Dem Problem der Lärmbekämpfung wird seit Jahren große Aufmerksamkeit gewidmet. Die Ursachen liegen einerseits darin, daß die Zahl der Hörgeschädigten alarmierende Ausmaße erreicht hat und weiter steigt, andererseits sinken nach der Einführung von Lärmbekämpfungsmaßnahmen in Betrieben die Zahl der Arbeitsunfälle und auch Arbeitsfehler beträchtlich [12]. Der Arzt Robert Koch sagte: „Eines Tages wird der Mensch ebenso unerbittlich den Lärm bekämpfen müssen wie die Cholera und die Pest“.

Die erreichbare Leistungsdichte heutiger Maschinen und Anlagen zwingen den Konstrukteur und Betreiber, sich intensiv mit den Fragen der Lärmbekämpfung zu beschäftigen. Dabei ist der primären Lärmbekämpfung (die Entstehungsmechanismen werden gezielt beeinflusst) der Vorzug vor der sekundären (Schalldämmung, Schalldämpfung) zu geben. Doch dieser Weg erfordert die genaue Kenntnis der Entstehungsmechanismen. Da Lärm vielfach in der Folge von Strömungen entsteht, müssen Einblicke in die Zusammenhänge zwischen turbulenten Strömungen und Schallabstrahlung gefunden werden. Die folgende Untersuchung zeigt eine Möglichkeit, Details des von einer turbulenten Strömung erzeugten Schallfeldes auf analytischem Wege zu beschreiben.

2. Herleitung einer aeroakustischen Gleichung

Um die von strömenden Fluiden ausgehenden Schallwirkungen nachrechnen zu können, braucht man spezielle Differentialgleichungen, die die Zusammenhänge zwischen der Fluidbewegung und kleinen Wechseldrücken, die unter bestimmten Bedingungen als Schall wahrgenommen werden können, beschreiben. Für deren Herleitung bilden die Bewegungsgleichung (1) und die Kontinuitätsgleichung für kompressible Medien (2) die Grundlage.

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{c} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{c}) = 0 \quad (2)$$

Der nichtlineare Term der Navier-Stokes-Gleichung (3) wird hierbei als ein Vektorfeld \vec{V}_{ges} aufgefaßt.

$$\vec{V}_{\text{ges}} = (\vec{c} \cdot \text{grad}) \vec{c} \quad (3)$$

Die Ableitung einer aeroakustischen Gleichung erfolgt in enger Anlehnung an andere Autoren ([2], [3], [5]). Hier wird nur das Endergebnis genannt.

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta p = \text{div}(\rho \vec{V}_{\text{ges}}) - \vec{c} \cdot \text{grad} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{div} \vec{c} \quad (4)$$

Diese Gleichung beschreibt für den räumlichen Fall den Zusammenhang zwischen den möglichen Druck-, Masse- und Geschwindigkeitsschwankungen eines kompressiblen Fluids.

Mittels des allgemeinen Gasgesetzes (5)

$$\frac{p}{\rho} = Z \cdot R \cdot T \quad (5)$$

läßt sich Gl. (4) noch weiter vereinfachen.

Setzt man bei dem kompressiblen Fluid voraus, daß es sich im betrachteten lokalen Bereich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und keine Entropieänderungen auftreten, so gilt

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2, \quad (6)$$

wobei a die Schallgeschwindigkeit des Fluids ist. Im Falle kleiner, z. B. akustischer Zustandsänderungen, kann die temperaturabhängige Schallgeschwindigkeit durch die Ruheschallgeschwindigkeit a_R angenähert werden, so daß aus Gl. (6) folgt:

$$\text{grad } p = a_R^2 \text{ grad } \rho \quad (7)$$

Mit Gl. (7) folgt aus Gl. (4) die Beziehung (8)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a_R^2 \Delta \rho = \text{div}(\rho \vec{V}_{\text{ges}}) - \vec{c} \cdot \text{grad} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{div} \vec{c}. \quad (8)$$

3. Verschiedene Geschwindigkeitsansätze

Nun ist es günstig, verschiedene Geschwindigkeitsansätze in die aeroakustische Gleichung (4) einzuführen und somit diese Gleichung für die verschiedenen Strömungsformen zu modifizieren. Als erstes wird vorausgesetzt, daß sich die Größen Druck, Massedichte und Geschwindigkeit aus einem zeitlich konstanten Anteil der Grund- oder Hauptströmung und einem kleinen, zeitlich veränderlichen Schwankungsanteil zusammensetzen (Prandtl-Ansatz). Für die Geschwindigkeit setzt man daher:

$$\vec{c}(x, y, z, t) = \vec{c}_0(x, y, z) + \vec{c}'(x, y, z, t). \quad (9)$$

Die Beziehungen für den Druck und die Massedichte ergeben sich analog. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Schwankungsbewegung unabhängig von der Haupt- oder Grundströmung \vec{c}_0 existieren kann.

Werden nun der Ausdruck (9) und die ihm entsprechenden Ausdrücke für die Massedichte und den Druck in Gl. (8) eingesetzt, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_R^2 \Delta \rho' - \text{div} [\rho' (\vec{c}_0 \cdot \text{grad}) \vec{c}_0] + \text{div} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{c}_0 \right] = \text{div} [\rho_0 \vec{V}_{\text{ges}} + a_R^2 \text{grad} \rho_0] \quad (10)$$

Der nichtlineare Summand hat dabei folgendes Aussehen:

$$\vec{V}_{\text{ges}} = (\vec{c}' \cdot \text{grad}) \vec{c}_0 + (\vec{c}_0 \cdot \text{grad}) \vec{c}' + (\vec{c}' \cdot \text{grad}) \vec{c}' \quad (11)$$

Mit der Gl. (10) kann nun die Massedichteschwankung bzw. der Schalldruck innerhalb und außerhalb des Strömungsgebietes ermittelt werden. Solche Vorgänge, wie Schallentstehung, Schallfortleitung, Schallausbreitung in bewegten Fluiden, Schallbrechung in Scherschichten u. ä., sind bei Kenntnis des Strömungsgebietes nachrechenbar.

An Gl. (10) fällt auf, daß sie vom Prinzip her eine inhomogene Wellengleichung mit der Divergenz des nichtlinearen Summanden als Inhomogenität darstellt, die jedoch um einige Terme ergänzt ist. Und gerade die Terme auf der linken Seite erschweren die analytische Lösung außerordentlich.

In vielen Fällen interessiert man sich jedoch für den von einer turbulenten Strömung erzeugten Schall, den man als Beobachter außerhalb des eigentlichen, in sich geschlossenen Strömungsgebietes wahrnimmt. Ein Beispiel dafür ist die Schallabstrahlung von einem ortsfesten kleinen Lüfter in einem großen Raum. Um den Lüfter herum wird sich eine Strömung ausbilden, die (fast) keinen Einfluß auf die Strömung im Raum hat. Man kann nun ein genügend großes Gebiet finden, durch dessen Grenzen kein durch den Lüfter verursachter Masse-transport stattfindet. Die Strömung ist also innerhalb dieses Gebietes in sich geschlossen. Dieses turbulente Strömungsgebiet sendet nun Druckschwankungen in das umliegende ruhende Gebiet aus: dieses soll nur akustisch wirksam sein und die Druckschwankungen fortleiten. In ihm befindet sich nun der Beobachter und nimmt diese Druckschwankungen als Schall wahr (vgl. Bild 1).

Zur mathematischen Beschreibung der eben skizzierten Modellvorstellung werden noch einige Annahmen und Voraussetzungen benötigt:

1. Die in sich abgeschlossene Strömung (vgl. Bild 1 – Pos. 2) erfüllt auf Grund der niedrigen Geschwindigkeiten die Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung für inkompressible Strömungen.
2. Die gegenseitige räumliche Lage von Schallquelle und Beobachter bleiben unverändert. Mögliche Relativbewegungen lassen sich ggfs. durch entsprechende Koordinatentransformationen (vgl. Lorentz-Transformation, Doppler-Effekt) berücksichtigen.

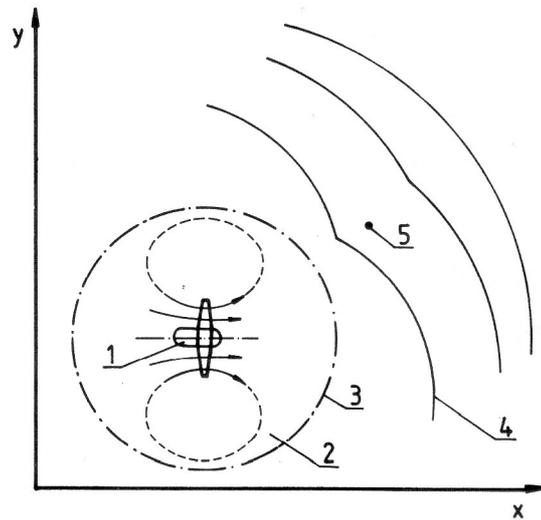


Bild 1
Modellvorstellung

- 1 Lüfter
- 2 in sich geschlossenes turbulentes Strömungsgebiet
- 3 Gebietsgrenze
- 4 auslaufende Schallwellen
- 5 Beobachter

3.: Die analytische Darstellung der in sich geschlossenen, turbulenten Strömung erfolgt mittels Albringscher Wirbelmodelle.

Berücksichtigt man diese Voraussetzungen in Gl. (10), erhält man die übliche inhomogene Wellengleichung (12). Die Inhomogenität ist dabei die Divergenz des nichtlinearen Summanden der schallerzeugenden Strömung.

$$\frac{\partial^2 \rho(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - a_R^2 \Delta \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 \text{div} \vec{V}_{\text{ges}}(\vec{x}, t) \quad (12)$$

$$\vec{V}_{\text{ges}} = (\vec{c}' \cdot \text{grad}) \vec{c}' \quad (13)$$

Die Gl. (12) beschreibt damit die von einer räumlich fixierten turbulenten Strömung in alle Richtungen des Raumes ausgehenden Schallwellen. Das Quellglied für diesen Vorgang ist dabei die Divergenz des nichtlinearen Summanden dieser Strömung.

4. Der nichtlineare Summand der Navier-Stokes-Gleichung

Nach [6] läßt sich der nichtlineare Summand von Gl. (1) in Form der Gl. (14) darstellen, d. h., er kann wie jedes Vektorfeld in ein rotationsfreies (\vec{V}_1) und in ein divergenzfreies (\vec{V}_2) aufgespalten werden. Dabei enthält das rotationsfreie Feld \vec{V}_1 alle Quellen und Senken des Gesamtfeldes \vec{V}_{ges} und das divergenzfreie \vec{V}_2 alle Wirbel. Die Divergenz des Teilfeldes \vec{V}_1 und die Rotation des Teilfeldes \vec{V}_2 sind also genau so groß wie die Divergenz und die Rotation des Gesamtfeldes:

$$\vec{V}_{\text{ges}} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (14)$$

wobei

$$\operatorname{div} \vec{V}_1 = \operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}} \quad \text{bei} \quad \operatorname{rot} \vec{V}_1 = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{V}_2 = \operatorname{rot} \vec{V}_{\text{ges}} \quad \text{bei} \quad \operatorname{div} \vec{V}_2 = 0$$

ist.

Diese Betrachtungsweise des nichtlinearen Summanden zeigt auf, daß für die Schallproduktion einer Strömung (mit $\eta = \text{const}$) die Divergenz des nichtlinearen Summanden verantwortlich ist (vgl. Gl. (10)), während für die Beschreibung verschiedener Zustände und Vorgänge (Turbulenz, Vermischung) es interessant ist, die Verteilung, Produktion und Ausbreitung der Rotation im Fluid zu betrachten.

5. Randbedingungen

Die Bestimmung der zur Lösung einer Differentialgleichung notwendigen Randbedingungen basieren entweder auf den konkreten Verhältnissen bei einem physikalischen Vorgang oder auf einer Modellvorstellung, die die interessierenden Verhältnisse und Zusammenhänge hinreichend genau beschreibt.

Im vorliegenden Fall treten als äußere Randbedingungen, d. h. für große Abstände vom Quellgebiet, die Sommerfeldschen Strahlungsbedingungen auf.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} p'(R) = 0 \quad (15)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{c}'(R) = 0 \quad (16)$$

Für die Formulierung der inneren Randbedingungen sind noch einige weitere Betrachtungen notwendig.

Die sich beim Übergang vom turbulenten Strömungsgebiet zur ruhenden Umgebung ergebende Scherschicht soll klein im Vergleich zur Wellenlänge der durchgehenden Schallwelle sein. In diesem Fall kann links- und rechtsseitig der Scherschicht eine linearisierte Bewegungsgleichung angesetzt werden. Daraus erhält man die sogenannten Diskontinuitätsbedingungen [4], [7], [8]:

$$\left. \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_{x0} \frac{\partial}{\partial x} \right) c_y \right|_{\text{Strömungsgebiet}} = \frac{\partial c_y'}{\partial t} \Big|_{\text{akustisches Gebiet}} \quad (17)$$

$$p' \Big|_{\text{Strömungsgebiet}} = p' \Big|_{\text{akustisches Gebiet}} \quad (18)$$

Folgende Schlußfolgerungen können daraus gezogen werden:

Bleibt das turbulente Strömungsgebiet, d. h. das Quellgebiet der strömungakustischen Schallentstehung auf ein endliches Gebiet beschränkt und verschwindet genügend schnell beim Übergang in das ruhende, nur akustisch wirksame Gebiet, kann für die Druckschwankungen p' die Scherschicht unberücksichtigt bleiben (Gl. (18)); für die Geschwindigkeit \vec{c}' muß jedoch Gl. (17) berücksichtigt werden.

Benutzt man also nur eine Differentialgleichung für den Schalldruck p' bzw. für die Massedichteschwankung ρ' , braucht die innere Randbedingung nicht gesondert beachtet zu werden, und es kann so gerechnet werden, als gäbe es keinen besonderen Übergang vom Quell- zum Ausbreitungsgebiet.

6. Die Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung

Geht man davon aus, daß sich die Massedichteschwankungen ρ' in der Lösung von Gl. (12) bezüglich der Zeit aus sinus- und cosinusförmigen Anteilen zusammensetzen, kann man von vornherein durch Abspalten des Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$ aus der Wellengl. (12) die entsprechende Schwingungsgl. (19) gewinnen.

$$\Delta \rho'(\vec{x}) + k^2 \rho'(\vec{x}) = \rho_0 \operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}}(\vec{x}) \quad (19)$$

Da die Inhomogenität von Gl. (19) auf ein endliches Gebiet beschränkt sein und außerhalb dieses Gebietes verschwinden soll (vgl. Abs. 5), bietet es sich an, die Lösung von Gl. (19) mit Hilfe Greenscher Funktionen zu konstruieren.

Die zu Gl. (19) gehörige Differentialgleichung für eine Greensche Funktion $G(\vec{x})$ lautet:

$$\Delta G(\vec{x}) + k^2 G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}). \quad (20)$$

Liegt die Inhomogenität nicht um den Koordinatenursprung herum, sondern an einem beliebigen Ort \vec{x}' im Raum, so lautet die zu Gl. (20) analoge Beziehung:

$$\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x} - \vec{x}') + k^2 G(\vec{x} - \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (21)$$

Das Symbol $\Delta_{\vec{x}}$ bedeutet, daß der Laplace-Operator entsprechend \vec{x}' und nicht \vec{x} angewandt werden muß.

Aus Gl. (20) und Gl. (21) erhält man für die Greensche Funktion die Lösungen

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikx}}{x} \quad (22)$$

und

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (23)$$

Fügt man obigen Gln. (22) und (23) den vorher abgespaltenen Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ wieder hinzu, so erhält man einen Term der Form:

$$e^{-i(\omega t \mp k|\vec{x}|)} = e^{-i\omega(t \mp \frac{|\vec{x}|}{a})} \quad (24)$$

Das negative Vorzeichen in der Klammer von Gl. (24) steht dabei für das retardierte Potential, das positive Vorzeichen dagegen für das avancierte Potential.

Im folgenden werden jedoch Schallausbreitungsprobleme betrachtet, so daß nur retardierte Potentiale interessieren. Es wird somit nur das negative Vorzeichen in dem Klammerausdruck von Gl. (24) benutzt.

Man ist nun in der Lage, mit Hilfe der gefundenen Greenschen Funktion eine Lösung für die Massedichteschwankung ρ' aus Gl. (19) anzugeben.

$$\rho'(\vec{x}, t) = -\frac{\rho_0}{4\pi} \iiint_G \operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}}(\vec{x}, t) \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{-i\omega t} d\vec{x}' \quad (25)$$

Diese Beziehung beschreibt das zeitliche und örtliche Verhalten der Massedichteschwankungen ρ' im dreidimensionalen Raum. Es ist hierbei um das Quellgebiet G' , das an einem beliebigen Ort im Raum liegen kann, räumlich zu integrieren.

7. Beschreibung der Divergenz des nichtlinearen Summanden mittels Wirbelmodelle nach Albring

In dem Integral (25) tritt die Divergenz des nichtlinearen Summanden der turbulenten Strömung auf. Das bedeutet, wenn man solche Informationen aus einer turbulenten schallerzeugenden Strömung gewinnen kann, die eine algebraische Beschreibung der Divergenz des nichtlinearen Summanden an dessen zeitlicher und örtlicher Abhängigkeit gestatten, ist man in der Lage, den von dieser Strömung produzierten Schall genau nachzurechnen. Doch ist dies z. Z. nicht möglich.

Nach einem Vorschlag von Albring [2] können jedoch verschiedene Effekte einer turbulenten Strömung mit Hilfe zeitlich und örtlich periodischer Funktionen nachgebildet werden. Diese Funktionen stellen dabei Lösungen der Rayleighschen Differentialgleichung dar.

Diese Wirbelfelder und Wirbelsysteme sollen zur analytischen Beschreibung des nichtlinearen Summanden und dessen Divergenz benutzt werden (zu Wirbelfelder und -systeme vgl. [2], [3]).

Obwohl einerseits bei der bisherigen Herleitung der Schwerpunkt auf die räumliche, dreidimensionale Ausbreitung von Schall lag, andererseits auch Ansätze für dreidimensionale Wirbelsysteme bekannt sind, soll hier die dreidimensionale Schallausbreitung von zweidimensionalen Wirbelfeldern nachgerechnet werden (Bild 2). Damit ist die prinzipielle Möglichkeit der späteren Erweiterung auf dreidimensionale Wirbelfelder gegeben.

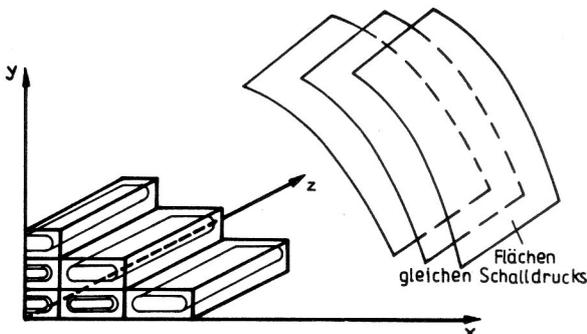


Bild 2
Modell einer dreidimensionalen Schallausbreitung von einem zweidimensionalen Quellgebiet aus

Es hat sich als günstig erwiesen, zwei grundlegende Typen von Wirbelsystemen zu unterscheiden [9] (vgl. auch Bilder 3 und 4).

Typ I:

$$\psi(x, y, t) = k_I \exp(a_{1R}x + a_{2R}y + a_{3R}t) \times \cos(a_{1i}x + a_{2i}y + a_{3i}t) \quad (26)$$

Typ II:

$$\psi(x, y, t) = k_{II} \exp(a_{1R}x + a_{2R}y + a_{3R}t) \times \cos(a_{1i}x + a_{3i}t) \cos(a_{2i}y) \quad (27)$$

(zu Eigenschaften dieser Wirbelsysteme vgl. [2], [9])

Die mathematisch-analytische Modellierung der Divergenz des nichtlinearen Summanden einer turbulenten Strömung soll mit Hilfe von Überlagerungen gleichartiger Wirbelsysteme erfolgen. Dabei ist es effektiver, die rein komplexe Schreibweise der Gl. (26) bzw. Gl. (27) zu benutzen.

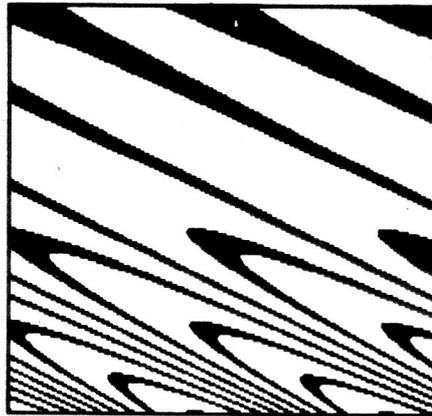


Bild 3
Wirbelsystem Typ I
 $(x, y) = \exp(-0,35 \cdot y) \cdot \cos(0,75 \cdot x + 1,5 \cdot y)$

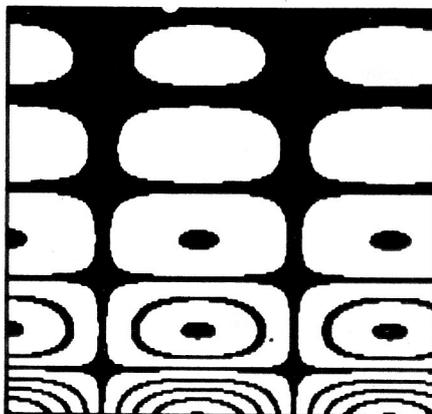


Bild 4
Wirbelsystem Typ II
 $(x, y) = \exp(-0,35 \cdot y) \cdot \cos(0,75 \cdot x) \cdot \cos(1,5 \cdot y)$

wobei

$$\operatorname{div} \vec{V}_1 = \operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}} \quad \text{bei} \quad \operatorname{rot} \vec{V}_1 = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{V}_2 = \operatorname{rot} \vec{V}_{\text{ges}} \quad \text{bei} \quad \operatorname{div} \vec{V}_2 = 0$$

ist.

Diese Betrachtungsweise des nichtlinearen Summanden zeigt auf, daß für die Schallproduktion einer Strömung (mit $\eta = \text{const}$) die Divergenz des nichtlinearen Summanden verantwortlich ist (vgl. Gl. (10)), während für die Beschreibung verschiedener Zustände und Vorgänge (Turbulenz, Vermischung) es interessant ist, die Verteilung, Produktion und Ausbreitung der Rotation im Fluid zu betrachten.

5. Randbedingungen

Die Bestimmung der zur Lösung einer Differentialgleichung notwendigen Randbedingungen basieren entweder auf den konkreten Verhältnissen bei einem physikalischen Vorgang oder auf einer Modellvorstellung, die die interessierenden Verhältnisse und Zusammenhänge hinreichend genau beschreibt.

Im vorliegenden Fall treten als äußere Randbedingungen, d. h. für große Abstände vom Quellgebiet, die Sommerfeldschen Strahlungsbedingungen auf.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} p'(R) = 0 \quad (15)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{c}'(R) = 0 \quad (16)$$

Für die Formulierung der inneren Randbedingungen sind noch einige weitere Betrachtungen notwendig.

Die sich beim Übergang vom turbulenten Strömungsgebiet zur ruhenden Umgebung ergebende Scherschicht soll klein im Vergleich zur Wellenlänge der durchgehenden Schallwelle sein. In diesem Fall kann links- und rechtsseitig der Scherschicht eine linearisierte Bewegungsgleichung angesetzt werden. Daraus erhält man die sogenannten Diskontinuitätsbedingungen [4], [7], [8]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_{x0} \frac{\partial}{\partial x} \right) c_y \Big|_{\text{Strömungsgebiet}} = \frac{\partial c'_y}{\partial t} \Big|_{\text{akustisches Gebiet}} \quad (17)$$

$$p' \Big|_{\text{Strömungsgebiet}} = p' \Big|_{\text{akustisches Gebiet}} \quad (18)$$

Folgende Schlußfolgerungen können daraus gezogen werden:

Bleibt das turbulente Strömungsgebiet, d. h. das Quellgebiet der strömungakustischen Schallentstehung auf ein endliches Gebiet beschränkt und verschwindet genügend schnell beim Übergang in das ruhende, nur akustisch wirksame Gebiet, kann für die Druckschwankungen p' die Scherschicht unberücksichtigt bleiben (Gl. (18)); für die Geschwindigkeit \vec{c}' muß jedoch Gl. (17) berücksichtigt werden.

Benutzt man also nur eine Differentialgleichung für den Schalldruck p' bzw. für die Massedichteschwankung ρ' , braucht die innere Randbedingung nicht gesondert beachtet zu werden, und es kann so gerechnet werden, als gäbe es keinen besonderen Übergang vom Quell- zum Ausbreitungsgebiet.

6. Die Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung

Geht man davon aus, daß sich die Massedichteschwankungen ρ' in der Lösung von Gl. (12) bezüglich der Zeit aus sinus- und cosinusförmigen Anteilen zusammensetzen, kann man von vornherein durch Abspalten des Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$ aus der Wellengl. (12) die entsprechende Schwingungsgl. (19) gewinnen.

$$\Delta \rho'(\vec{x}) + k^2 \rho'(\vec{x}) = \rho_0 \operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}}(\vec{x}) \quad (19)$$

Da die Inhomogenität von Gl. (19) auf ein endliches Gebiet beschränkt sein und außerhalb dieses Gebietes verschwinden soll (vgl. Abs. 5), bietet es sich an, die Lösung von Gl. (19) mit Hilfe Greenscher Funktionen zu konstruieren.

Die zu Gl. (19) gehörige Differentialgleichung für eine Greensche Funktion $G(\vec{x})$ lautet:

$$\Delta G(\vec{x}) + k^2 G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}). \quad (20)$$

Liegt die Inhomogenität nicht um den Koordinatenursprung herum, sondern an einem beliebigen Ort \vec{x}' im Raum, so lautet die zu Gl. (20) analoge Beziehung:

$$\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x} - \vec{x}') + k^2 G(\vec{x} - \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (21)$$

Das Symbol $\Delta_{\vec{x}}$ bedeutet, daß der Laplace-Operator entsprechend \vec{x}' und nicht \vec{x} angewandt werden muß.

Aus Gl. (20) und Gl. (21) erhält man für die Greensche Funktion die Lösungen

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikx}}{x} \quad (22)$$

und

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (23)$$

Fügt man obigen Gln. (22) und (23) den vorher abgespaltenen Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ wieder hinzu, so erhält man einen Term der Form:

$$e^{-i(\omega t \mp k|\vec{x}'|)} = e^{-i\omega(t \mp \frac{|\vec{x}'|}{a})} \quad (24)$$

Das negative Vorzeichen in der Klammer von Gl. (24) steht dabei für das retardierte Potential, das positive Vorzeichen dagegen für das avancierte Potential.

Im folgenden werden jedoch Schallausbreitungsprobleme betrachtet, so daß nur retardierte Potentiale interessieren. Es wird somit nur das negative Vorzeichen in dem Klammersausdruck von Gl. (24) benutzt.

Man ist nun in der Lage, mit Hilfe der gefundenen Greenschen Funktion eine Lösung für die Massedichteschwankung ρ' aus Gl. (19) anzugeben.

$$\rho'(\vec{x}, t) = -\frac{\rho_0}{4\pi} \iiint_G \operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}}(\vec{x}, t) \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{-i\omega t} d\vec{x}' \quad (25)$$

Diese Beziehung beschreibt das zeitliche und örtliche Verhalten der Massedichteschwankungen ρ' im dreidimensionalen Raum. Es ist hierbei um das Quellgebiet G , das an einem beliebigen Ort im Raum liegen kann, räumlich zu integrieren.

7. Beschreibung der Divergenz des nichtlinearen Summanden mittels Wirbelmodelle nach Albring

In dem Integral (25) tritt die Divergenz des nichtlinearen Summanden der turbulenten Strömung auf. Das bedeutet, wenn man solche Informationen aus einer turbulenten schallerzeugenden Strömung gewinnen kann, die eine algebraische Beschreibung der Divergenz des nichtlinearen Summanden an dessen zeitlicher und örtlicher Abhängigkeit gestatten, ist man in der Lage, den von dieser Strömung produzierten Schall genau nachzurechnen. Doch ist dies z. Z. nicht möglich.

Nach einem Vorschlag von Albring [2] können jedoch verschiedene Effekte einer turbulenten Strömung mit Hilfe zeitlich und örtlich periodischer Funktionen nachgebildet werden. Diese Funktionen stellen dabei Lösungen der Rayleighschen Differentialgleichung dar.

Diese Wirbelfelder und Wirbelsysteme sollen zur analytischen Beschreibung des nichtlinearen Summanden und dessen Divergenz benutzt werden (zu Wirbelfelder und -systeme vgl. [2], [3]).

Obwohl einerseits bei der bisherigen Herleitung der Schwerpunkt auf die räumliche, dreidimensionale Ausbreitung von Schall lag, andererseits auch Ansätze für dreidimensionale Wirbelsysteme bekannt sind, soll hier die dreidimensionale Schallausbreitung von zweidimensionalen Wirbelfeldern nachgerechnet werden (Bild 2). Damit ist die prinzipielle Möglichkeit der späteren Erweiterung auf dreidimensionale Wirbelfelder gegeben.

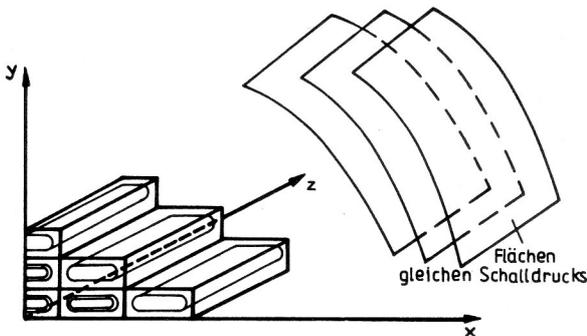


Bild 2
Modell einer dreidimensionalen Schallausbreitung von einem zweidimensionalen Quellgebiet aus

Es hat sich als günstig erwiesen, zwei grundlegende Typen von Wirbelsystemen zu unterscheiden [9] (vgl. auch Bilder 3 und 4).

Typ I:

$$\psi(x, y, t) = k_I \exp(a_{1R}x + a_{2R}y + a_{3R}t) \times \cos(a_{1i}x + a_{2i}y + a_{3i}t) \quad (26)$$

Typ II:

$$\psi(x, y, t) = k_{II} \exp(a_{1R}x + a_{2R}y + a_{3R}t) \times \cos(a_{1i}x + a_{3i}t) \cos(a_{2i}y) \quad (27)$$

(zu Eigenschaften dieser Wirbelsysteme vgl. [2], [9])

Die mathematisch-analytische Modellierung der Divergenz des nichtlinearen Summanden einer turbulenten Strömung soll mit Hilfe von Überlagerungen gleichartiger Wirbelsysteme erfolgen. Dabei ist es effektiver, die rein komplexe Schreibweise der Gl. (26) bzw. Gl. (27) zu benutzen.

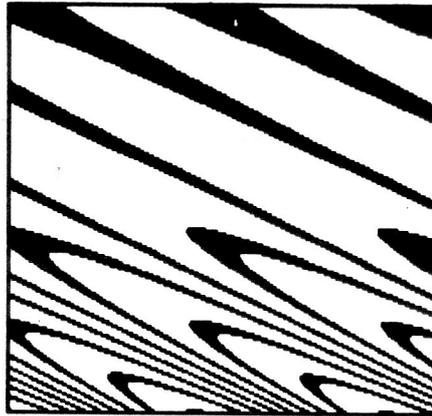


Bild 3
Wirbelsystem Typ I
 $(x, y) = \exp(-0,35 \cdot y) \cdot \cos(0,75 \cdot x + 1,5 \cdot y)$

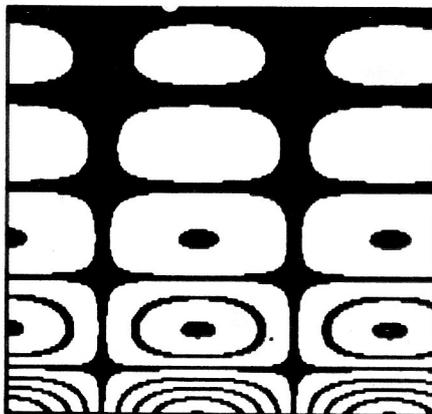


Bild 4
Wirbelsystem Typ II
 $(x, y) = \exp(-0,35 \cdot y) \cdot \cos(0,75 \cdot x) \cdot \cos(1,5 \cdot y)$

$$\psi(x,y,t) = k_I^* \sum_{l=1}^{2 \text{ od. } 4} [\exp(a_3 t) \exp(a_1 x + a_2 y)]_l \quad (28)$$

Dabei stehen die Größen $a_1 \dots a_3$ für entsprechende komplexe und konjugiert komplexe Ausdrücke, um nach der Summation über 2 oder 4 Terme die Gl. (26) bzw. (27) exakt zu erhalten. Damit ist man in der Lage, mit einem einfacher zu handhabenden Ausdruck zu operieren und jederzeit durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke für $a_1 \dots a_3$ und Summierung über alle Terme die vollständige, rein reelle Gleichung hinzuschreiben.

Beispielsweise ergeben die komplexen Ausdrücke

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{1R} + i a_{1i} & \bar{a}_1 &= a_{1R} - i a_{1i} \\ a_2 &= a_{2R} + i a_{2i} & \bar{a}_2 &= a_{2R} - i a_{2i} \\ a_3 &= a_{3R} + i a_{3i} & \bar{a}_3 &= a_{3R} - i a_{3i} \end{aligned}$$

nach der Summation über 2 Terme entsprechend Gl. (28) direkt die Gl. (26) für die Stromfunktion vom Typ I:

$$\begin{aligned} \psi(x,y,t) &= \frac{k_I}{2} [\exp(a_3 t) \exp(a_1 x + a_2 y) + \exp(\bar{a}_3 t) \\ &\quad \exp(\bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y)] \\ &= k_I \exp(a_{1R} x + a_{2R} y + a_{3R} t) \cos(a_{1i} x + a_{2i} y + a_{3i} t) \end{aligned}$$

Um bei der Weiterrechnung die Übersichtlichkeit zu wahren, wird vorerst angenommen, das gesamte Strömungsgebiet sei durch ein einziges Wirbelsystem entsprechend Gl. (26) oder Gl. (27) ausgefüllt. In diesem Fall nimmt die Divergenz des nichtlinearen Summanden die einfachste Form

$$\operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}} = 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] \quad (29)$$

an.

Setzt man Gl. (28) in Gl. (29) ein, so erhält man für $\operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}}$ eine Anzahl von Summanden vom Typ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{komplexer} \\ \text{Koeffizient 1} \end{array} \right\} \cdot \exp \left[\left\{ \begin{array}{l} \text{komplexer} \\ \text{Koeffizient 2} \end{array} \right\} \cdot x + \left\{ \begin{array}{l} \text{komplexer} \\ \text{Koeffizient 3} \end{array} \right\} \cdot y \right] \quad (30)$$

Für $\operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}}$ des Wirbelsystems vom Typ I erhält man z. B.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}} &= -\frac{k_I^* 2}{2} (a_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2)^2 \cdot \exp(a_3 + \bar{a}_3) t \cdot \\ &\quad \cdot \exp[(a_1 + \bar{a}_1) x + (a_2 + \bar{a}_2) y] \end{aligned} \quad (31)$$

und beim Wirbelsystem vom Typ II

$$\frac{\operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}}}{\frac{1}{8} k_I^* 2} = -a_1^2 (a_2 - \bar{a}_2)^2 \cdot \exp 2a_3 t \cdot \exp(2a_1 x + (a_2 + \bar{a}_2) y)$$

$$\begin{aligned} &- \bar{a}_1^2 (a_2 - \bar{a}_2)^2 \cdot \exp 2\bar{a}_3 t \cdot \exp(2\bar{a}_1 x + (a_2 + \bar{a}_2) y) \\ &- a_2^2 (a_1 - \bar{a}_1)^2 \cdot \exp(a_3 + \bar{a}_3) t \cdot \exp((a_1 + \bar{a}_1) x + 2a_2 y) \\ &- \bar{a}_2^2 (a_1 - \bar{a}_1)^2 \cdot \exp(a_3 + \bar{a}_3) t \cdot \exp((a_1 + \bar{a}_1) x + 2\bar{a}_2 y) \\ &- [(a_1 a_2 - \bar{a}_1 \bar{a}_2)^2 + (a_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2)^2] \cdot \exp(a_3 + \bar{a}_3) t \\ &\quad \cdot \exp[(a_1 + \bar{a}_1) x + (a_2 + \bar{a}_2) y] \end{aligned} \quad (32)$$

Überlagert man nun mehrere Wirbelsysteme, so muß Gl. (29) um die Terme erweitert werden, die die nichtlinearen Wechselwirkungen der Wirbelfelder untereinander berücksichtigen. Auch in diesem Fall entstehen dann Ausdrücke vom Typ (30). Somit ist die oben getroffene Annahme, im weiteren nur ein Wirbelsystem zu betrachten, keine wirkliche Einschränkung. Man kann sich im folgenden also auf eine prinzipielle Lösung beschränken und leitet die weiter benötigten Terme durch Variation der komplexen Koeffizienten entsprechend der Ausgangswirbelsysteme her. Die folgenden Rechengänge werden deshalb an Hand des Terms

$$\exp(a_1 x + a_2 y) \quad (33)$$

demonstriert. Es wird aber stillschweigend davon ausgegangen, daß für a_1 bzw. a_2 in Gl. (33) jede beliebige Kombination von $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2$ stehen kann und der Ausdruck (33) mit verschiedenen komplexen Koeffizienten multipliziert werden kann.

8. Lösung des Integrals für den Schalldruck

Unter Berücksichtigung von Gl. (6) erhält man aus Gl. (25) das Integral für den Schalldruck p' , der von einem Quellgebiet G' ausgesandt wird. Da das Quellgebiet auf einen endlichen Bereich beschränkt ist und sonst verschwindet, kann das Integrationsgebiet über das Gesamtgebiet bis ins Unendliche ausgedehnt werden ($G' \rightarrow G$), im speziellen die positive y-Halbebene.

$$\begin{aligned} p'(\vec{x}, t) &= a_R^2 \rho'(\vec{x}, t) = \frac{a_R \rho_0}{4\pi} \underbrace{\iiint_{G' \rightarrow G} \operatorname{div} \vec{V}_{\text{ges}}(\vec{x}', t)}_{\text{rein reale Größe}} \cdot \underbrace{\frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{\text{nur Realteil nutzen}} e^{-i\omega t} d\vec{x}' \end{aligned} \quad (34)$$

Im folgenden wird wieder die verkürzte Schreibweise unter Benutzung komplexer Ausdrücke verwendet. Dabei ist zu beachten, von welchem Ausdruck nur der Realteil zählt und welcher Ausdruck rein real ist und nur in komplexer Schreibweise erscheint (vgl. Gl. (34)).

Setzt man Gl. (29) unter Berücksichtigung von Gl. (28) in Gl. (34) ein und interessiert sich nur für die prinzipielle Lösung (vgl. Abs. 7), so findet man als typischen Ausdruck für Gl. (34)

$$p'(\vec{x}, t) \sim \int_G a_1 a_2 e^{(a_1 x' + a_2 y')} \cdot e^{a_3 t} \cdot \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot e^{-i\omega t} d\vec{x}' \quad (35)$$

Die erste Integration (über dz') liefert einen Ausdruck der Form

$$p'(\vec{x}, t) \sim \int_{\varphi'=0}^{\pi} \int_{|\vec{x}'|=0}^{\infty} a_1 a_2 \cdot e^{a_3 t} \cdot e^{(a_1 x' + a_2 y')} \cdot H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{x}'|) e^{-i\omega t} \cdot dx' \cdot dy' \quad (36)$$

Eine z-Abhängigkeit tritt wegen des zweidimensionalen Quellgebietes nicht mehr auf.

In dieser Schreibweise ist das Integral schlecht lösbar. Aus diesem Grund wird ein „Additionstheorem“ der Besselfunktion angewandt [11].

$$H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (37)$$

$$= J_0(k|\vec{x}'|) \cdot H_0^{(1)}(k|\vec{x}|) +$$

$$+ 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{\nu}(k|\vec{x}'|) \cdot H_{\nu}^{(1)}(k|\vec{x}|) \cdot \cos[\nu(\varphi - \varphi')]$$

Wird Gl. (37) in Gl. (36) eingesetzt, erhält man Integralausdrücke folgender Form:

$$p'(\vec{x}, t) \sim \int_{\varphi'=0}^{\pi} \int_{|\vec{x}'|=0}^{\infty} a_1 a_2 \cdot e^{a_3 t} \cdot e^{(a_1 x' + a_2 y')} \cdot J_{\nu}(k|\vec{x}'|) \cdot \cos[\nu(\varphi - \varphi')] \cdot |\vec{x}'| \cdot H_{\nu}^{(1)}(k|\vec{x}|) \cdot e^{-i\omega t} \cdot d|\vec{x}'| \cdot d\varphi' \quad (38)$$

mit $\nu = 0, 1, 2, \dots, +\infty$.

Vor dem eigentlichen Weiterrechnen soll noch der Term

$$\cos[\nu(\varphi - \varphi')] \quad \text{für} \quad \nu = 0; 1; 2; \dots; +\infty$$

betrachtet werden. Es fällt auf, daß er neben der Integrationsvariablen φ' auch den Winkel φ zwischen Aufpunktvektor und positiver x-Achse enthält. Nach der Ausführung der bestimmten Integration über $d\varphi'$ wird die φ' -Abhängigkeit verschwinden und nur noch die Abhängigkeit von φ bestehen bleiben. Die Größe φ , die mit ν multiplikativ verbunden ist, wird als Argument trigonometrischer Funktionen in der Lösung auftreten. Doch diese Ausdrücke sind als die sogenannten Richtfaktoren bei Multipolen bekannt. Es lassen sich dann die Summanden, die die trigonometrischen Funktionen mit dem Argument $\nu(\varphi - \varphi')$ enthalten,

- für $\nu = 0$ als Monopolanteil,
- für $\nu = 1$ als Dipolanteil,
- für $\nu = 2$ als Quadrupolanteil usw.

an der Gesamtlösung deuten.

Da i. a. die Multipolzerlegung bis zum Quadrupol geführt wird, soll auch hier Gl. (38) für $\nu = 0, 1, 2$ gelöst werden.

Zur Lösung von Gl. (38) ist es vorteilhaft, zuerst die bestimmte Integration über $d|\vec{x}'|$ und danach über $d\varphi'$ auszuführen. Bei der Berechnung ist darauf zu achten, von welchem Term der Realteil zählt und welcher reale Term in komplexer Schreibweise benutzt wird.

Nach den Integrationen erhält man

$$p'(|\vec{x}'|, \varphi, t) = \frac{1}{4} \rho_0 \sum_n \left[\begin{matrix} \text{[Wirbel-} \\ \text{systeme]} \\ \text{[Typ I/II]} \end{matrix} \right] [k_1^* \cdot \sum_m \left\{ D_1 + D_2 \cos\varphi + D_3 \sin\varphi + D_4 \cos^2\varphi + D_5 \sin^2\varphi + D_6 \cos 2\varphi + D_7 \sin 2\varphi \right\}]_m \quad (39)$$

Mit

Monopol:

$$D_1 = \text{Real} \left\{ C e^{a_3 t} \frac{-2a_2}{(a_1^2 + a_2^2 + k^2) \sqrt{a_1^2 + k^2}} \right\} \cdot$$

$$[J_0(k|\vec{x}'|) \cos(a_R k t) + Y_0(k|\vec{x}'|) \sin(a_R k t)]$$

Dipol:

$$D_2 = \text{Real} \left\{ C e^{a_3 t} \frac{-4a_1 a_2}{k(a_1^2 + a_2^2 + k^2) \sqrt{a_1^2 + k^2}} \right\} \cdot$$

$$[J_1(k|\vec{x}'|) \cos(a_R k t) + Y_1(k|\vec{x}'|) \sin(a_R k t)]$$

$$D_3 = \text{Real} \left\{ C e^{a_3 t} \frac{4(a_1^2 + k^2)}{k(a_1^2 + a_2^2 + k^2) \sqrt{a_1^2 + k^2}} \right\} \cdot$$

$$[J_1(k|\vec{x}'|) \cos(a_R k t) + Y_1(k|\vec{x}'|) \sin(a_R k t)]$$

Quadrupol:

$$D_4 = \text{Real} \left\{ C e^{a_3 t} \frac{-4a_2}{(a_1^2 + a_2^2 + k^2) \sqrt{a_1^2 + k^2}} \right\} \cdot$$

$$[J_2(k|\vec{x}'|) \cos(a_R k t) + Y_2(k|\vec{x}'|) \sin(a_R k t)]$$

$$D_5 = \text{real} \left\{ C e^{a_3 t} \frac{4a_2}{(a_1^2 + a_2^2 + k^2) \sqrt{a_1^2 + k^2}} \right\} \cdot$$

$$[J_2(k|\vec{x}'|) \cos(a_R k t) + Y_2(k|\vec{x}'|) \sin(a_R k t)]$$

$$D_6 = \text{Real} \left\{ C e^{a_3 t} \frac{-8a_1^2 a_2}{k^2 (a_1^2 + a_2^2 + k^2) \sqrt{a_1^2 + k^2}} \right\}.$$

$$[J_2(k|\vec{x}|) \cos(a_R k t) + Y_2(k|\vec{x}|) \sin(a_R k t)]$$

$$D_7 = \text{Real} \left\{ C e^{a_3 t} \frac{8a_1 (a_1^2 + k^2)}{k^2 (a_1^2 + a_2^2 + k^2) \sqrt{a_1^2 + k^2}} \right\}.$$

$$[J_2(k|\vec{x}|) \cos(a_R k t) + Y_2(k|\vec{x}|) \sin(a_R k t)]$$

Die Gl. (39) ermöglicht die Berechnung des zeit-, orts- und frequenzabhängigen Schalldrucks im Nah- und Fernfeld für das speziell interessierende Wirbelsystem. Die Größe C steht für die komplexen Koeffizienten vor den e-Funktionen in Gl. (31) bzw. Gl. (32). Sie lassen sich durch einen Vergleich ermitteln. Um dies zu verdeutlichen, soll an einem kleinen Beispiel gezeigt werden, wie die komplexen Koeffizienten C für ein Wirbelsystem vom Typ II lauten (vgl. auch Gl. (32)):

$$m = 1 \quad C := -\frac{1}{8} a_1^2 (a_2 - \bar{a}_2)^2$$

$$a_1 := 2a_1 \quad a_2 := a_2 + \bar{a}_2 \quad a_3 := 2a_3$$

$$m = 2 \quad C := -\frac{1}{8} \bar{a}_1^2 (a_2 - \bar{a}_2)^2$$

$$a_1 := 2\bar{a}_1 \quad a_2 := a_2 + \bar{a}_2 \quad a_3 := 2\bar{a}_3$$

$$m = 3 \quad C := -\frac{1}{8} a_2^2 (a_1 - \bar{a}_1)^2 \quad (40)$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1 := a_1 + \bar{a}_1 \quad a_2 := 2a_2 \quad a_3 := a_3 + \bar{a}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

$$m = 5 \quad C := -\frac{1}{8} [(a_1 a_2 - \bar{a}_1 \bar{a}_2)^2 + (a_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2)^2]$$

Zur vollständigen Darstellung des Wirbelsystems ist dabei über m Werte zu summieren, wie dies die innere Summation andeutet. Für ein Wirbelsystem des Typs I (vgl. Abschnitt 7) beträgt m gleich 1, für den Typ II gilt jedoch m = 5.

Im allgemeinen wird ein turbulentes Strömungsgebiet durch die Überlagerung mehrerer Wirbelsysteme unterschiedlicher Intensität (k_1^*), Dämpfungsfaktoren (a_{1R} , a_{2R} , a_{3R}), Wellenzahlen (a_{1i} , a_{2i}) und Kreisfrequenzen (a_{3i}) nachgebildet. Für die Nachrechnung des Schalldruckes kann auf Grund der Gültigkeit von

$$(\text{div } \vec{V}_{\text{ges}})_{\text{Ges}} = \sum_i (\text{div } \vec{V}_{\text{ges}})_i \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \text{d. h. } \text{div } \vec{V}_{\psi_1 + \psi_2} &= \text{div } \vec{V}_1 + \text{div } \vec{V}_2 + \text{div } \vec{V}_3 + \dots \\ &\neq \text{div } \vec{V}_{\psi_1} + \text{div } \vec{V}_{\psi_2} \end{aligned}$$

der Gesamtschalldruck aus der linearen Überlagerung einzelner Schalldruckanteile ermittelt werden. Diese Einzelanteile folgen aus der Zerlegung von $\text{div } \vec{V}_{\text{ges}}$ in mehrere Summanden (vgl. Gl. (41)). Der Zusammenhang wird durch das erste Summenzeichen verdeutlicht.

Mit Gl. (39) ist man nun in der Lage, auch von sehr komplizierten Modellströmungen den Schalldruck im Nah- und Fernfeld und vor allem auch beim Übergang vom Nah- zum Fernfeld nachzurechnen. Durch die Zeit- und Ortsabhängigkeit des Schalldrucks hat man weiterhin die Möglichkeit, Details der Schallausbreitung, besonders im Nahfeld nachzurechnen und zu untersuchen. Man kann also besondere Eigenschaften des Nahfeldes besser und ausführlicher studieren und Schlussfolgerungen über die erzeugende Modellströmung ziehen.

Weiterhin ermöglicht Gl. (39) die Ermittlung des kontinuierlichen Frequenzspektrums ($k = 2\pi f/a_R$).

9. Einige Eigenschaften der Gleichung für den Schalldruck (39)

a) Fernfeld

In vielen praktischen Fällen interessiert nur das Verhalten des Schalldrucks in großen Abständen von der Schallquelle, d. h. im sogenannten Fernfeld. Hierbei ist $k|\vec{x}|$ sehr groß, so daß die Approximation der Besselfunktionen für große Argumente [10] benutzt werden kann.

$$J_\nu(k|\vec{x}|) = \sqrt{\frac{2}{\pi k|\vec{x}|}} \cos(k|\vec{x}| - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi) \quad (42)$$

$$Y_\nu(k|\vec{x}|) = \sqrt{\frac{2}{\pi k|\vec{x}|}} \sin(k|\vec{x}| - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)$$

Nach einigen Stufen der Zwischenrechnung erhält man für den Schalldruck einen Ausdruck der Form:

$$p'(|\vec{x}|, \varphi, t) \sim C \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi k|\vec{x}|}} \cdot f(\sin(k|\vec{x}| - a_R t), \cos(k|\vec{x}| - a_R t)) \quad (43)$$

In den trigonometrischen Ausdrücken tritt also deutlich die Retardiertheit der Lösung (39) hervor. Diese Eigenschaft ist in Gl. (39) durch die Verwendung der Besselfunktionen auf den ersten Blick nicht gleich sichtbar. Dennoch beschreiben beide Gleichungen die für Schallausbreitungsvorgänge typische Eigenschaft der Retardiertheit. Das bedeutet, daß die an einem bestimmten Ort des Raumes zu einem bestimmten Zeitpunkt bemerkte Störung um eine gewisse Zeitspanne, die genau der Zeitdauer entspricht, die die Störung benötigt, um vom Quellpunkt zum Aufpunkt zu gelangen, eher von ihrem Quellpunkt ausgesandt worden sein muß

b) Schallschnelle

Eine Gleichung für die zeit-, orts- und frequenzabhängige radiale Schallschnellenkomponente kann man aus

Gl. (39) unter Berücksichtigung der linearisierten radialen Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (44)$$

erhalten. Nach entsprechender Differentiation und nachfolgender Integration folgt für die radiale Schallschnelle:

$$c_r(x, \phi, t) = \frac{1}{4} \frac{k}{a_3^2 + a_R^2 k^2}$$

DC₁ •

$$[-a_3 (J_1(kx) \cos(a_R kt) + Y_1(kx) \sin(a_R kt)) - a_R k (J_1(kx) \cos(a_R kt) - Y_1(kx) \sin(a_R kt))]$$

+ (DC₂ • cos φ + DC₃ • sin φ) •

$$[a_3 (J_0(kx) \cos(a_R kt) + Y_0(kx) \sin(a_R kt) + a_R k (J_0(kx) \sin(a_R kt) - Y_0(kx) \cos(a_R kt)) - \frac{a_3}{kx} (J_1(kx) \cos(a_R kt) + Y_1(kx) \sin(a_R kt)) - \frac{a_R k}{kx} (J_1(kx) \sin(a_R kt) - Y_1(kx) \cos(a_R kt))]$$

+ (DC₄ • cos² φ + DC₅ • sin² φ + DC₆ • cos 2φ + DC₇ • sin 2φ) •

$$[-a_3 (J_1(kx) \cos(a_R kt) + Y_1(kx) \sin(a_R kt) - a_R k (J_1(kx) \sin(a_R kt) - Y_1(kx) \cos(a_R kt)) - \frac{a_3}{kx} (J_2(kx) \cos(a_R kt) + Y_2(kx) \sin(a_R kt)) - \frac{a_R k}{kx} (J_2(kx) \sin(a_R kt) - Y_2(kx) \cos(a_R kt))] \quad (45)$$

Für große Argumente $k|\vec{x}|$ geht die Schallschnelle gegen Null und erfüllt somit problemlos die äußeren Randbedingungen (vgl. Gl. (16)). Bei sehr kleinen Werten von $k|\vec{x}|$ dagegen strebt c_r gegen Unendlich und zeigt in der unmittelbaren Umgebung des Nullpunkts dasselbe Verhalten wie bei einer Punktquelle. Bei solchen kleinen Abständen befindet man sich nicht mehr im nur akustisch wirksamen Gebiet, sondern bereits im turbulenten Strömungsgebiet. Hier jedoch besitzt die inhomogene Wellengleichung (12) keine Gültigkeit mehr. Wie Rechnungen gezeigt haben, ist das singuläre Verhalten der Schallschnelle auf ein sehr kleines Gebiet um den Nullpunkt herum beschränkt. Das turbulente Strömungsgebiet hat dagegen viel größere Abmessungen. Das hat zur Folge, daß Gl. (45) vom Fernfeld bis an die das Strömungsgebiet umgebende Scherschicht (vgl. Bild 1) gültig ist. Beim weiteren Vordringen in Richtung turbulentes Strömungsgebiet muß dann die innere Randbedingung für die Geschwindigkeit (Gl. (17)) berücksichtigt werden.

c) Phasenverlauf Schallschnelle und Schalldruck

Bekannt ist, daß beim Übergang vom Nah- zum Fernfeld eines Strahlers der Phasenunterschied zwischen Schallschnelle und Schalldruck ständig abnimmt. Vom Fernfeld kann man dann sprechen, wenn dieser Phasenunterschied einen vorgegebenen kleinen Grenzwert unterschreitet. Man geht daher im Fernfeld davon aus, daß Schalldruck und Schallschnelle in Phase sind. Der Quotient aus beiden Größen ergibt einen nur von den Stoffwerten des Mediums abhängigen Wert $\rho_0 \cdot a_R$, die sogenannte Schallkennimpedanz.

Dieses Verhalten kann auch an Hand von Gl. (39) und (45) untersucht werden. Dazu setzt man

$$\frac{p}{c_r} = a_R \rho_0 \cdot \cos(\phi(|\vec{x}|, \varphi)) \quad (46)$$

an. Für kleine Abstände $k|\vec{x}|$ verhält sich der Ausdruck $p(|\vec{x}|, \varphi)/c_r(|\vec{x}|, \varphi)$ wie $\frac{1}{\infty}$, d. h., er strebt gegen Null.

Für sehr große Werte $k|\vec{x}|$ strebt die linke Seite von Gl. (46) gegen den Wert $a_R \rho_0$. Das bedeutet, im Fernfeld geht der Phasenunterschied asymptotisch gegen Null.

d) Zeitabhängigkeit

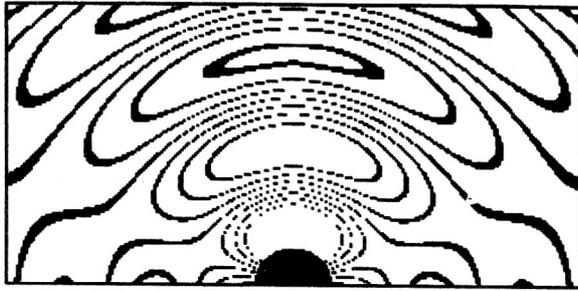
Die Zeitabhängigkeit in den Gln. (39) und (45) gestattet nun, das räumlich-zeitliche Verhalten des Schalldrucks und der Schallschnelle beim Schallausbreitungsvorgang näher und detaillierter zu untersuchen. Damit wird es möglich, aus geeigneten örtlichen und zeitlichen Messungen über Vergleiche mit Rechnungen Aussagen zu den in Frage kommenden, schallerzeugenden Wirtelsystemen zu machen. Um erste Anhaltspunkte dazu zu gewinnen und um ein gewisses Gefühl für das Verhalten des Gesamtsystems der turbulenten Schallentstehung zu entwickeln, ist es zweckmäßig, auf einen grafikfähigen Computer einen kleinen Computer-Grafik-Animations-Film zusammenzustellen. Günstig dafür ist die Darstellung von Isobaren. Besonders interessant ist das zeitliche Verhalten dieser Isobaren im Nahfeld. In ihm laufen viele intensive Umwandlungsprozesse (z. B. Blindleistungstransport) ab. Ihr zeitliches Verhalten kann aber nur ein Film deutlich machen. Einige Ausschnitte aus einem solchen Film sind in den Bildern 5 bis 6 dargestellt.

e) akustische Größen

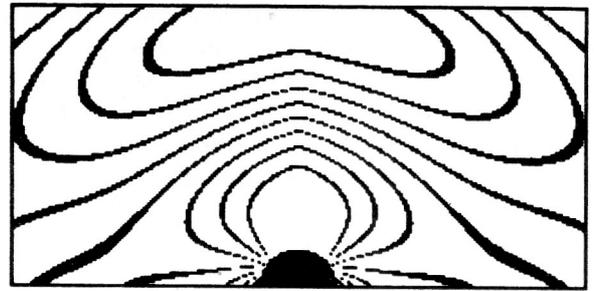
Die Herleitung weiterer akustischer Größen (Schalldruckpegel, Schalleistung u. ä.) ist ausgehend von Gl. (39) auf analytischem Weg leicht möglich.

10. Schlußfolgerungen

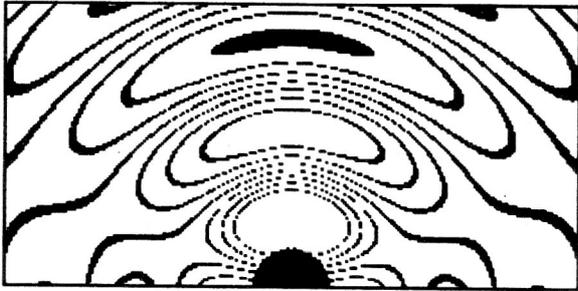
Mit Hilfe der Berechnungsgleichung für den Schalldruck (39) lassen sich Einzelheiten bei der Schallausbreitung (Multipolanteile, Phasenverlauf usw.) untersuchen. Im Mittelpunkt steht das Verhalten des Schallfeldes im Nahfeld. Auf Grund des analytischen Lösungsweges kann der Einfluß der charakteristischen Größen der Wir-



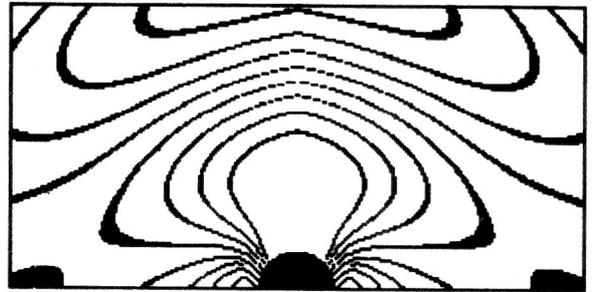
t1



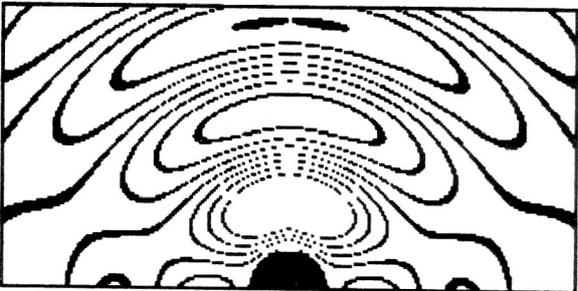
t1



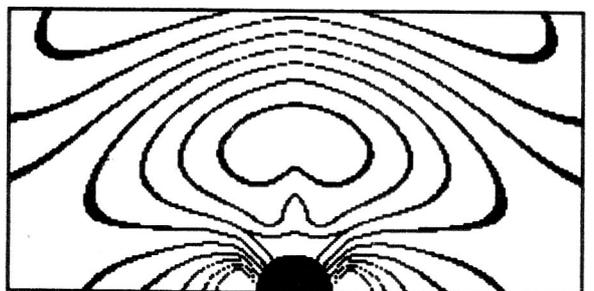
t3



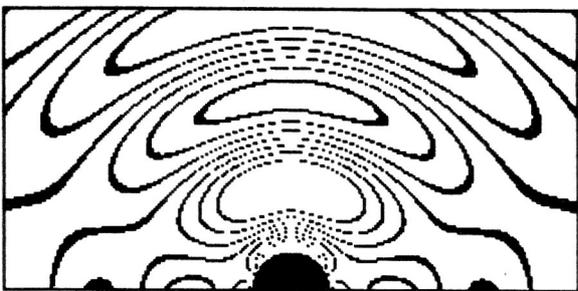
t3



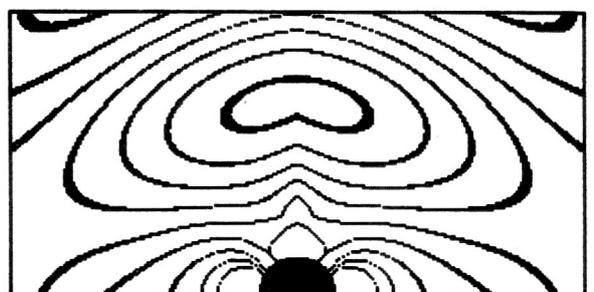
t5



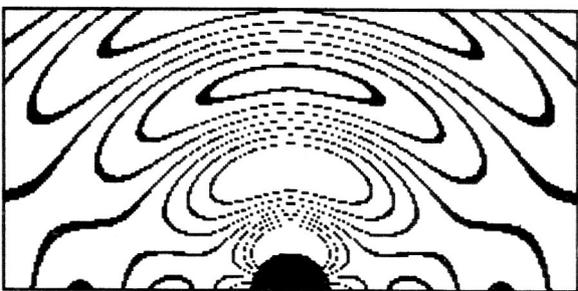
t5



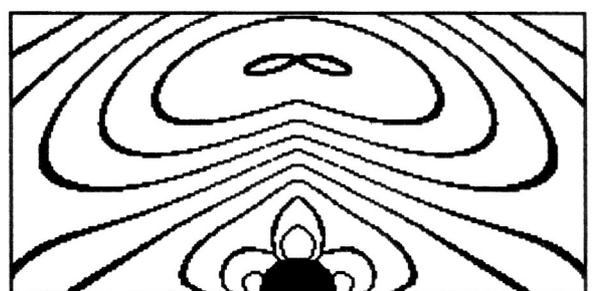
t7



t7



t9



t9

Bild 5
Linien gleichen Schalldruckes im Übergangsbereich Nahfeld – Fernfeld zu unterschiedlichen Zeitpunkten (Wirbelsystem Typ II) – vgl. auch Bild 6

Bild 6
Linien gleichen Schalldruckes im Nahfeld zu unterschiedlichen Zeitpunkten (Wirbelsystem Typ II) – vgl. auch Bild 5

belsysteme auf die Schallausbreitung genau studiert werden. Besonders bei der Überlagerung mehrerer Wirbelsysteme sind hierzu numerische Experimente sinnvoll. Werden diese mit akustischen Messungen (vor allem im Nahfeld) verglichen, können Erfahrungen zur analytischen Modellierung von Strömungen gewonnen werden, die dasselbe oder ähnliche akustische Verhalten wie die turbulente Ausgangsströmung zeigt.

LITERATUR

- [1] Hiller, S.-J.: Die Bestimmung der akustischen Wirkungen im Nah- und Fernfeld eines zweidimensionalen Strömungsfeldes, das mittels Wirbelsystemen modelliert wurde. Diss. A 1988 TU Dresden.
- [2] Albring, W.: Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen. Berlin 1981: Akademie-Verlag.
- [3] Detsch, F.: Über die akustische Wirkung von Wirbelfeldern. Diss. A 1976 TU Dresden.
- [4] Goldstein, M. E.: Aeroacoustic (russ. Übers. Moskva 1981, Masinstrojenie).
- [5] Albring, W.: Der Wirbelschall. Wiss. Z. TU Dresden 26(1977), H. 3/4, S. 717 – 723.

- [6] Albring, W.: Strukturuntersuchung von nichtlinearen Summanden in der Navier-Stokes-Gleichung bei Anwendung auf Wirbelfelder (Manuskript).
- [7] Ribner, H. S.: On the role of the shear term in jet noise. J. of Sound and Vibration (1977), vol. 52, pp. 121 – 132.
- [8] Candel, M. C.: Sound sources radiation in two-dimensional shear flow. AIAA-J. (1983), vol. 21, pp. 221 – 227.
- [9] Strehle, E.: Ebene laminare Wirbelfelder, Maschinenbautechnik (1974, S. 390 – 393).
- [10] Abramowitz, M., Stegun, I. A.: Pocketbook of mathematical functions. Frankfurt/M.: 1984 Verlag H. Deutsch.
- [11] Ryshik, I. M., Gradstein, I. S.: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. Berlin 1957: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Sven-Jürgen Hiller
 Akademie der Wissenschaften der DDR
 Institut für Mechanik
 PSF 408
 Karl-Marx-Stadt
 DDR-9010