

Numerische Berechnung zweidimensionaler Kontaktaufgaben mit Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften der Kontaktzone

Ryszard Buczkowski, Johannes Altenbach

1. Einleitung

Analytische Methoden können in der Kontaktmechanik wegen der sehr komplexen mathematischen Modellierung realer Kontaktprobleme nur zur Lösung einfacher Aufgaben herangezogen werden (Galin, 1980; Gladwell, 1980; Johnson, 1985).

Fortschritte bei der Lösung allgemeiner Aufgaben der Kontaktmechanik wurden durch den Einsatz numerischer Methoden – insbesondere der Finite-Elemente-Methode (FEM) erreicht.

Die FEM wird bei der Lösung von Kontaktproblemen in verschiedenen Vorgehensweisen benutzt. Es sind hier besonders lineare und nichtlineare Optimierungsverfahren (F. D. Fischer, 1974, Jacobi, 1983; U. Fischer u. a. 1987a, 1987b) und die Methode der Variationsungleichungen (Campos u. a., 1982; Oden und Pires, 1983b, 1984) zu nennen. Die Randbedingungen treten in Form von Ungleichungen für die Kontaktspannungen und die Verschiebungen auf. Bei Berücksichtigung allgemeiner Nebenbedingungen werden bei Lösung der Kontaktaufgaben drei Methoden angewandt:

- direkte Methode (Chan und Tuba, 1971; Ohte, 1973; Francavilla und Zienkiewicz, 1975; Wriggers, 1981).
- die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren (Hughes u. a., 1976; Idelberger, 1984; Rothert u. a. 1985; Chaudhary und Bathe; 1986).
- die Penalty- oder Strafmethode (Schomburg, 1979; Oden, 1981; Kikuchi und Song, 1981).

Um die in der Kontaktzone auftretenden nichtumkehrbaren und nichtlinearen Erscheinungen zu modellieren, verwenden manche Autoren besondere Zwischenschicht- oder Kontaktelemente (gap-, interface- bzw. bondelements) (Goodman u. a., 1968; Back u. a., 1973a, 1973b; Schäfer, 1975; Stadter und Weiss, 1979; Feldmann, 1981; Grudziński und Kawiak, 1981, 1982, 1985a, 1985b; Mazurkiewicz und Ostachowicz 1983; Ostachowicz, 1984, Villanueva-Leal und Hinduja 1984).

In verschiedenen Veröffentlichungen wird eine Analogie zwischen dem Fließgesetz in der Plastizitätstheorie und dem Gleitgesetz in der Kontaktzone (Fredriksson, 1976a, 1976b; Michałowski und Mróz, 1978) angegeben.

Besondere Beachtung fanden in den letzten Jahren die Arbeiten von Oden und Pires. Die Grundlage ihrer Theorie hinsichtlich des nichtklassischen Reibungsgesetzes (nonlocal, nonlinear friction law) wurde 1983 publiziert. In einer Serie nachfolgender Beiträge wurden von den Autoren Anwendungsbeispiele dieser Theorie zur Lösung der klassischen Kontaktaufgaben (starrer Stempel, Hertz-Problem, Balken auf Winkler-Bettung,

Signioriniproblem) (1983b, 1984a, 1984b) dargestellt. Diese Theorie bedingt die empirische Bestimmung von Parametern der Kontaktzone, berücksichtigt aber nicht die Kontaktdehnungen in Normalenrichtung. Damit können Effekte in der Kontaktzone, die mit der Oberflächenrauigkeit der Kontaktflächen verbunden sind, nicht allgemein erfaßt werden.

2. Normales und tangenciales Verhalten der Kontaktzone

Die Oberflächen fester Körper sind nicht ideal glatt. Während der technologischen Bearbeitung von Werkstoffen entsteht an ihren Oberflächen eine sogenannte technologische Rauigkeit. Dabei unterscheidet man zwei Arten von Mikroabweichungen vom idealen Oberflächenprofil: die Rauheit und die Welligkeit. Bei der Berührung zweier realer Festkörperoberflächen erfolgt somit kein gleichmäßiger Kontakt zwischen beiden Oberflächen. Nur einzelne Oberflächenbereiche übertragen die auf die Körper wirkenden Kräfte. Die Summe solcher elementaren Kontaktflächenbereiche bildet die tatsächliche oder reale Kontaktfläche A_r (Bild 1).

Die reale Kontaktfläche A_r entsteht im Ergebnis der Verformungen der einzelnen Unebenheiten, d. h. der Rauheit und der Welligkeit. Nach experimentellen Untersuchungen beträgt die reale Kontaktfläche A_r nur wenige Prozent der nominellen Kontaktfläche A_a . Ihre Größe hängt vorrangig von der Normalbelastung ab. Die nominelle Kontaktfläche A_a ist die Fläche, an der sich Körper berühren, die eine ideal glatte Ober-

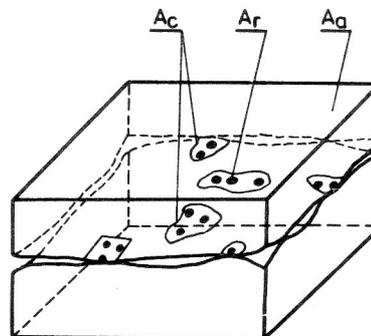


Bild 1

Drei Arten von Berührungsflächen nach Kragelski u. a. [1982]

- A_a – nominelle Kontaktfläche
- A_c – Konturenfläche
- A_r – reale Kontaktfläche

fläche haben würden. Die Konturenfläche A_c stellt die Summe aller Berührungsbereiche vor, soweit sie durch Welligkeiten erzeugt worden sind. Eine ausführliche Beschreibung der Geometrie der realen Oberflächen fester Körper kann man in den Arbeiten von Kragelski u. a. (1982), Demkin und Ryshev (1981) finden.

Entsprechend der Feststellung, daß der Kontakt rauher Oberflächen in diskreter Form erfolgt, kann ein Modell für einen rauhen Körper durch eine Vielzahl von Erhebungen beschrieben werden. Im Interesse der Lösbarkeit und der Anschaulichkeit ist anzustreben, das Modell für eine einzelne Erhebung durch eine möglichst einfache Form zu beschreiben.

Bisher wurden für rauhe Oberflächen folgende Modelle geschaffen und zur Berechnung benutzt: Modell mit Kugelsegmenten, Modell mit Zylindern, Modell mit Kegeln, Modell mit Stäben, Modell mit Pyramiden, Modell mit Ellipsoiden (Kragelski u. a., 1982). Die Vorteile und Nachteile solcher Modelle wurden von Demkin (1970) ausführlich besprochen. Es sei hier darauf hingewiesen, daß von den aufgezählten Arten zur Modellierung der Unebenheiten die Kugel-, Zylinder- und Ellipsoidform den Anforderungen am besten entspricht.

Die zweite Methode, um den Einfluß der Oberflächen auf die Pressungsverteilung und die Verformungen in der Kontaktzone zu berücksichtigen, beruht auf der Modellierung der Oberflächenrauigkeit durch experimentelle Identifikation. Zuerst werden die experimentellen Charakteristiken zwischen Verschiebungen und Belastungen in den real belasteten Preßflächen ermittelt und dann die Charakteristiken mit einfachen mathematischen Gleichungen beschrieben.

Die experimentellen Untersuchungen u. a. von Ostrovski (1965), Levina (1965), Conolly und Thornley (1968), Dolbey und Bell (1971), Levina und Reshetov (1971), Burdekin u. a. (1978b), Grudziński und Konowski (1978), Grudziński u. a. (1979, 1980), Konowski (1984) weisen auf den nichtlinearen Charakter

der Verformungen der Rauigkeitsspitzen in der normalen Richtung infolge der mechanischen Werkstoffbeanspruchung (Bild 2) hin. In der Literatur beschreibt man diese Kurve durch Gl. (2.1):

$$u_n = c_n p_n^m \quad (2.1)$$

u_n – relative Verschiebung in Normalenrichtung (Annäherung der Kontaktfläche beider Proben)

p_n – normale Kontaktspannung

c_n, m – Parameter, die von Werkstoffeigenschaften und Oberflächenbearbeitung abhängig sind.¹⁾

Nach den Untersuchungen von Burdekin u. a. (1978b) ist die Gleichung (2.1) für Kontaktspannungen p_n im Bereich bis 9 MPa richtig. Aus der Erfahrung ist bekannt, daß zum Verschieben eines Körpers relativ zu einem anderen Körper eine bestimmte Schubkraft erforderlich ist (wenn beide Körper mit bestimmtem Druck aufeinander gedrückt werden) und daß, vor dem Beginn einer Makroverschiebung (Gleiten), eine adhesive Mikroverschiebung der Körper existiert.

Die ersten fundierten experimentellen Ergebnisse zu dieser Frage wurden von Verchovski (1926) und Rankin (1927) veröffentlicht (s. Kragelski u. a. 1982). Verchovski führte auch den Begriff der Anfangsverschiebungen ein. Es handelt sich um eine Verschiebung der Oberflächenbereiche, die dem Übergang zum Gleiten vorausgeht. Verchovski stellte dabei fest, daß eine direkte Proportionalität zwischen der Schubkraft und der Verschiebung nur im Anfangsstadium des Schubprozesses existiert. Je nach Annäherung an den Grenzwert der Verschiebung (Grenzverschiebung) zeigt der Zusammenhang zwischen diesen Größen einen nichtlinearen, elastisch-plastischen Charakter (Bild 3). Die umfangreichen experimentellen Untersuchungen von Courtney-Pratt und Eisner (1957) haben gezeigt, daß für wiederholte Belastung, bei denen die Tangentialkraft den zuvor erreichten Wert nicht übersteigt, nur tangential elastische Verschiebungen auftreten.

Die in den folgenden Jahren von Kirsanova (1967), Maksak (1975), Burdekin u. a. (1978b), Masuko u. a. (1974), Koizumi u. a. (1979), Grudziński u. a. (1979, 1980), Konowski (1984) durchgeführten Untersuchungen bestätigen diese Erfahrungen und weisen deutlich auf die Nichtlinearität hin (Bild 3).

Aufgrund dieser Untersuchungen wurde die Abhängigkeit der Schubspannungen p_t von den tangentialen Verschiebungen v_{te} (im elastischen Bereich) ermittelt und analytisch angegeben:

$$v_{te} = \frac{1}{k_{te}} p_t \quad (2.2a)$$

k_{te} – Tangentialkontaktsteifigkeit im elastischen Bereich

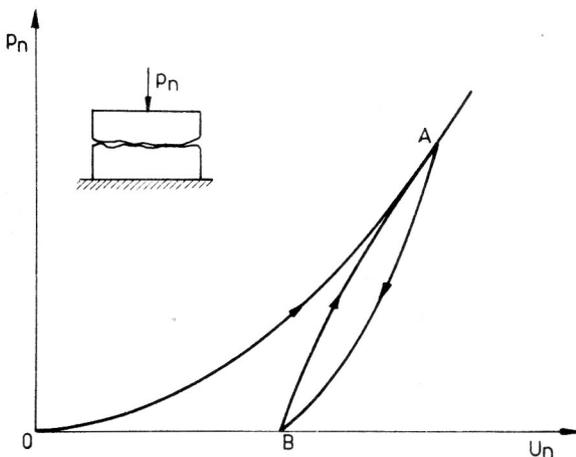


Bild 2

Das Verhalten der Kontaktzone in Richtung der Normalen

OA – Belastungszweig

AB – Entlastungszweig

BA – Kurve der wiederholten Belastung

1) Die bisher in der Literatur angegebene Parameterwerte sind für u_n auf μm und für p_n auf kp/cm^2 bezogen.

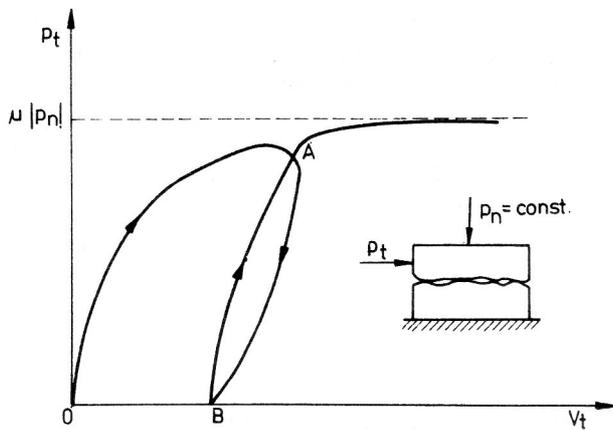


Bild 3
 Das Verhalten der Kontaktzone in Richtung der Tangente
 OA – Belastungszweig
 AB – Entlastungszweig
 BA – Kurve der wiederholten Belastung

Dieser Faktor hängt von der normalen Belastung und dem Zustand der im Kontakt stehenden Oberflächen ab. Mit zunehmender Normalbelastung und Rauheit wird k_t größer (das betrifft auch die Normalkontaktsteifigkeit k_n).

Aufgrund experimenteller Untersuchungen von Kirsanova (1967), Burdekin u. a. (1978b) geben Back u. a. (1973a) an, daß die Abhängigkeit zwischen tangentialer Kontaktsteifigkeit k_{te} und Normaldruck p_n für den elastischen Bereich durch

$$k_{te} = \frac{(p_n)^S}{R} \quad (2.2b)$$

beschrieben werden kann, wobei R und S Parameter sind, deren Werte von den Werkstoffen und der Oberflächenfertigung der Reibpaarung abhängen.

Für die in Gl. (2.1) und (2.2b) enthaltenen Parameter c_n, m, S sind z. B. von Back u. a. (1972) und Grudziński u. a. (1980, 1987) Werte angegeben.

Der Parameter R kann mit Hilfe der Gl. (2.2c) (Back u. a., 1973a)

$$R = 2c_n m (1 + \nu) \quad (2.2c)$$

berechnet werden, wobei ν die Poissonsche Konstante des Materials ist.

Für den elastisch-plastischen Bereich wurde der Zusammenhang zwischen den Schubspannungen p_t und den tangentialen Verschiebungen v_t von Koizumi u. a. (1979) in folgender Form angegeben:

$$v_t = c_s \mu + c_p \mu^n \quad (2.3)$$

c_s, c_p und n sind Parameter, die von der normalen Spannung p_n unabhängig sind, ferner gilt

$$\mu = \frac{p_t}{p_n} < 0.3.$$

Das erste Glied in Gl. (2.3) beschreibt den elastischen, das zweite den plastischen Verformungsanteil.

Die funktionelle Abhängigkeit der Schubspannungen p_t und der tangentialen Verschiebungen v_t wurde von Reshetov und Kirsanova (1970) durch zwei lineare Abschnitte approximiert. Für die tangentiale Verformung (Anfangsverschiebung) gilt die Beziehung:

$$v_t = v_{te} + k_{tp} (v_t - v_{te}) \quad (2.4)$$

dabei sind v_t und v_{te} die relative gesamte und elastische Verschiebung beider Körper

k_{tp} ist die tangentialer Kontaktsteifigkeit im plastischen Bereich, und es gilt $k_{tp} \ll k_{te}$

Um die nichtlinearen Eigenschaften der Kontaktzone zu berücksichtigen, haben Back, Burdekin, Cowley (1972; 1973a) die Beziehungen für die normale und die tangentialer Kontaktsteifigkeit zur Modellierung der Oberflächenrauheit mit der FEM abgeleitet. Den Koeffizienten der Normalkontaktsteifigkeit bestimmt man aus der Ableitung der normalen Kraft nach der normalen Verschiebung. In bezug auf die Einheitsfläche gilt dann

$$k_n = \frac{p_n^{1-m}}{c_n^m} \quad (2.5)$$

k_n – Normalkontaktsteifigkeit.

Back, Burdekin, Cowley (1973b) waren die ersten, die Lösungen für 2D-Kontaktprobleme mittels der FEM mit Berücksichtigung der Kontaktsteifigkeit angegeben haben. Zur Modellierung der Mikrounebenheiten der Kontaktzone mit Hilfe der FEM wurden hier drei Methoden vorgestellt: die hydrostatische, die Platten- und die Federmethode. Am Beispiel des ebenen, auf starrer Unterlage ruhenden Balkens haben die Autoren die Effektivität dieser drei Methoden analysiert. Es wurde dabei die Überlegenheit der Federmethode hervorgehoben, weil sie die tangentialer Kontaktsteifigkeit in die Berechnungen einzubeziehen gestattet.

Lindgren (1973) untersuchte den Einfluß der Mikrounebenheiten auf die Tragfähigkeit der Preß- und Schrumpfverbindungen. In der Arbeit wurden die mechanischen Charakteristiken zur Beschreibung des Verhaltens der Reibungszahl in Abhängigkeit von der elastisch-plastischen Deformation in der Kontaktzone von Schrumpfverbindungen angegeben. Es wurde festgestellt, daß diese Deformation von derselben Größenordnung ist wie die elastische Deformation in der Welle und Nabe und sie einen wesentlichen Einfluß auf die Größe des elastischen Grenzmoments haben.

Chworostuchin u. a. (1980; 1981) ermitteln die Flächenpressung in zylindrischen Preßverbindungen mit Berücksichtigung der Oberflächenbehandlung. Bei der Modellierung der mikrogeometrischen Erhebungen haben die Autoren den Begriff der linearen (1980) bzw. nichtlinearen (1981)-elastischen Deckschicht über die Eigenschaften einer Winklerschen Bettung eingeführt. Kops und Abrams (1984) analysieren den Einfluß der tangentialen Kontaktsteifigkeit k_t auf die thermischen Deformationen in Werkstückverbindungen. Bei der Modellierung der Oberflächenrauheit wurde hier das Federmodell ausgenutzt. Die Steifigkeiten der Federn

in tangentialer und in normaler Richtung wurden mit Hilfe der im Artikel von Burdekin u. a. (1978a) angenommenen Charakteristiken angenommen.

Villanueva-Leal und Hinduja (1984) stellen ein erweitertes Kontaktmodell mit der FEM vor. Das Verhalten in der Kontaktzone in normaler Richtung wurde nach Gleichung (2.1) beschrieben. Die die tangentiale Charakteristik beschreibende Kurve gewann man für konstante normale Belastung und veränderliche tangentiale Belastung. Diese Kurve wurde abschnittsweise mit Hilfe von Polynomen dritten Grades beschrieben, die den Belastungszeit (2.6a), den Entlastungszeit (2.6b) und den wiederholten Belastungszeit (2.6c) darstellen:

$$p_t = a_1 v_t + a_2 v_t^2 + a_3 v_t^3 \quad (2.6a)$$

$$p_t = b_1 v_t + b_2 v_t^2 + b_3 v_t^3 \quad (2.6b)$$

$$p_t = c_1 v_t + c_2 v_t^2 + c_3 v_t^3 \quad (2.6c)$$

Die Parameterwerte bei v_t , v_t^2 , v_t^3 wurden als Funktionen der Kontaktspannung p_n bestimmt.

Die Systemsteifigkeitsmatrix wird für jedes Lastinkrement berechnet. Es wurden die Lösungen für 2D- und 3D-Kontaktaufgaben angegeben.

Die Analyse der Kontaktspannungen und Kontaktverschiebungen in den gefügten Teilen des rotationssymmetrischen Modells der Schraubenverbindung war Gegenstand der Arbeiten von Grudziński und Kawiak (1981b, 1982). Kawiak (1984) und Grudziński und Kawiak (1985a, 1985b) stellen ein räumliches Modell für eine FEM-Berechnung der Schraubenverbindung mit Berücksichtigung der Kontaktsteifigkeit vor. Die mechanische Charakteristik in normaler Richtung wurde nach Gl. (2.1) und in tangentialer Richtung als elastisch-idealplastisch angenommen. Zur Lösung dieses nichtlinearen Problems wurde eine iterative Methode angewandt. Von Grudziński u. a. (1987) wurden die theoretischen Grundlagen und experimentelle Ergebnisse für wichtige, im Maschinenbau auftretende Kontaktprobleme mit Berücksichtigung der Kontaktnachgiebigkeit angegeben.

Die Besprechung der verschiedenen Modelle bei der Anwendung für die Lösung der 2D- und 3D-Kontaktaufgaben ist in der Arbeit von Martins und Oden (1985) angegeben worden.

In der vorliegenden Arbeit werden Lösungen für statische Kontaktaufgaben unter Berücksichtigung des Einflusses der Oberflächenrauigkeiten der Kontaktzone diskutiert, bei denen zur Modellierung des nichtlinearen Verhaltens in der Kontaktzone ein spezielles Kontaktfederelement verwendet wird. Für die sich im Kontakt befindlichen Körper wird linear-elastisches und isotropes Materialverhalten vorausgesetzt.

Die Steifigkeitsmatrix des Federelements wird aus den mechanischen Kennwerten der Kontaktzone berechnet. Zur numerischen Lösung wird die FEM benutzt.

In Anlehnung an den Algorithmus, der von Grudziński u. a. (1981) und Grudziński und Kawiak (1981) angegeben wurde, wird ein FORTRAN-Programm erarbeitet und getestet.

Das vorgestellte Finite-Elemente-Verfahren unterscheidet sich von den bisherigen Vorgehensweisen dadurch, daß zur Begrenzung der tangentialen Kräfte in der Kontaktzone ein oberflächenverfestigendes Reibungsgesetz $\mu = \mu(v_{te})$ eingeführt wurde. Anhand ausgewählter Beispiele wird durch Vergleich mit Ergebnissen für Kontaktflächen ohne Rauigkeit und Coulombscher Reibung der Einfluß der Oberflächenrauigkeit bewertet. Ferner werden die eigenen numerischen Ergebnisse mit Ergebnissen anderer Autoren verglichen.

3. Definition eines GAP-Elementes

Einen Ausschnitt des diskretisierten Systems zeigt Bild 4a. Zwei Körper A und B werden so in finite Elemente unterteilt, daß der Knoten j des oberen Körpers A sich im Kontakt mit dem Knoten k des unteren Körpers B befindet. Die im Kontakt stehenden Knoten stellen die Kontaktpaare j,k dar.

In der Berührungsfläche wird ein lokales Koordinatensystem η_1, η_3 definiert. Das lokale Koordinatensystem ist mit dem unteren Körper B verbunden. Die Achse η_3 hat die Richtung des normalen Einheitsvektors der Berührungsfläche bezeichnet.

Um das nichtlineare Verhalten der Kontaktzone zu modellieren, wird zwischen zwei sich berührenden Körpern, d. h. zwischen den Knotenpaaren (j,k) ein Kontaktelement (GAP-Element) eingetragen, das über nichtlineare Eigenschaften verfügt. Das Kontaktelement besteht aus zwei fiktiven Federn der Länge Null (Bild 4b).

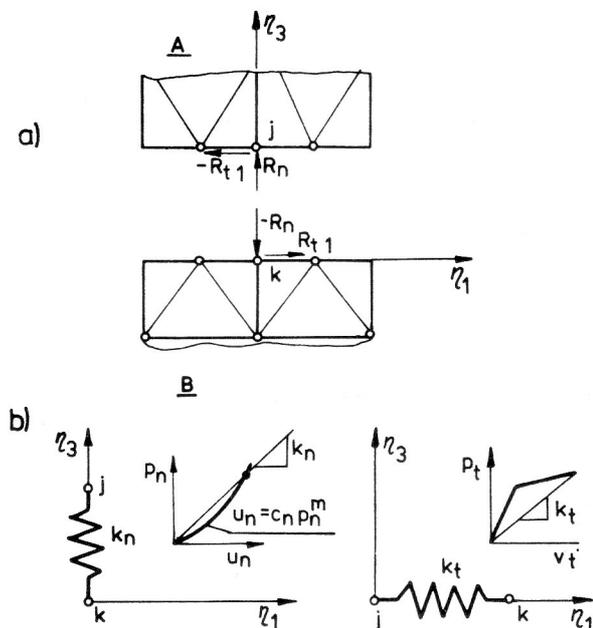


Bild 4a
Kontaktkräfte in einem Kontaktpaar (j,k)

Bild 4b
Das Modell des Kontaktfederelements
 k_n – Kontaktsteifigkeit in normaler Richtung
 k_t – Kontaktsteifigkeit in tangentialer Richtung

Das Kontaktelement GAP kann sich in einem von drei Zuständen befinden:

- Adhäsionszustand (das GAP-Element ist „geschlossen“, die Kontaktfläche der Körper bleibt unverrückbar)
- Gleitzustand (das GAP-Element ist „geschlossen“, die Kontaktflächen verschieben sich gegeneinander)
- Klaffungszustand (das GAP-Element ist „offen“)

Im Falle des Adhäsions- bzw. Gleitzustandes deformiert sich das Kontaktelement in der normalen Richtung η_3 und der tangentialen Richtung η_1 . Die Differenz der Verschiebungen der Federknotenpunkte bestimmt der Vektor

$$\{u\}^T = \{v_t, u_n\} \quad (3.1)$$

dabei sind v_t , u_n die Differenzen der Verschiebungen der Knoten j und k , in der tangentialen Richtung (berechnet nach Gln. 2.2a und 2.2b) und in der Normalenrichtung (berechnet nach Gl. 2.1), k_t und k_n sind die tangentiale und die normale Kontaktsteifigkeit des GAP-Elements.

Von dem Kontaktelement, welches einen irreversiblen Reibvorgang simulieren soll, werden folgende Eigenschaften gefordert:

- das Kontaktelement GAP hat keine Abmessung (Punktelement),
- in der Normalrichtung können nur Druckkräfte $-\eta_3$ übertragen werden,
- in Tangentialrichtung können Kräfte in Richtung $\pm \eta_1$ übertragen werden.

Die Elementsteifigkeitsgleichung für jedes Kontaktelement in der lokalen Koordinaten η_1, η_3 lautet:

$$\{R_L\} = [k_{gap}] \{u_L\} \quad (3.2)$$

$$[k_{gap}] = \begin{bmatrix} k_t & 0 & -k_t & 0 \\ 0 & k_n & 0 & -k_n \\ -k_t & 0 & k_t & 0 \\ 0 & -k_n & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

k_{gap} – Steifigkeitsmatrix des GAP-Elements

R_L – Kontaktkräfte in den lokalen Koordinaten

$$\{R\}^T = \{R_{tj}, R_{nj}, R_{tk}, R_{nk}\}$$

u_L – Verschiebungen in den lokalen Koordinaten

$$\{u_L\}^T = \{v_{tj}, u_{nj}, v_{tk}, u_{nk}\}$$

Weil die Verschiebungen der Knoten der Körper A und B in den globalen Koordinaten bestimmt werden, besteht die Notwendigkeit der Umformung der Gleichung (3.2) aus den lokalen Koordinaten in die globalen Koordinaten (Bild 5)

$$\{u_L\} = [\Theta_i] \{u_G\} \quad (3.4)$$

u_G – Verschiebungen der Kontaktknoten in den globalen Koordinaten $u_G^T = v_{xj}, u_{yj}, v_{xk}, u_{yk}$

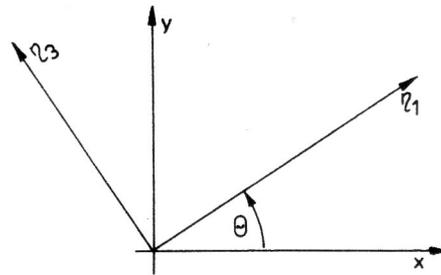


Bild 5
Globale Koordinaten x, y und lokale Koordinaten η_1, η_3

$[\Theta_i]$ -Matrix der Richtungskosinus für jedes GAP-Element. Die Matrix $[\Theta_i]$ ist für jedes Element gleich, d. h. $[\Theta_i] \equiv [\Theta]$.

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 & 0 \\ \Theta_{12} & \Theta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{11} & \Theta_{21} \\ 0 & 0 & \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}$$

wobei

$$\Theta_{11} = \cos(\eta_1, x), \quad \Theta_{12} = \cos(\eta_1, y)$$

$$\Theta_{21} = \cos(\eta_3, x), \quad \Theta_{22} = \cos(\eta_3, y)$$

η_1, η_3 – Achsen der lokalen Koordinaten

x, y – Achsen der globalen Koordinaten

Der Vektor der Kontaktkräfte in den globalen Koordinaten wird wie folgt geschrieben:

$$\{R_G\} = [\Theta]^T \{R_L\} \quad (3.6)$$

mit

$$\{R_G\} = \{R_{xj}, R_{yj}, R_{xk}, R_{yk}\}$$

Wendet man Gl. (3.6) bei Berücksichtigung der Gln. (3.2) und (3.4) an, erhält man das Gleichungssystem für das Kontaktelement in globalen Koordinaten:

$$\{R_G\} = [k_{gap}]_G \{u_G\} \quad (3.7)$$

mit

$$[k_{gap}]_G = [\Theta]^T [k_{gap}]_L [\Theta]$$

4. Steifigkeitsmatrix des GAP-Elements

Um das Konvergenzverhalten zu verbessern, wird in der vorliegenden Arbeit eine modifizierte Iterationstechnik angewandt (Back u. a., 1973b; Kawiak, 1984). Von dem zweiten Iterationsschritt an wird zur Berechnung der Steifigkeiten der GAP-Elemente der arithmetische Mittelwert der aus zwei vorhergehenden Iterationen erhaltenen Kontaktknotendeformationen benutzt (Bild 6):

$$\{u_n\} = \{w_j\}_i - \{w_k\}_i \quad (4.8a)$$

$$\{v_t\} = \{v_j\}_i - \{v_k\}_i \quad (4.8b)$$

v_j, v_k, w_j, w_k – tangentielle und normale Verschiebungen der Kontaktknoten

Es werden weiter die normalen und tangentialen (R_n und R_{t1}) Kontaktkräfte berechnet:

$$R_{ni} = k_{ni} u_{ni} \quad (4.9)$$

für $u_{ni} < 0$ gilt:

$$R_{t1i} = k_{ti} v_{ti} \quad (4.10)$$

Nach Berechnung der Kontaktkräfte prüft man, in welchem Zustand sich das GAP-Element befindet (Adhäsions-, Gleit- bzw. Klaffungszustand). Für $u_{ni} \geq 0$ wird in der nächsten Iteration angenommen, daß das GAP-Element „offen“ ist, d. h. $[k_{gap}] = 0$.

Für die zweite und die folgenden Iterationen berechnet man wieder die Steifigkeitsmatrix des GAP-Elements entsprechend Gl. (3.3).

Für den Adhäsionszustand wird mit Hilfe der Gl. (2.1), (4.3) und (4.4) die neue Steifigkeitsmatrix $[k_{gap}]$ ermittelt:

$$k_{ni} = \frac{A_i}{c_n} \left[\frac{|u_n^{i-1,l}|}{c_n} \right]^{\frac{1-m}{m}} \quad (4.11a)$$

$$k_{ti} = \frac{A_i}{R} \left[\frac{|u_R^{i-1,l}|}{c_n} \right]^{\frac{S}{m}} \quad (4.11b)$$

$u_n^{i-1,l}$ – arithmetischer Mittelwert der normalen Kontaktdeformation berechnet nach Gl. (4.1)

Weil die Knotenverschiebungen der Struktur klein sind, wird für jeden Iterationsschritt konstante Steifigkeitsmatrix $[K_{AB}]$ der Körper A und B vorausgesetzt.

Für die zweite und folgenden Iterationen erhält man somit:

$$[K]^r = [K_{AB}] + \sum_i^{e2} [k_{gap}]^r \quad r = 2, 3, \dots \quad (4.12)$$

4.2. Gleitmodell

4.2.1. Reibungskoeffizient

Aus den experimentellen Untersuchungen ist bekannt, daß der Reibungskoeffizient μ nicht konstant ist und von vielen Faktoren, u. a. von der Belastung, der Oberflächenrauigkeit u. a. Eigenschaften der Körper abhängig ist.

In dem besprochenen Modell wird der Reibungseinfluß berücksichtigt, indem eine härtende (oberflächenverfestigende) Reibung eingeführt wird.

Nach Fredriksson (1975) wurde angenommen, daß der Reibungskoeffizient direkt vom sog. effektiven Gleiten der Kontaktzone v_e abhängt. Die Kurven $\mu = \mu(v_e)$ haben denselben Charakter und dieselbe Form und können wie folgt beschrieben werden:

$$\mu = \mu_m [1 - (1 - \beta) \exp(-n v_e)] \quad (4.13)$$

μ_m – ist der makroskopische (maximale) Reibungskoeffizient. Er nimmt mit der Steigerung der Kontaktspannungen und mit der Verminderung der Oberflächenrauigkeit zu.

β – definiert den anfänglichen Reibungskoeffizienten, n – Härtingsgrad (Verfestigungsgrad),

$v_e = v_{tG}$ – effektives Gleiten, berechnet nach Gl. (4.17).

4.2.2. Tangentiale Kontaktsteifigkeit beim Gleiten

Gleiten tritt an bestimmten Knotenpaaren der Kontaktfläche auf, wenn:

$$|R_{tG}^i| = |k_t^i v_t^i| > \mu(v_{tG}^i) |R_n^i| \quad (4.14)$$

R_{tG}^i – Gleitkraft an der Kontaktzone,

i – Nummer des GAP-Elements,

$\mu(v_{tG}^i)$ – Reibungskoeffizient bestimmt nach (4.13)

Das Auftreten des Gleitens erfordert eine andere Modellierung der tangentialen Steifigkeit des Kontaktelements (Bild 7).

Für diesen Fall wird eine tangentielle Steifigkeit $k_{tG} \ll k_t$ (in dieser Arbeit $k_{tG} = 10^{-4} k_t$) angenommen und eine neue Kontaktsteifigkeit des GAP-Elements wie folgt ermittelt:

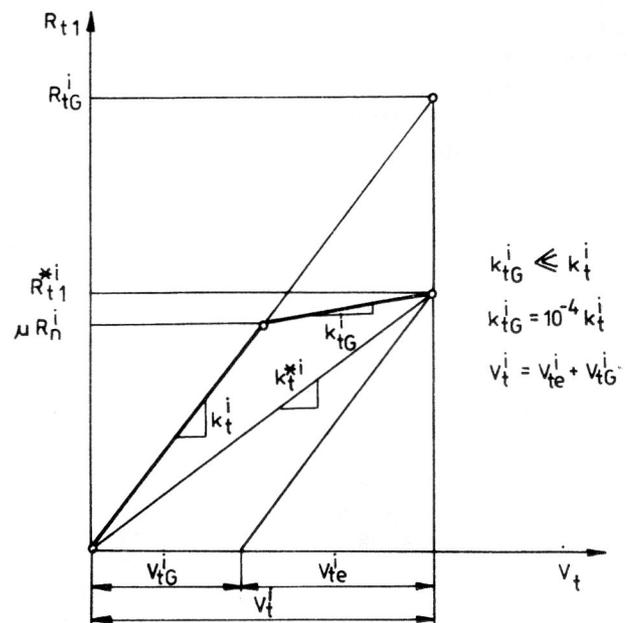


Bild 7

Modifizierte Kontaktsteifigkeit in tangentialer Richtung beim Auftreten des Gleitens

2) Fredriksson (1975, 1976a) unterscheidet das effektive v_e und gemessene Gleiten v_m . In unserem Fall entspricht dem effektiven Gleiten (irreversible slip) der Gleitwert v_{te} und dem gemessenen Gleiten die gesamte tangentielle Verschiebung v_t .

$$R_{t1}^{*i} = \text{sign} [\mu(v_{tG}^i) |R_n^i| + k_{tG}^i [|v_t^i| - \frac{\mu(v_{tG}^i) |R_n^i|}{k_t^i}]] \quad (4.15)$$

sign. = +1 für $v_t^i \geq 0$

sign. = -1 für $v_t^i < 0$

$$k_t^{*i} = \frac{R_{t1}^{*i}}{|v_t^i|} \quad (4.16)$$

v_{tG}^i – Gleitwert, bestimmt man nach Gl. (4.17)

$$v_{tG}^i = |v_t^i| - \frac{\mu(v_{tG}^i) |R_n^i|}{k_t^i} \quad (4.17)$$

Der Iterationsvorgang ist beendet, wenn in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen der Unterschied zwischen den Berechnungsergebnissen (z. B. zwischen den Knotenverschiebungen an der Kontaktzone) in der vorherbestimmten Toleranz bleibt.

5. Numerische Beispiele

5.1. Rechteckscheibe auf nichtlinearer Winkler-Bettung

Als Testbeispiel ist eine durch eine mittige Einzelkraft belastete Rechteckscheibe auf starrer Unterlage (Bild 8). Die Kontaktzone wurde mit Kontaktfederelementen modelliert und die starre Unterlage über eine Befestigung der unteren Federknoten simuliert. Die Deformation des Scheibenkontaktrandes ist gleich den Verschiebungen der oberen Federknoten. Dieses Beispiel wurde aus folgenden Gründen ausgewählt. Es gibt experimentelle Untersuchungen zur Deformation der auf der rauhen starren Unterlage liegenden Rechteckscheibe (Levina, 1965; Levina, 1967; Levina und Reshetov, 1971), und es stehen FEM-Lösungen nach der iterativen Methode (Back u. a. 1973a) und der inkrementellen Methode

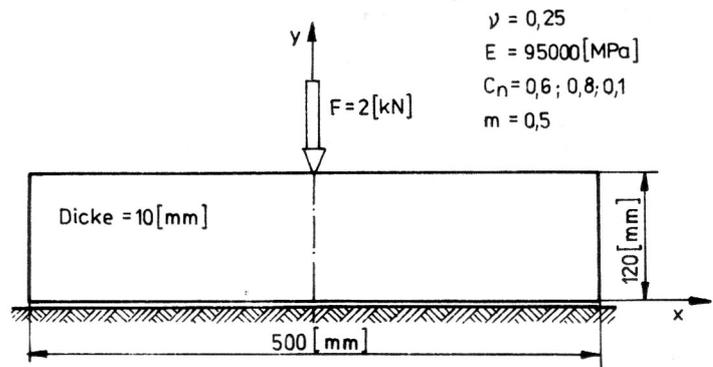


Bild 8
Einzelkraftbelastete Rechteckscheibe auf einer starren Halbebene

(Villanueva-Leal und Hinduja, 1984) zur Verfügung. Weil die zum Vergleich herangezogenen FEM-Berechnungen die tangentialen Kontaktsteifigkeit vernachlässigen, werden in der vorliegenden Arbeit die Berechnungen alternativ mit und ohne Berücksichtigung der tangentialen Kontaktsteifigkeit k_t vorgestellt. Zur Berechnung wurden für Gl. (2.5) die Parameterwerte $c_n = 0.1, 0.6, 0.8$ und $m = 0.5$ angenommen. Das tangential Verhalten der Kontaktzone wird mit den Parametern $R = 1.3, S = 0.5, \mu_m = 0.2$ und $\beta = 1.0$ bestimmt. Die Ergebnisse werden auf den Bildern 9 und 10 vorgestellt. Bild 9 zeigt die Kontaktspannungen zwischen Rechteckscheibe und starrer Halbebene. Bild 10 zeigt die dimensionslosen normalen Verschiebungen der unteren Fläche der Rechteckscheibe. Die Zahlenwerte (die maximalen Druckspannungen und die maximalen Verschiebungen) sind aus der Tabelle 1 zu entnehmen.

Die Berechnungen einer Rechteckscheibe mit Berücksichtigung der tangentialen Kontaktsteifigkeit und bei der Annahme der Coulombschen Reibung ($\mu = \text{konst.}$) wurde in der Arbeit von Grudziński (1984) vorgestellt.

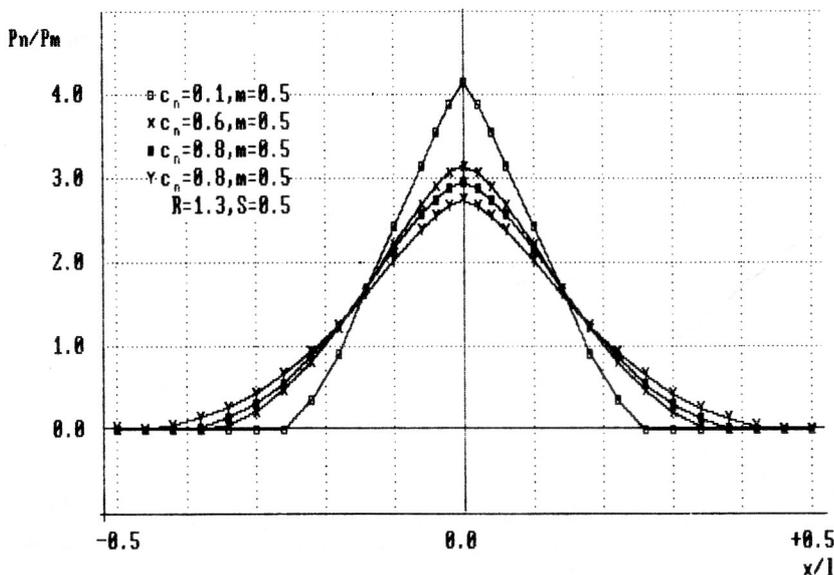


Bild 9
Dimensionslose Druckspannungsverteilung zwischen Rechteckscheibe und starrer Halbebene

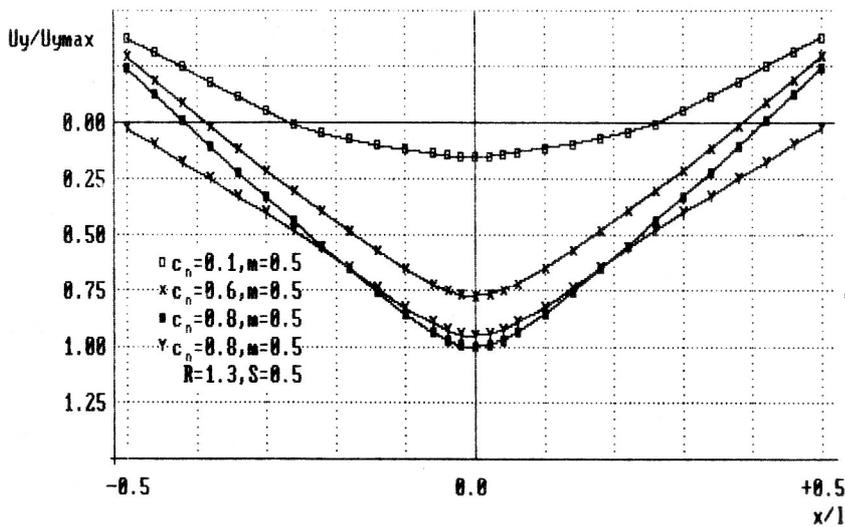


Bild 10
Normale Verschiebungen der
Kontaktknoten der Rech-
teckscheibe

Tabelle 1
Maximale Druckspannungen und Deformationswerte für den
Fall der Rechteckscheibe auf starrer Halbebene

	$c_n = 0.8$ $m = 0.5$		$c_n = 0.6$ $m = 0.5$	
	$u_{y\max}$ μm	p_n MPa	$u_{y\max}$ μm	p_n MPa
Eigene Ergebnisse $k_{\text{gap}} = 0$	2.720	1.156	2.104	1.236
Eigene Ergebnisse $k_{\text{gap}} \neq 0$ ($R = 1.3, S = 0.5$) $n = 275, \mu_m = 0.2, \beta = 1.0$	2.598	1.073	2.004	1.137
Back, N. u. a. (1973b) 'Spring method'	2.70	1.08	2.00	1.18
Villanueva-Leal und Hinduja (1984)	2.90	---	---	---
Experimentelle Ergebnisse nach Levina und und Reshetov (1965)	3.40	---	2.10	---
Analytische Lösung für lange Balken auf Winkler-Bettung ¹⁾	3.092	---	2.491	---

$$1. \quad u_{y\max} = \frac{P}{2k_n} \sqrt{\frac{k_n}{4EI}}$$

wobei

$$k_n = \frac{p_m^{1-m}}{c_n^m}$$

p_m – mittlere Kontaktspannung

E – Elastizitätsmodul des Balkens

I – Flächenträgheitsmoment des Balkens

5.2. Elastischer Stempel auf elastischer Unterlage (Bild 11)

Mit diesem Beispiel wird der Einfluß der Oberflächenrauigkeit auf das Verhalten der Kontaktzone für den Fall zweier elastischer sich berührender Körper vorgestellt. Die äußere Belastung wird hier durch eine Flächenlast p_0 in der Normalrichtung und αp_0 in der Tangentialrichtung aufgebracht. Dieses Beispiel wurde unter Berücksichtigung des Coulombschen Reibungsgesetzes ausführlich von Fredriksson (1976a, 1976b) und von Altenbach und Buczkowski (1988) analysiert. Das starre Stempelproblem auf elastischer Halbebene (unter der

Annahme einer linearen elastischen Winkler-Bettung) wurde erstmalig von Shtajerman (1949) gelöst. Die analytischen Lösungen dieses Problems mit einer nichtlinearen Winkler-Bettung kann man in den Arbeiten von Rabinovitch (1979), Aleksandrov und Mhitarjan (1983) bzw. bei Kudisch (1987) finden. Die vorliegende Arbeit stellt die Ergebnisse für zwei elastische Körper vor, die sich über eine nichtlineare Zwischenschicht, die die Oberflächenrauigkeit simuliert, berühren.

Tabelle 2 zeigt die Druckverteilung für verschiedene Parameter der Kontaktzone. Bild 12 zeigt die tangentialen Kräfte im Vergleich zu den Reibungskräften für ver-

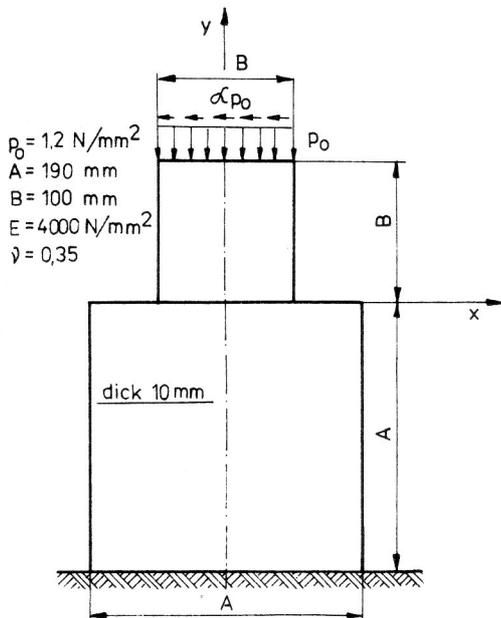


Bild 11
Elastischer Stempel auf einer elastischen Unterlage

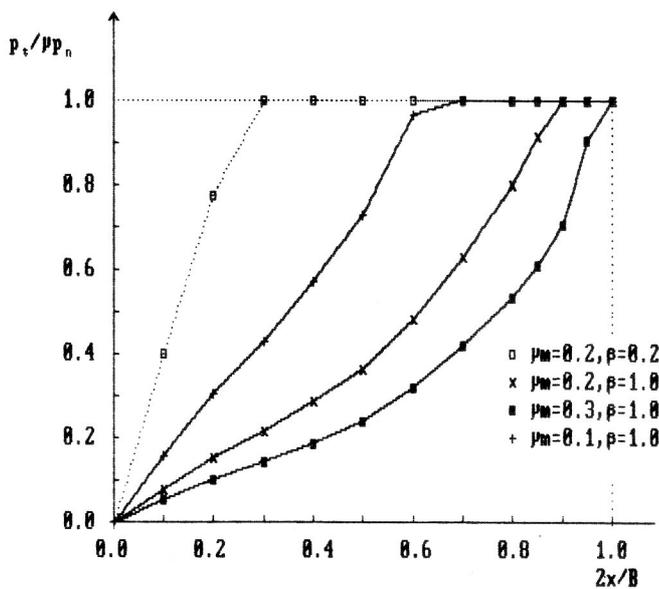


Bild 12
Vergleich der tangentialen Kräfte p_t und der Reibungskräfte $\mu(v_{tG})p_n$ für elastischen Stempel auf elastischer Unterlage: $n = 275 [1/mm]$

schiedene Reibungskoeffizienten und dieselben Parameterwerte der Rauigkeit ($c_n = 1.0, m = 0.5, R = 1.3, S = 0.5$). Es ist bemerkenswert, daß die Normalverschiebungen in der Kontaktzone nur gering von den Reibungskoeffizienten abhängen, aber diese großen Einfluß auf die Gleitwerte der Kontaktzone haben (Tabelle 3). Das Weglassen der tangentialen Kontaktsteifigkeit verursacht, daß die Gleitwerte v_G im Vergleich zu den Berechnungen mit der Berücksichtigung der Tangen-

Tabelle 2
Druckverteilung zwischen elastischem Stempel und starrer Unterlage für verschiedene Parameterwerte der Kontaktzone: $\mu_m = 0.2, \beta = 1.0, n = 275 [1/mm]$.

2x/B	p_n [MPa]		
	$c_n = 2.0, m = 0.5$ $R = 2.6, S = 0.5$	$c_n = 1.0, m = 0.5$ $R = 1.3, S = 0.5$	$c_n = 0.3, m = 0.5$ $R = 0.39, S = 0.5$
0.00	0.8569	0.8519	0.8510
0.10	0.8532	0.8471	0.8434
0.20	0.8617	0.8565	0.8556
0.30	0.8599	0.8504	0.8452
0.40	0.8679	0.8548	0.8469
0.50	0.8915	0.8777	0.8699
0.60	0.9384	0.9278	0.9245
0.70	0.9708	0.9478	0.9318
0.80	1.0764	1.0508	1.0265
0.85	1.1604	1.1349	1.1000
0.90	1.2693	1.2441	1.1898
0.95	1.5318	1.5671	1.4967
1.00	2.1603	2.6032	3.1759

tialkontaktsteifigkeit entschieden größer sind. Der Einfluß der tangentialen Belastung auf die Deformation der oberen Fläche der elastischen Unterlage stellt Bild 13 vor. Die Autoren [2] geben für dieses Beispiel und bei der Annahme des idealen Reibungsmodells die maximale Normalverschiebung $u_{y \max} = 0.0482$ mm an.

5.3. Starrer, hohler Zylinder auf elastischem Halbraum mit nichtlinearer elastischer Zwischenschicht (Bild 14)

Diese Aufgabe wurde unter Berücksichtigung des idealen Coulombschen Reibungsgesetzes von Altenbach und Buczkowski (1988) behandelt. Dort wird ebenfalls auf weitere Literatur verwiesen.

Wegen der besonderen Bedeutung dieser Aufgabe für die Ingenieurpraxis (starres, in elastische Werkstoffe eindringendes Werkzeug) wird hier die Lösung noch einmal unter Berücksichtigung der Oberflächenrauigkeit betrachtet.

Auf Bild 15 wurde die Deformation w_z der oberen Fläche des Halbraumes in Beziehung zur Zylinderabsenkung w_0 dargestellt

Mit der Vergrößerung der Kontaktnachgiebigkeit (größere c_n -Werte) wird die Zylinderabsenkung ($w_0 = 0.0261$ mm für $c_n = 2.0, w_0 = 0.0210$ mm für $c_n = 0.8, w_0 = 0.0178$ mm für $c_n = 0.001$) größer. Die Deformation der oberen Fläche des Halbraumes ist für „glatte“ Oberflächen ($c_n = 0.001, \mu = 0.0$) gleichmäßig längs der Kontaktzone ($w_z/w_0 = 1.0$).

Es soll die Tatsache unterstrichen werden, daß man für einen „theoretischen“ Wert $c_n = 0.001$ (in der Literatur wird für c_n als kleinster Wert 0.15 angegeben) und bei der Vernachlässigung der tangentialen Kontaktsteifigkeit die Ergebnisse mit denen für das ideale Reibungsmodell (keine Rauigkeit, $\mu = 0$) übereinstimmen. Auf Bild 16 ist die Druckverteilung für verschiedene Parameterwerte der Kontaktzone dargestellt. Die auf den

Tabelle 3

Relative tangentielle Verschiebungen v_t und Gleitwerte v_{tG} in der Kontaktzone für den Fall des elastischen Stempels auf elastischer Unterlage für verschiedene Reibungskoeffizienten $\mu(v_{tG})$ und dieselben Parameterwerte der Kontaktzone: $c_n = 1.0$, $m = 0.5$, $R = 1.3$, $S = 0.5$, $n = 275 [1/mm]$.

2x/B	$\mu_m = 0.3, \beta = 0.3$		$\mu_m = 0.2, \beta = 0.2$		$\mu_m = 0.2, \beta = 1.0$		$\mu = 0.001, \beta = 1.0$		[2] ($\mu = 0.0$)	
	$v_t \mu m$	$v_{tG} \mu m$	$v_t \mu m$	$v_{tG} \mu m$						
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	0.052	0.000	0.052	0.000	0.052	0.000	0.051	0.048	0.948	0.948
0.20	0.100	0.000	0.100	0.000	0.100	0.000	0.100	0.096	1.895	1.895
0.30	0.141	0.000	0.140	0.011	0.141	0.000	0.140	0.137	2.824	2.824
0.40	0.188	0.000	0.188	0.052	0.188	0.000	0.187	0.184	3.808	3.808
0.50	0.243	0.000	0.243	0.099	0.243	0.000	0.243	0.239	4.818	4.818
0.60	0.331	0.025	0.331	0.172	0.331	0.000	0.331	0.328	5.858	5.858
0.70	0.437	0.111	0.437	0.264	0.437	0.000	0.437	0.434	6.966	6.966
0.80	0.579	0.216	0.579	0.380	0.579	0.000	0.583	0.579	8.126	8.126
0.85	0.681	0.291	0.682	0.464	0.681	0.000	0.689	0.685	8.825	8.835
0.90	0.820	0.392	0.822	0.577	0.819	0.049	0.835	0.831	9.547	9.547
0.95	1.130	0.609	1.133	0.823	1.129	0.275	1.155	1.151	10.41	10.41
1.00	1.637	0.903	1.641	1.182	1.633	0.554	1.673	1.667	10.97	10.97

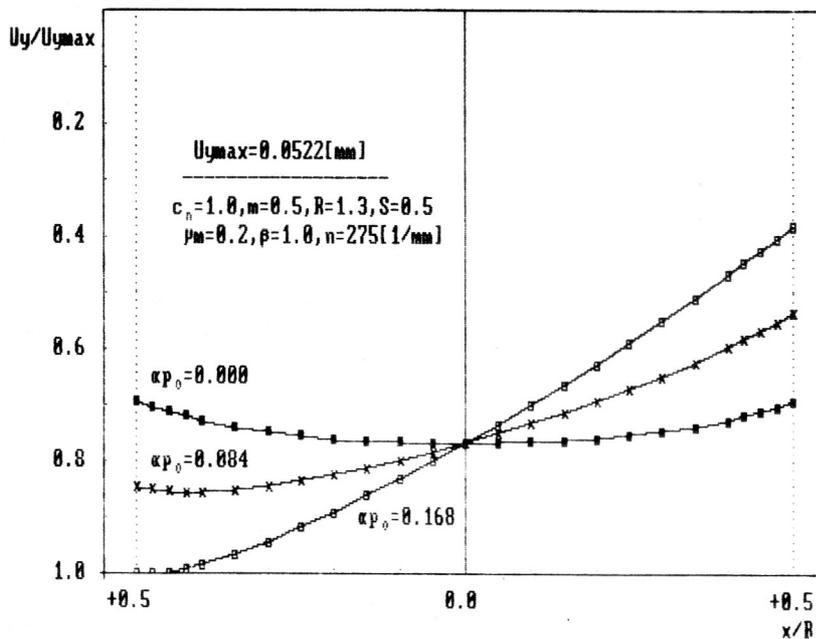


Bild 13

Einfluß der tangentialen Belastung auf die Deformation der unteren Fläche des elastischen Stempels: $\mu_m = 0.2$, $\beta = 1.0$, $c_n = 1.0$, $m = 0.5$, $R = 1.3$, $S = 0.5$.

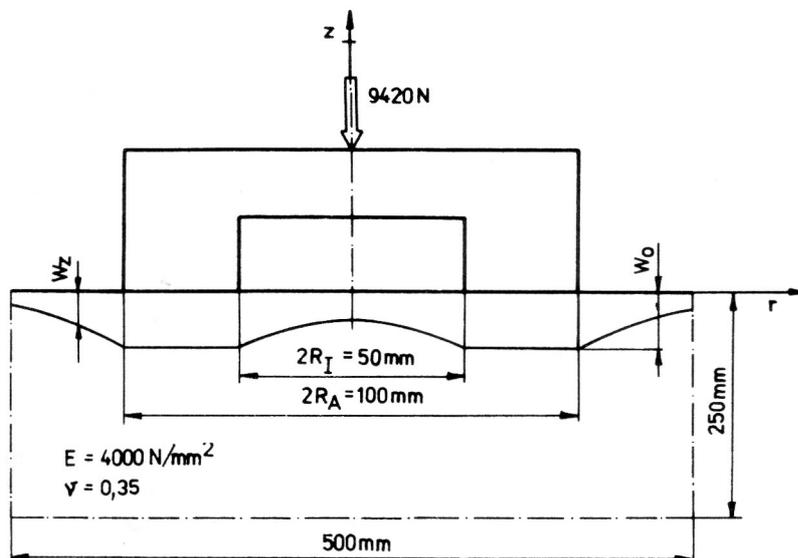


Bild 14

Starrer hohler Zylinder auf elastischem Halbraum

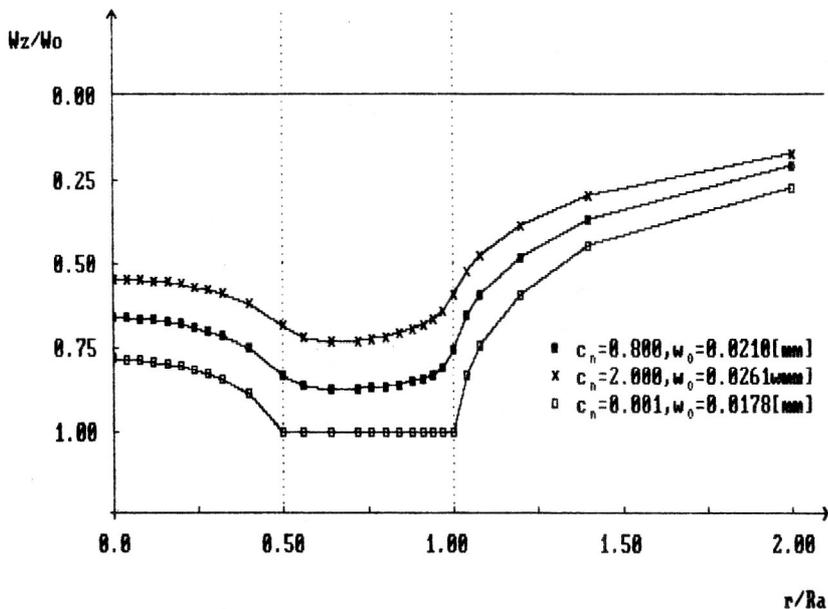


Bild 15
Deformation der oberen Fläche des Halbraumes w_z im Verhältnis zur Zylinderabsenkung w_0

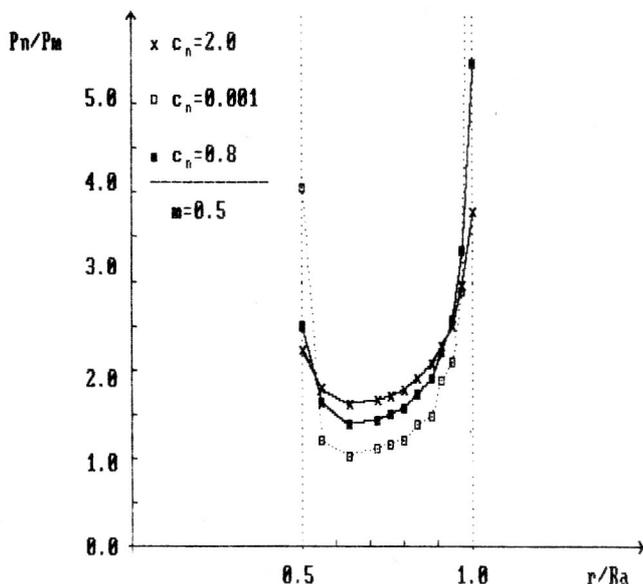


Bild 16
Dimensionslose Druckspannungen zwischen dem hohlen Zylinder und dem elastischen Halbraum

Bildern 15 und 16 vorgestellten Ergebnisse wurden beim Weglassen der tangentialen Kontaktnachgiebigkeit und bei der Voraussetzung $m = 0.5$ erreicht. Für große Kontaktnachgiebigkeit (kleine Kontaktsteifigkeit) ist die Druckverteilung längs der Kontaktzone gleichmäßiger, andererseits wird die Zylinderabsenkung w_0 mit der Steigerung der Kontaktnachgiebigkeit größer. Für $c_n = 0.001$ sind die Kontaktspannungen mit den Ergebnissen für das ideale Reibungsmodell vergleichbar.

6. Schlußfolgerungen

Beim Kontakt rauher Berührungsflächen müssen die Steifigkeiten in normaler und tangentialer Richtung berücksichtigt werden.

Das Verhalten der Kontaktzone wurde mit zwei fiktiven Federelementen über nichtlineare Charakteristiken in normaler und in tangentialer Richtung modelliert.

Die Kontaktsteifigkeit der Federn wurde mit Hilfe experimentell ermittelter Parameter c_n , m , R , S bestimmt.

Die Kontaktnachgiebigkeiten üben einen wesentlichen Einfluß auf den gesamten Verformungs- und Spannungszustand der gefügten Elemente aus, und sie sollten bei genaueren Berechnungen von Kontaktaufgaben berücksichtigt werden.

Die Kontaktnachgiebigkeit spielt eine besonders große Rolle beim Kontakt zweier Körper mit sehr unterschiedlichen Steifigkeiten, z. B. starrer Stempel – elastische Unterlage (Beispiel 3) oder elastischer Körper – starre Unterlage (Beispiel 1).

Bei der Einführung eines Reibungsgesetzes $\mu(v_{tG})$ erhält man wesentlich größere Gleitwerte in der Kontaktzone im Vergleich zu FEM-Berechnungen mit Coulombscher Reibung ($\mu = \text{konst.}$).

Das in dieser Arbeit vorgestellte Kontaktelement berücksichtigt das Verhalten der Kontaktzone nur in zwei Richtungen (2D-Probleme). In weiteren Arbeiten sollen sowohl die plastischen Verformungen als auch die anisotropen Eigenschaften der Kontaktzone berücksichtigt werden.

Dabei wird zur Lösung des nichtlinearen Kontaktproblems die inkrementelle Methode angewendet, die eine beliebige Be- und Entlastung des Systems zuläßt.

Die vorliegende Arbeit wurde an der Technischen Hochschule Szczecin, Lehrstuhl für Mechanik und Grundlagen der Konstruktionslehre (Leiter Doz. Dr. habil. Ing. K. Grudziński) im Rahmen einer Aspirantur an der Technischen Universität Magdeburg durchgeführt.

LITERATUR

- [1] (1983) Александров, В. М., Мхитарян, С. М. (Aleksandrov, W. M., Mhityaryan, S. M.): Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва, Наука.
- [2] (1988) Altenbach, J., Buczkowski, R.: Finite-Elemente-Formulierungen ebener und axialsymmetrischer Kontaktaufgaben mit Coulombscher Reibung. Technische Mechanik 9 (1988) 4, S. 254 – 263.
- [3] (1972) Back, N., Burdekin, M., Cowley, A.: Review of the research on fixed and sliding joints, Proc. 13th. MTDR Conf.
- [4] (1973a) Back, N., Burdekin, M., Cowley, A.: Analysis of machine tool joints by the finite element method. Proc. 14th. MTDR Conf.
- [5] (1973b) Back, N., Burdekin, M., Cowley, A.: Pressure distribution and deformations of machined components in contact. Int. J. Mech. Sci., vol. 15, pp. 993 – 1010.
- [6] (1978a) Burdekin, M., Cowley, A., Back, N.: A elastic mechanism for the microsliding characteristics between contacting machined surface. J. Mech. Engng. Sci., vol. 20, Nr. 3, pp. 121 – 127.
- [7] (1978b) Burdekin, M., Back, N., Cowley, A.: Experimental study of normal and shear characteristics of machined surfaces in contact. J. Mech. Engng. Sci., vol. 20, Nr. 3, pp. 129 – 132.
- [8] (1982) Campos, L. T., Oden, J. T. and Kikuchi, N.: A numerical analysis of class contact problems with friction in elastostatics. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 34, pp. 821 – 845.
- [9] (1971) Chan, S. K., Tuba, I. S.: A finite element method for contact problems of solid bodies. Part I: Theory and Validation. Int. J. Mech. Sci., vol. 13, pp. 615 – 625.
- [10] (1986) Chaudhary, A., Bathe, K.-J.: A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. Computers and Struct., vol. 24, Nr. 6, pp. 855 – 873.
- [11] (1957) Courtney-Pratt, J. S. and Eisner, E.: The Effect of a tangential force on the contact of metallic bodies. Proc. Roy. Soc. vol. 238, N 1215, pp. 529 – 550.
- [12] (1968) Connolly, R., Thornley, R. H.: Determining the normal stiffness of joint faces. J. of. Eng. for Industry Feb., pp. 97 – 106.
- [13] (1980) Хворостухин, Л. А., Шишкин, С. В. (Chvorostuchin, L. A. u. a.): Об осесимметричном контакте двух толстоственных оболочек с учетом шероховатости посадочных поверхностей. Машиностроение. Нр. 2, с. 5 – 11.
- [14] (1981) Хворостухин, Л. А., Шишкин, С. В., Устинов, В. Д.: (Chvorostuchin u. a.) Влияние формы посадочных поверхностей на распределение контактных напряжений в прессовых соединениях. Машиностроение. Нр. 8, с. 7 – 11.
- [15] (1971) Dolbey, M. P., Bell, R.: The contact stiffness of joints at low apparent interface pressure. Annals of CIRP pp. 67 – 79.
- [16] (1970) Демкин, Н. Б. (Demkin, N. D.): Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. Наука. Москва.
- [17] (1981) Демкин, Н. Б., Рышов, Е. В. (Demkin, N. D., Ryshov, E. W.): Качество поверхности и контакт деталей машин. Машиностроение. Москва.
- [18] (1980) Дюво, Г., Лионс, Ж. Л. (Duvaut, G., Lions, J.-L.): Неравенства в механике и физике. Москва, Наука.
- [19] (1981) Feldmann, H.: Spannungsberechnung an Gewinden von Schraube-Mutter-Verbindungen mittels der Methode der finiten Elemente. Diss. TU Braunschweig.
- [20] (1974) Fischer, F. D.: Zur Lösung des Kontaktproblems elastischer Körper mit ausgedehnter Kontaktfläche durch quadratische Programmierung. Computing, vol. 13, S. 353 – 384.
- [21] (1987a) Fischer, U.; Hoyer, U.; Melosh, R. J.: Lösung diskretisierter Kontaktprobleme unter Verwendung der linearen Optimierung. Technische Mechanik 8 (1987) 2, S. 52 – 56.
- [22] (1987b) Fischer, U.; Melosh, R. J.: Solving discretized contact problems using linear programming. Computers and Struct., vol. 25, Nr. 5, pp. 661 – 655.
- [23] (1975) Francavilla, A.; Zienkiewicz, O. C.: A note on numerical computation of elastic contact problems. Int. j. num. methods eng. vol. 9, pp. 913 – 924.
- [24] (1976a) Fredriksson, B.: On elastic contact problems with frictions. A finite element analysis. Diss. Nr. 6, Linköping University.
- [25] (1975) Fredriksson, B.: Experimental determination frictional properties in araldite b contacts. Report LiTH-IKP-R-061, Linköping Institute of Technology.
- [26] (1976b) Fredriksson, B.: Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics. Computers and Struct. vol. 6, pp. 281 – 290.
- [27] (1980) Галин, Л. А. (Galín, L. A.): Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва. Наука.
- [28] (1980) Gladwell, G. M. L.: Contact problems in the classical theory of elasticity. Sijthoff and Nordhoff, Alphen aan Rijn, The Netherlands.
- [29] (1968) Goodman, R. E., Taylor, R. L., Brekke, T. L.: A model for the mechanics of jointed rock. J. of Soil Mechanics and Foundation. Div. ASCE, vol. 94, pp. 637 – 659.
- [30] (1978) Grudziński, K., Konowski, K.: Badanie podatności styków prowadnicowych obrabiarek. VIII-Sympozjum Doświadczalnych Badadań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa, S. 288 – 299.
- [31] (1979) Grudziński, K. u. a.: Badanie zjawisk kontaktowych w połączeniach prowadnicowych zespołów obrabiarkowych. Etap IV, Forschungsheft, IBM TH Szczecin (unveröffentlicht).
- [32] (1980) Grudziński, K. u. a.: Badanie zjawisk kontaktowych w połączeniach prowadnicowych zespołów obrabiarkowych. Etap V, Forschungsheft, IBM, TH Szczecin (unveröffentlicht).
- [33] (1981) Grudziński, K. u. a.: Mechanika kontaktu w połączeniach elementów maszyn. Etap I, Forschungsheft, IBM, TH Szczecin (unveröffentlicht).
- [34] (1981) Grudziński, K. und Kawiak, R.: Zagadnienie modelowania i obliczania połączeń śrubowych metoda elementów skończonych. XX Symposium Modelowanie w Mechanice. Gliwice-Wisła, S. 179 – 188.
- [35] (1982) Grudziński, K. und Kawiak, R.: Anwendung der Finite-Element-Methode zur Berechnung der Kontaktzone und der Pressungsverteilung in Schraubenverbindungen unter Berücksichtigung des Einflusses der Kontaktnachgiebigkeit. Wiss. Beiträge IH Wismar Nr. 7. 1/82, S. 154 – 159.
- [36] (1984) Grudziński, K.: Modellierung und Berechnung von Maschinenelemente-Verbindungen unter Berücksichtigung des Einflusses der Kontaktnachgiebigkeit, Wiss. Beiträge IH Wismar Sonderheft 6/84.
- [37] (1985a) Grudziński, K., Kawiak, R.: Wyznaczenie stanu naprezenia i przemieszczenia w trójwymiarowym modelu złącza śrubowego z uwzględnieniem podatności stykowej. XXIV Symposium Modelowanie w Mechanice. Gliwice-Szczyrk, S. 147 – 153.
- [38] (1985b) Grudziński, K. und Kawiak, R.: Ein räumliches Berechnungsmodell für Schraubenverbindungen. Wiss. Beiträge IH Wismar, Sonderheft 2/85.
- [39] (1987) Grudziński, K. u. a. Niektóre problemy mechaniki kontaktu w budowie maszyn. Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej, Nr. 339.
- [40] (1976) Hughes, T. J. R., Taylor, R. L., Sacksman, J. L., Curnier, A., Kanokkulchai, W. A.: Finite element method for a class of contact-impact problems. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 8, pp. 249 – 276.
- [41] (1984) Idelberger, H.: Zur Berechnung des Kontaktproblems „elastischer Körper und starres Hindernis“ unter Berücksichtigung des Coulombschen Reibungsgesetzes mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Diss. TU Hannover.

- [42] (1983) Jacobi, W.: Das geometrisch nichtlineare Kontaktproblem „Elastischer Körper — starres Hindernis“ bei verformungsabhängiger Belastung als restringiertes Minimumproblem. Diss. TU Hannover.
- [43] (1985) Johnson, K. L.: Contact mechanics. Cambridge University Press.
- [44] (1984) Kawiak, R.: Wyznaczenie i analiza napreżeń i przemieszczeń w złączu śrubowym, Praca doktorska, Politechnika Szczecińska.
- [45] (1981) Kikuchi, N., Song, : Penalty finite-element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity. Quarterly of Applied Mathematics, 29, pp. 1 — 22.
- [46] (1967) Кирсанова, В. Н. (Kirsanova, W. N.): Исследование и расчет касательной податливости плоских стыков. Станки и Инструмент, № 7, с. 22 — 29.
- [47] (1979) Koizumi, T., Ito, Y., Masuko, M.: Experimental expression of the tangential micro-displacement between joint surfaces. Bull. of the JSME, vol. 22, Nr. 166, pp. 591 — 597.
- [48] (1984) Kops, L., Adams, D. H.: Effect of shear stiffness of fixed joints on thermal deformation of machine tools. Annals of CIRP, vol. 33, Nr. 1, pp. 233 — 238.
- [49] Kopowski, K.: Badanie wpływu nieliniowej podatności normalnej i podatności stycznnej styków na stan obciążenia i sztywności połączeń prowadnicowych obrabiarek. Praca doktorska, Politechnika Szczecińska.
- [50] (1982) Kragelski, I. V., Dobycyn, M. N., Kombalov, V. S.: Grundlagen der Berechnung von Reibung und Verschleiß. VEB Verlag Technik Berlin.
- [51] (1987) Кудиш, И. И. (Kudisch, I. I.): Плоская контактная задача о вдавлении с трением жесткого штампа в шероховатую полосу. Прикладная Механика. Т. 23, № 4, с. 50 — 57.
- [52] (1965) Левина, З. М. (Levina, Z. M.): Расчет контактных деформаций направляющих. Станки и Инструмент, № 4, с. 7 — 14.
- [53] (1967) Levina, Z. M.: Research on the static stiffness on joints in machine tools. 8-th. MTDR Conf. pp. 737 — 756.
- [54] (1971) Левина, З. М., Решетов, Д. М. (Levina, Z. M., Reshetov, D. M.): Основы расчета машин на контактную жесткость. Вестник Машиностроения. № 12, с. 16 — 23.
- [55] (1971) Левина, З. М., Решетов, Д. Н. (Levina, Z. M., Reshetov, D. N.): Контактная жесткость машин. Машиностроение. Москва.
- [56] (1973) Lindgren, H.: Drehmoment in Preßverbindungen. Konstruktion 25, H. 9, S. 338 — 341.
- [57] (1974) Masuko, M., Koizumi, T.: Horizontal stiffness and microslip and a bolted joint subjected to repeated tangential static loads. Bull. of the JSME, vol. 17, Nr. 113, pp. 1474 — 1501.
- [58] (1975) Максак, В. И. (Maksak, W. I.): Предварительное смещение и жесткость механического контакта. Наука. Москва.
- [59] (1983) Mazurkiewicz, M., Ostachowicz, W.: Theory of finite element method for elastic contact problems of solid bodies. Computers and Struct. vol. 17, Nr. 1, pp. 51 — 59.
- [60] (1978) Michałowski, R., Mrdż, Z.: Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. Archiv of Mechanics, v. 30, nr. 3, pp. 259 — 276.
- [61] (1983a) Oden, J. T., Pires, E. B.: Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. J. of Appl. Mech., vol. 50, pp. 67 — 76.
- [62] (1983b) Oden, J. T., Pires, E. B.: Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction law. Computers and Struct., vol. 16, Nr. 1 — 4, pp. 481 — 485.
- [63] (1984) Oden, J. T., Pires, E. B.: Algorithms and numerical results for finite element approximation of contact problems with non-classical friction laws. Computers and Struct. vol. 19 Nr. 1 — 2, pp. 137 — 147.
- [64] (1981) Oden, J. T.: Exterior penalty methods for contact problems in elasticity. Nonlinear finite element analysis in structural mechanics. (eds. Wunderlich, W., Stein, E., and Bathe, K.-J.), Springer-Verlag, pp. 655 — 665.
- [65] (1985) Oden, J. T., Martins, J. A. C.: Models and computational methods for dynamic friction phenomena. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 52, pp. 527 — 634.
- [66] (1973) Ohte, S.: Finite element analysis of elastic contact problems. Bull. of the J. S. M. E., Vol. 16, Nr. 95, pp. 797 — 804.
- [67] (1965) Островски, В. И. (Ostrovski, W. I.): Влияние способов обработки на контактную жесткость направляющих. Станки и Инструмент. № 4, с. 14 — 16.
- [68] (1984) Ostachowicz, W.: Hybrydowa metoda elementów skończonych w zagadnieniu kontaktowym. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 22, 1/2, s. 135 — 149.
- [69] (1979) Рабинович, А. С. (Rabinovitch, A. S.): О решении контактных задач для шероховатых тел. МТТ. № 4, с. 52 — 57.
- [70] (1970) Решетов, Д. Н. Кирсанова, В. Н. (Reshetov und Kirsanova): Касательная контактная податливость деталей. Машиноведение. № 2, с. 88 — 101.
- [71] (1985) Rothert, H., Idelberger, H., Jacobi, W., Niemann, L.: On geometrically nonlinear contact problems with friction. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 51, pp. 139 — 155.
- [72] (1975) Schäfer, H. A.: A contribution to the solution of contact problems with the aid of band elements. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. vol. 6, pp. 335 — 354.
- [73] (1979) Schomburg, U.: Die Penalty-Methode mit finiten Elementen in der Technischen Mechanik. Habilitationsschrift. RWTH Aachen.
- [74] (1979) Stadter, J. T., Weiss, R. O.: Analysis of contact through finite element gaps. Computers and Struct., vol. 10, pp. 867 — 873.
- [75] (1949) Штаерман, И. Я. (Shtaerman, I. Ja.): Контактная задача теории упругости. Москва — Ленинград. Гостехиздат.
- [76] (1965) Thornley, R. H., Connolly, R., Barash, M. M., Koenigsberger, F.: The effect of surface topography upon the static stiffness of machine tool joints. Int. J. Mach. Tool Des. Res., vol. 5, pp. 57 — 74.
- [77] (1973) Tsuta, T., Yamaji, S.: Finite element analysis of contact problems. Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis. University of Tokyo Press, pp. 177 — 194.
- [78] (1981) Wriggers, P.: Zur Berechnung von Stoß- und Kontaktproblemen mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Diss. TU Hannover.
- [79] (1984) Villanueva-Leal, A., Hinduja, S.: Modelling the characteristics of interface surfaces by the finite element method. Proc. Instn. Mech. Engrs., vol. 198C, No. 4, pp. 9 — 23.
- [80] (1972) Zienkiewicz, O. C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa.

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. R. Buczkowski
 Technische Hochschule Szczecin
 Lehrstuhl für Mechanik und Grundlagen
 der Konstruktionslehre
 Prof. Dr. sc. techn. J. Altenbach
 Technische Universität „Otto von Guericke“
 SMB, Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik
 PSF 124
 Magdeburg
 3010