

Analyse von Messungen im Bereich der mittleren Rückströmung turbulenter Grenzschichten

W. Szablewski

Wir unterscheiden im Bereich der mittleren Rückströmung turbulenter Grenzschichten in der Trägheitsunterschicht eine *innere*, an die Zähigkeitsschicht grenzende Schicht A_1 mit $\partial \bar{u} / \partial y < 0$ von einer *äußeren* anschließenden Schicht A_2 mit $\partial \bar{u} / \partial y > 0$.

1. R. L. Simpson [1] hat auf Grund seiner umfangreichen Messungen und denen anderer festgestellt, daß die Geschwindigkeitsverteilungen in der Schicht A_1 an den einzelnen Stationen der Messung bei passender Normierung auf ein- und derselben Kurve zu liegen kommen:

$$U / |U_N| \text{ über } y/N$$

(U_N Maximum der mittleren Rückströmung, N Abstand desselben von der Wand).

Simpson gelang es, eine Formel zu konstruieren, die dieses „universelle“ Profil der Schicht A_1 beschreibt:

$$\frac{U}{|U_N|} = A \left(\frac{y}{N} - \ln \left| \frac{y}{N} \right| - 1 \right) - 1, \quad A = 0,3$$

$$(0,02 < y/N \leq 1). \quad (1)$$

2. In einer kürzlich erschienenen Mitteilung [2] habe ich auf der Grundlage der Gleichung der *Trägheitsunterschicht*, charakterisiert durch:

$$1) y \ll \delta \quad (\delta \text{ Grenzschichtdicke})$$

$$2) \tau_{\text{turb.}} \approx \tau_o + \frac{dp}{dx} y$$

$$\text{mit } \frac{\tau_{\text{turb.}}}{\rho} = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad l = \kappa y \quad (\text{Mischungsweg})$$

für die Geschwindigkeitsverteilungen in der Schicht A_1 in den Variablen

$$\bar{u}_* = \bar{u} / V_* \quad (V_* = \sqrt{-\tau_o / \rho})$$

und

$$\chi = F \frac{V_* y}{\nu} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \frac{1}{V_*^2} y \quad (\text{wir schreiben hier } \chi \text{ statt } \xi \text{ in [2]})$$

$$(F = \frac{1}{\rho} \frac{dp/dx}{V_*^2} \frac{\nu}{V_*} \quad \text{Formparameter})$$

die Formel

$$\bar{u}_* = -\frac{1}{\kappa} \left(2 \sqrt{1-\kappa} + \ln \frac{1-\sqrt{1-\chi}}{1+\sqrt{1-\chi}} \right) + C \quad (2)$$

mit der Integrationskonstante

$$C = \bar{u}_*(1) = \frac{-|\bar{u}|_{\text{max}}}{V_*} < 0$$

erhalten.

Dabei ist

$$\chi = \frac{y}{N}; \quad (3)$$

denn

$$\chi = 1 \text{ ergibt } \frac{1}{\rho} \frac{dp/dx}{V_*^2} = \frac{1}{y |\bar{u}|_{\text{max}}} = \frac{1}{N}$$

(Die Bestimmung von C erfordert die Integration der Impulsgleichung über der Zähigkeitsschicht, wobei eine Hypothese über den Verlauf der mittleren Länge l in dieser Schicht zu treffen wäre).

Dividieren wir Gl. (2) durch

$$|C| = \frac{|\bar{u}|_{\text{max}}}{V_*},$$

so erhalten wir

$$\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|_{\text{max}}} = -1 - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{|C|} \left(2 \sqrt{1-\kappa} + \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-\kappa}}{1+\sqrt{1-\kappa}} \right| \right). \quad (4)$$

Setzen wir hier, wenn wir $\kappa = 0,41$ (universelle Konstante des logarithmischen Wandgesetzes) annehmen, $|C| = 10$ bzw. $\kappa |C| = 4,1$; so erhalten wir eine Geschwindigkeitsverteilung in der Schicht A_1 , die für $0,02 < X \leq 1$ nur unwesentlich von der Verteilung (1) nach Simpson bzw. der Messung abweicht (vgl. [2]).

Für die Geschwindigkeitsverteilung in der anschließenden äußeren Schicht A_2 der Trägheitsunterschicht erhielten wir analog

$$\bar{u}_* = \frac{2}{\kappa} (\sqrt{\chi-1} - \text{arctg}(\sqrt{\chi-1})) + \bar{u}_*(1) \quad (5)$$

bzw. bei Division durch $|C|$

$$\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|_{\text{max}}} = -1 + \frac{2}{\kappa |C|} (\sqrt{\chi-1} - \text{arctg}(\sqrt{\chi-1})). \quad (6)$$

Die von uns erhaltenen Werte des „universellen“ Profils

$$\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|_{\text{max}}} \text{ über } X \quad (0,02 < \chi \leq 1) \text{ in der inneren Schicht}$$

A_1 sowie die des Profils in der äußeren Schicht A_2 enthält die Tabelle 1.

Tabelle 1

$\chi (= \frac{y}{N})$	$\bar{u} / \bar{u} _{\max}$
0,02	-0,195
0,05	-0,412
0,1	-0,575
0,2	-0,737
0,3	-0,818
0,5	-0,915
0,7	-0,966
0,9	-0,995
1,0	-1

innere Schicht
 A_1

χ	$\bar{u} / \bar{u} _{\max}$
1,5	-0,952
2	-0,895
3	-0,776
4	-0,666
5	-0,564
6	-0,470
7	-0,383
8	-0,295
9	-0,220
10	-0,1455
12	+0,0015
15	+0,187
20	+0,471

äußere Schicht
 A_2

Die den Profilen (2) und (5) entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungen \bar{u}/U_∞ über y/δ [U_∞ Freistromgeschwindigkeit (freestream-velocity), δ Grenzschichtdicke] – aus deren Messung Simpson das „universelle“ Profil (1) gewann – werden in der vorliegenden Theorie des Profils (2) bei gegebenen äußeren Daten ($U_\infty, dU_\infty/dx, \delta$) der jeweiligen Station durch den Widerstandsbeiwert

$$c_f = \frac{\tau_o}{\rho U_\infty^2} < 0 \text{ determiniert:}$$

$$\frac{\bar{u}}{U_\infty} = \bar{u}_* \frac{V_*}{U_\infty} = \bar{u}_* \sqrt{-c_f/2}; \quad (7a)$$

weiter erhält man aus (3) mit

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}$$

$$\left(\frac{y}{\delta}\right) |\bar{u}|_{\max} = \frac{V_*^2}{U_\infty (-dU_\infty/dx)} \frac{1}{\delta} =$$

$$= \left\langle \frac{U_\infty}{-dU_\infty/dx} \frac{1}{\delta} \right\rangle (-c_f/2), \quad (7b)$$

und es ist nach (3)

$$y/\delta = \chi \left(\frac{y}{\delta}\right) |\bar{u}|_{\max}$$

Wir geben noch einige weitere Relationen an, die sich auf die Trägheitsunterschicht beziehen:

Es ist

$$\frac{|\bar{u}|_{\max}}{U_\infty} = |\bar{u}_*|_{\max} \frac{V_*}{U_\infty} = |\bar{u}_*|_{\max} \sqrt{-c_f/2}. \quad (7c)$$

(7b) und (7c) ergeben dann

$$\left(\frac{|\bar{u}|_{\max}}{U_\infty}\right)^2 = |\bar{u}_*|_{\max}^2 \left\langle \frac{1}{(y/\delta)} \right\rangle |\bar{u}|_{\max}$$

bzw.

$$\lg(y/\delta) |\bar{u}|_{\max} = 2 \lg \frac{|\bar{u}|_{\max}}{U_\infty} - 2 \lg |\bar{u}_*|_{\max} + \lg \left\langle \frac{1}{(y/\delta)} \right\rangle. \quad (7d)$$

Für den Formparameter F erhält man

$$F = \frac{1}{\rho} \frac{dp/dx}{V_*^2} \frac{\nu}{V_*} = \nu \left(\frac{-dU_\infty/dx}{U_\infty^2} \right) \frac{1}{(-c_f/2)^{3/2}}. \quad (7e)$$

Für den Widerstandsbeiwert c_f ergibt sich dann die Formel

$$\lg(-c_f/2) \approx \frac{2}{3} \lg \left\langle \nu \left(\frac{-dU_\infty/dx}{U_\infty^2} \right) \right\rangle - \frac{2}{3} \lg F. \quad (7f)$$

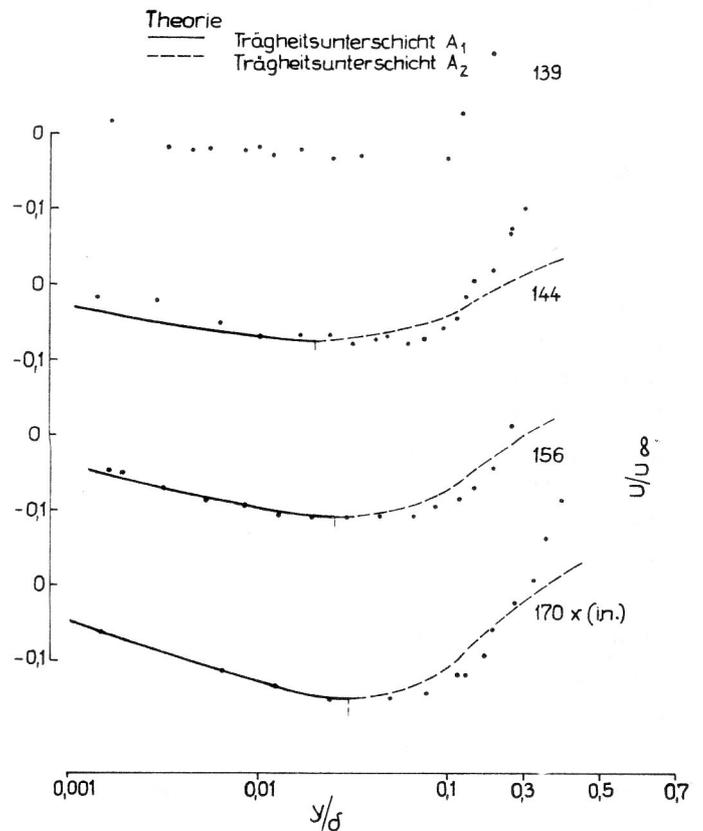


Bild 1 Geschwindigkeitsverteilungen an einzelnen Stationen im Bereich der Rückströmung

3. Wir beziehen uns im weiteren auf die von Simpson [3] durchgeführten Messungen U/U_∞ über y/δ an den Stationen 139 in., 144 in., 156 in. und 170 in. (Bild 1).

Die äußeren Daten betragen

Tabelle 2

Station	δ [ft]	$(-dU_\infty/dx)$ [s^{-1}]	U_∞ [$ft\ s^{-1}$]	$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U_\infty (-dU_\infty/dx)$
139	$\frac{5,834}{12}$	2,05	46,45	95,225
144	$\frac{6,768}{12}$	1,64	45,5	74,62
156	$\frac{10,066}{12}$	1,28	44,6	57,69
170	$\frac{12,841}{12}$	1,21	43,7	52,88

mit $\nu = 1,68 \cdot 10^{-4}$ [$ft^2\ s^{-1}$].

Das ergibt

Tabelle 3

Station	$\lg \left[\frac{(-dU_\infty/dx)}{U_\infty} \delta \right] = -\lg \left\langle \frac{U_\infty}{-dU_\infty/dx} \frac{1}{\delta} \right\rangle$
139	0,33155-2
144	0,30811-2
156	0,38156-2
170	0,47173-2

Meßwerte von c_f wurden nicht angegeben.

Die Inspektion der von Simpson in Bild 1 mitgeteilten Messungen erweist nun, daß die unter der Voraussetzung $\kappa \approx 0,41$ (universelle Konstante des logarithmischen Wandgesetzes) in Formel (4) getroffene Annahme einer universellen Integrationskonstante $|C| (= |\bar{u}_*|_{\max}) = 10$ zu unrealistischen Werten führt.

Wir zeigen das am Beispiel der Station 170: Die Messung ergibt dort in der Trägheitsunterschicht A_1 nach Bild 1 etwa

$$|\bar{u}_{\max}|/U_\infty = 0,15.$$

Nach der Theorie (Relation (7d)) und der Tabelle 3 ergibt das mit

$$|\bar{u}_*|_{\max} = 10$$

$$\lg(y/\delta) |\bar{u}|_{\max} = 2 \lg 0,15 - 2 - (0,47173 - 2) = 0,88045 - 3$$

bzw. $(y/\delta) |\bar{u}|_{\max} \approx 0,0076$; ein Wert,

der (vgl. Bild 1) unrealistisch ist.

Da im Rahmen unserer Theorie die Existenz des universellen Profils (4) an $\kappa |C| = 4,1$ gebunden ist, ist das Ergebnis der Analyse, daß die Annahme $l = \kappa y$ mit $\kappa = 0,41$ hier für die Theorie der Trägheitsunterschicht A_1 der Rückströmung keine Grundlage sein kann. Es stellt sich somit das *Problem der Ermittlung der Integrationskonstante* $|C| = |\bar{u}_*|_{\max}$ *in Abhängigkeit vom Formparameter F.*

Das erfordert nach der Relation (7d) zunächst die Kenntnis der Werte von $|\bar{u}|_{\max}/U_\infty$ und $(y/\delta) |\bar{u}|_{\max}$, die Bild 1 zu entnehmen sind (*Meßwerte wurden nicht mitgeteilt*).

Während man die Werte von $|\bar{u}|_{\max}/U_\infty$ noch mit einiger Sicherheit ablesen kann; gilt das hinsichtlich der Werte von $(y/\delta) |\bar{u}|_{\max}$ nur in Grenzen, insbesondere für die Stationen 144 und 139 (in.), (vgl. Bild 1).

Wir beschränken uns im weiteren auf die letzten drei Stationen. Wir lesen ab

Tabelle 4

Station	$ \bar{u} _{\max}/U_\infty$	$(y/\delta) \bar{u} _{\max}$
144	0,072	0,02
156	0,11	0,025
170	0,15	0,03

Es ergeben sich mit diesen Werten unter Zugrundelegung der Tabelle 1 die Geschwindigkeitsverteilungen

$$\bar{u}/U_\infty = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|_{\max}} \frac{|\bar{u}|_{\max}}{U_\infty} \text{ über } y/\delta = \chi (y/\delta) |\bar{u}|_{\max},$$

die wir in Bild 1 eingetragen haben.

Die Integrationskonstante

$|C| = |\bar{u}_*|_{\max}$ erhalten wir dann nach der Formel (7d) und Tabelle 3

$$\lg |\bar{u}_*|_{\max} = \lg \frac{|\bar{u}|_{\max}}{U_{\infty}} + \frac{1}{2} \lg < > - \frac{1}{2} \lg (\nu/\delta) |\bar{u}|_{\max} :$$

Tabelle 5

Station	$ \bar{u}_* _{\max} = C $	κ
144	3,57	1,15
156	4,48	0,915
170	5,03	0,815

Es ergeben sich dann gemäß $\kappa |C| = 4,1$ – Grundlage des „universellen“ Profils (4) der vorliegenden Theorie – die in der Tabelle angegebenen Werte κ (Bild 2); was besagt, daß mit $l = \kappa y$ in der Trägheitsunterschicht im Bereich der Rückströmung der Mischungsweg erheblich größer ist als in der Trägheitsunterschicht ($\kappa = 0,41$) im Bereich der anliegenden, noch nicht abgelösten Strömung.

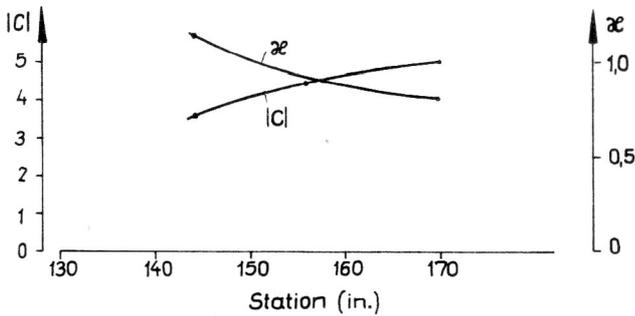


Bild 2

Integrationskonstante $|C|$ und der dimensionslose Koeffizient κ des inneren Profils der Geschwindigkeit in der Trägheitsunterschicht an einzelnen Stationen im Bereich der Rückströmung

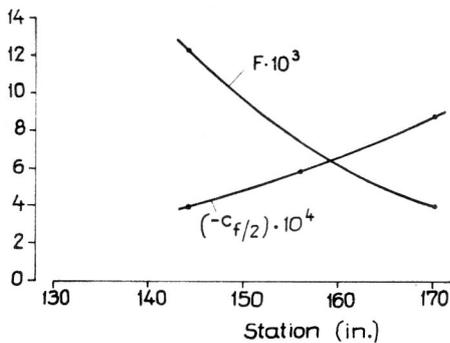


Bild 3

Widerstandsbeiwert $(-c_{f/2})$ und Formparameter F an einzelnen Stationen im Bereich der Rückströmung

Der Verlauf von $(-c_{f/2})$ ergibt sich dann nach der Formel (7c) und den Tabellen 4 und 5

$$\lg (-c_{f/2}) = 2 \lg |\bar{u}|_{\max} / U_{\infty} - 2 \lg |\bar{u}_*|_{\max} ;$$

der Verlauf des Formparameters F nach der Formel (7e) und der Tabelle 2 der äußeren Daten:

Tabelle 6 (Bild 3)

Station	$(-c_{f/2}) \cdot 10^4$	$F \cdot 10^3$
144	4,07	12,34
156	6,02	7,32
170	8,89	4,02

Bild 4 schließlich enthält als Ergebnis der Analyse die Abhängigkeit der Integrationskonstante $|C|$ und des Koeffizienten κ ($l = \kappa y$ in der Trägheitsunterschicht) vom Formparameter F .

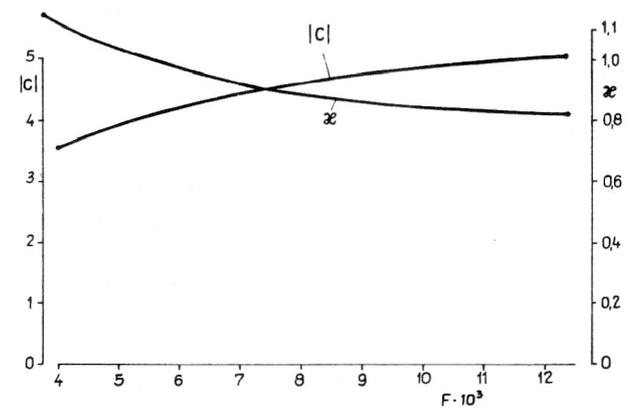


Bild 4

Integrationskonstante $|C|$ und der Koeffizient κ in Abhängigkeit vom Formparameter F

LITERATUR

- [1] Simpson, R. L.: A model for the backflow mean velocity profile. AJAA 21 (1983).
- [2] Szablewski, W.: Formulierung eines Wandgesetzes für den Bereich der Rückströmung turbulenter Grenzschichten. Techn. Mech. 9 (1988) 3, S. 225.
- [3] Simpson, R. L., Chen, Y. T. and Shivaprasad, B. G.: Structure of a separating turbulent boundary layer. Part I: Mean flow and Reynolds stress, Fluid Mech. 113 (1981), S. 23.

Anschrift des Verfassers:

Prof. W. Szablewski
Institut für Mechanik
Rudower Chaussee 5
Berlin
1199