TECHNISCHE MECHANIK 10(1989) Heft 3
Manuskripteingang: 10. 12. 1988

Optimierung der Sicherheitselemente für Baukonstruktionen

J. Murzewski

1. Einleitung

Es gibt zwei Fragestellungen der Optimierung in der Zuverlässigkeitstheorie:

1. Eine Zielwahrscheinlichkeit oder ein Zuverlässigkeitsindex wird vorgegeben, und optimale Rechenwerte werden für die zwei Zustandskoordinaten der Konstruktion R^*, S^* oder für mehrere Basisvariablen $X_1^*, X_2^*, \ldots X_n^*$ bestimmt.

2. Das Minimum an zu erwartenden Kosten für den Bau, die Erhaltung und das Abtragen einer Konstruktion wird gefordert, und die optimalen Sicherheitselemente werden mit Berücksichtigung der Versagenswahrscheinlichkeit gesucht.

Das Optimierungsproblem erster Art wird in dieser Arbeit in verteilungsfreier (distribution-free) Formulierung betrachtet, das heißt, nicht die Wahrscheinlichkeitsfunktionen werden in die Rechnung eingeführt, sondern ein Zuverlässigkeitsindex entweder in der linearen Form

$$\beta = \bar{g} / \sigma_g \tag{1}$$

oder in der logarithmischen Form

$$\beta = \ln \breve{\gamma} / \partial_\gamma, \tag{2}$$

wobei sich der Mittelwert $\bar{g}$ und die Standardabweichung σ_g auf den Sicherheitsabstand

$$g = R - S \tag{3}$$

beziehen, der Medianwert $\breve{\gamma}$ und der logarithmische Variationskoeffizient ν_γ zum Sicherheitsbeiwert

$$\gamma = R/S \tag{4}$$

gehören. S ist die zufallsabhängige Einwirkung (Belastung) und R ist der zufallsabhängige Widerstand (Tragfähigkeit) einer Konstruktion. Damit sind g und γ auch Zufallsvariablen.

Die Rechenwerte der Tragfähigkeit R^* und der Beanspruchung S^* werden, wenn die statistischen Werte $\bar{R}$, σ_R und $\bar{S}$, σ_S gegeben sind, nach linearen Formeln bestimmt:

$$R^* = \bar{R} - \beta_R \, \sigma_R, \qquad S^* = \bar{S} + \beta_S \, \sigma_S, \tag{5}$$

oder, wenn die Werte $\breve{R}$, ν_R und $\breve{S}$, ν_S gegeben sind, nach experimentellen Formeln:

$$R^* = \breve{R} \exp(-\beta_R \, \nu_R), \qquad S^* = \breve{S} \exp(\beta_S \, \nu_S). \tag{6}$$

Die Werte R^*, S^* in den Formeln (5) und (6) sind nahezu gleich, wenn die Variationskoeffizienten $v_R = \sigma_R/\bar{R} \approx \nu_R$ und $v_S = \sigma_S/\bar{S} \approx \nu_S$ klein mit Vergleich zu Eins sind. Die Bedingung des Grenzzustandes

$$R^* = S^* \tag{7}$$

und die Formeln (3) und (5) der linearen Formulierung ergeben folgende Abhängigkeit zwischen den Teilindizes β_R, β_S und dem allgemeinen Zuverlässigkeitsindex β

$$\beta \sigma_g = \beta_R \, \sigma_R + \beta_S \, \sigma_S; \tag{8}$$

die Formeln (4) und (6) der logarithmischen Formulierung ergeben eine ähnliche Gleichung für den Grenzzustand (7)

$$\beta \nu = \beta_R \, \nu_R + \beta_S \, \nu_S \tag{9}$$

Wenn nicht die Werte β_R, β_S gegeben sind, sondern allein der Zuverlässigkeitsindex β, dann sind die Rechenwerte R^*, S^* mit der Gleichung (7) bzw. (8) nicht eindeutig bestimmt. Die Frage, wie eine optimale Teilung des Zuverlässigkeitsindex β in die Teilindizes β_R, β_S durchgeführt werden kann, ist eine wichtige Aufgabe der probabilistischen Bauentwurfsnormen des sogenannten Niveaus 2.

2. Kalibrierungsregeln

Im allgemeinen Falle kann die Bedingung des Grenzzustandes nichtlinear und von mehreren Basisvariablen $X_1, X_2, \ldots X_n$ abhängig sein. Die linke und die rechte Seite der Bedingung

$$S < R \tag{10}$$

können nicht immer separat dargestellt werden, doch kann immer entweder eine Sicherheitsabstandsfunktion $g(X_1, X_2, \ldots X_n)$ oder eine Sicherheitsbeiwertsfunktion $\gamma(X_1, X_2, \ldots X_n)$ so formuliert werden, daß

$$g(X_1, X_2, \ldots X_n) > 0 \quad \text{bzw.} \qquad \gamma(X_1, X_2, \ldots X_n) > 1 \tag{11}$$

einen zuverlässigen Konstruktionszustand bedeuten und

$$g(X_1^*, X_2^*, \ldots X_n^*) = 0 \quad \text{bzw.} \qquad \gamma(X_1^*, X_2^* \ldots X_n^*) = 1 \tag{12}$$

die Grenzzustandsgleichung sind.
Wenn die Zuverlässigkeitsbedingung (11) nichtlinear ist, kann sie linearisiert werden, das heißt, sie wird in der

Umgebung des Punktes $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots \bar{X}_n)$ oder $(X_1^*, X_2^*, \ldots X_n^*)$ in eine Potenzreihe entwickelt, und die Glieder höherer Stufe werden vernachlässigt:

$$g \cong a_0 + a_1 X_1 + \ldots a_n X_n > 0. \qquad (13)$$

Die monomiale Bedingung

$$\gamma = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2} \ldots X_n^{a_n} > 1 \qquad (14)$$

kann durch Logarithmieren zu einer linearen Form reduziert werden. Dabei darf man annehmen

$$\overline{\ln X} = \ln \breve{X} \quad \text{und} \quad \sigma_{\ln X} = \nu_X, \qquad (15)$$

was für logarithmisch-normale Zufallsvariablen X_i genau ist.

Die Rechenwerte, welche die Grenzzustandsgleichung (12) erfüllen,

$$X_i^* = \bar{X}_i + \beta_i \sigma_{X_i} \quad \text{bzw.}$$
$$X_i^* = \breve{X}_i \exp(+\beta_i \nu_{X_i}), \qquad (16)$$

werden mit dem Zeichen "+" genommen, wenn a positiv ist, und mit dem Zeichen "–", wenn a negativ ist. Wenn die Rechenwerte X_i^* der linearen Form in die Grenzzustandsbedingung (12) eingeführt werden und der Mittelwert

$$\bar{g} = a_0 + \Sigma a_i \bar{X}_i \qquad (17)$$

auf beiden Seiten der Gleichung (13) herausgelöst wird, dann bleibt die Gleichung für die Sicherheitsindizes

$$\beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2 + \ldots \beta_n \sigma_n = \beta \sigma_g \qquad (18)$$

wobei

$\sigma_i = a_i \sigma_{X_i}$ — Varianz einer Basisvariablen,

$\sigma_g^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$ — Varianz des Sicherheitsabstands.

Diese einfache Formel gilt für den Fall, daß die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots X_n$ nicht korreliert sind.

Eine ähnliche einfache Gleichung wird für die logarithmische Formulierung gefunden

$$\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2 + \ldots + \beta_n \nu_n = \beta \nu_\gamma \qquad (19)$$

Die Aufspaltung des Zuverlässigkeitsindex β in die Teilindizes β_i kann mit n–1 Freiheitsgraden erfolgen. Für die Teilindizes β_i muß eine Kalibrierungsregel (calibration rule) angenommen werden, um eindeutige Resultate zu bekommen. Die Regel, welche bisher in der Niveau-2-Theorie empfohlen war [1] bis [3], setzt die Teilindizes proportional den entsprechenden Standardabweichungen

$$\beta_i = \beta \sigma_i / \sqrt{\Sigma \sigma_i^2}\,. \qquad (20)$$

Die Wichtungsfaktoren $\alpha_i = \sigma_i / \sigma_g$ erfüllen die Gleichung (18), und ihre Quadratsumme ist gleich eins

$$\Sigma \alpha_i^2 = 1, \qquad (21)$$

was eine geometrische Darstellung im n-dimensionalen Raume der Teilindizes ermöglicht. Die Wichtungsfaktoren sind die Richtungskosinus der Normalen zur Hyperebene des Grenzzustandes.

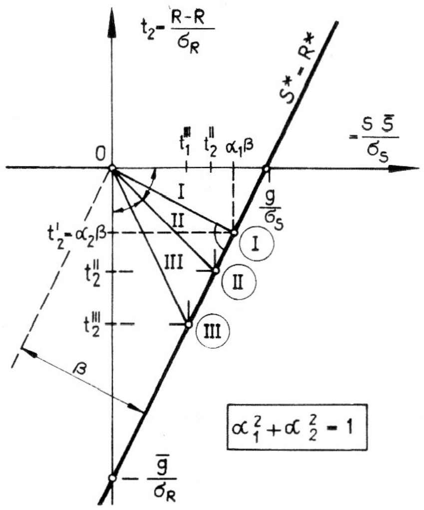

Bild 1
Bemessungspunkte in der Konstruktionszustandsebene

Es sind jedoch auch andere Kalibrierungsregeln möglich. Weitere zwei einfache Regeln sind in Tabelle 1 formuliert. Jede Regel hat ihre besonderen Vorteile:

Regel I (proportionale Sicherheitsindizes) setzt die geometrische Summe der Teilindizes dem allgemeinen Zuverlässigkeitsindex gleich

$$\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2} = \beta. \qquad (22)$$

Der Index β ist also gleich der Entfernung zwischen dem Mittelwertpunkt und der Grenzzustandsebene im n-dimensionalen Raum der standardisierten Basivariablen $t_i = (X - \bar{X}) / \sigma_i$, und das ist die kürzeste Entfernung vom Bemessungspunkt (Bild 1).

Tabelle 1
Kalibrierungsregeln für die Sicherheitsindizes

No.	Lineare Formulierung	Logarithmische Formulierung
I.	$\beta_i = \beta \sigma_i / \sigma_g$	$\beta_i = \beta \nu_i / \nu_\gamma$
II.	$\beta_i = \beta \sigma_g / \Sigma \sigma_i$	$\beta_i = \beta \nu_\gamma / \Sigma \nu_i$
III.	$\beta_i = \beta \sigma_g / n \sigma_i$	$\beta_i = \beta \nu_\gamma / n \nu_i$
	$\sigma_g = \sqrt{\Sigma \sigma_i^2}$	$v = \sqrt{\Sigma \nu_i^2}$

Regel II (gleiche Sicherheitsindizes) gibt gleiche Chancen für eine Unter- bzw. Überschreitung der Grenzwerte der Materialeigenschaften bzw. Einwirkungen, was für die Kontrolle wichtig und sehr einfach ist

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = \beta / \sqrt{n}\,. \tag{23}$$

Die Zahl n ist für verschiedene Konstruktionselemente verschieden, und die Indizes β_i können nicht im voraus für alle Fälle bestimmt werden. Das gibt einen qualitativen Unterschied der Regel II im Vergleich zur Methode der Teilsicherheitsfaktoren, die dem Niveau 1 angehört.

Regel III (umgekehrt proportionale Sicherheitsindizes) ist ein neuer Vorschlag [4]. Die Regel ergibt gleiche Teilfaktoren γ für alle Belastungskomponenten und Materialeigenschaften in logarithmischer Formulierung

$$\gamma_i = \exp(\beta_i \nu_i) = S_1^* / \breve{S}_1 = S_2^* / \breve{S}_2 = \ldots = \breve{R}_n / R_n^* =$$

$$= \sqrt[n]{\exp(\beta \nu_\gamma)}\,. \tag{24}$$

Also sind die Belastungskomponenten im erwarteten Zustande ($\breve{S}_1$, $\breve{S}_2$, . . .) und im Grenzzustande (S_1^*, S_2^*, . . .) proportional, wie man es in der Plastizitätstheorie voraussetzt. Die Entfernung des Grenzpunktes (X_1^*, X_2^*, . . . X_n^*) von dem Mittelpunkte ($\breve{X}_1$, $\breve{X}_2$, . . . $\breve{X}_n$) ist in dem n-dimensionalen Raume der Basisvariablen am kürzesten, wenn nur der Raum metrisch ist.

Jede der Regeln kann dargestellt werden als Lösung einer Optimierungsaufgabe. Tabelle 2 zeigt die jeweils zugehörige Zielfunktion. Das Extremum wird mit der Bilanzgleichung (18) gesucht:

$$\beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2 + \ldots + \beta_n \sigma_n - \beta \sigma_g = 0\,. \tag{25}$$

Darum muß die Zielfunktion mit einem Lagrange-Multiplikator zur Nebenbedingung (25) ergänzt und danach differenziert werden.

3. Schlußbemerkungen

Ein großer Vorteil jeder Kalibrierungsregel von Niveau 2 ist die Additivität der Rechenwerte der gleichzeitig wirkenden Beanspruchungen. Es gibt aber auch Nachteile der Kalibrierungsregeln des Niveaus 2 in ihrer „exakten" Formulierung. Die Rechenwerte werden von einer probabilistischen Interaktion so beeinflußt, daß der Rechenwert der Belastung S^* von der Tragfähigkeitsvarianz σ_R abhängig ist und umgekehrt R^* von σ_S abhängig ist (Bild 2).

Eine Ergänzung zur ISO-Norm [5] empfiehlt die Kalibrierungsregel I, das heißt – die Sicherheitsindizes sollen proportional den Standardabweichungen sein. Erste Versuche der Kalibrierung [6], [7] waren nicht günstig.

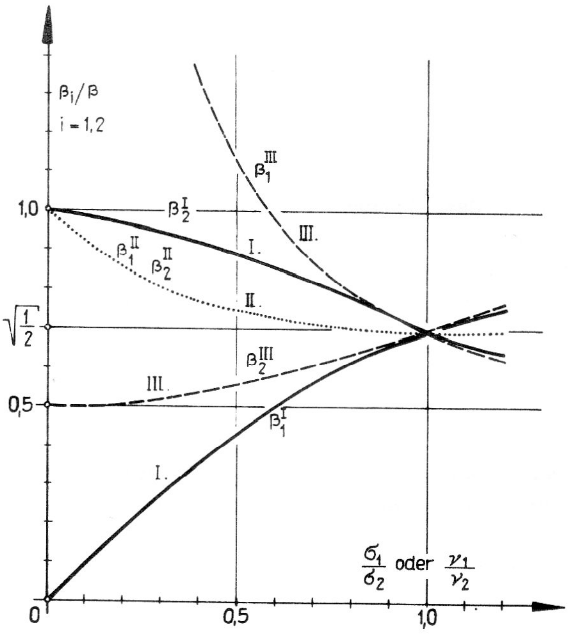

Bild 2
Probabalistische Interaktion der Sicherheitsindizes

Tabelle 2
Optimierungskriterien für die Sicherheitsindizes

No.	Zielfunktion	Definition
I.	Euklidische Norm D = Min.	$D = \Sigma (X_i^* - \bar{X}_i)^2 / \sigma_i^2$
II.	Entropie H = Max.	$H = -\Sigma P(\gamma_i > 1) \log P(\gamma_i > 1)$
III.	Quadratsumme S = Min.	$S = \Sigma (X_i^* - \bar{X}_i)^2$

$\gamma_i = X_i^* / X_i$ für eine Einwirkung, $\gamma_i = X_i / X^*$ für einen Widerstand,
P (. . .) – Wahrscheinlichkeit

Die probabilistische Interaktion würde die Bemessung der Konstruktion so schwierig machen, daß die Normenverfasser Vereinfachungen eingeführt haben, welche die Voraussetzungen des Niveaus 2 beinahe annulieren. Die Belastungsnormen und die Bemessungsnormen müssen im Bauwesen getrennt bleiben. Darum müssen die Sicherheitsindizes für die Zustandskoordinaten unabhängig vorausgesetzt werden. Näherungsweise gilt nach DIN [7]:

$$\beta_R = 0{,}8\,\beta = \text{const.}, \quad \beta_S = 0{,}7\,\beta = \text{const.} \tag{26}$$

wo β der allgemeine Zuverlässigkeitsindex ist (Tabelle 3).

Tabelle 3
Zuverlässigkeitsindizes nach DIN [7]

Grenzzustand der	Sicherheitsklasse 1	2	3
Tragfähigkeit	4,2	4,7	5,2
Gebrauchsfähigkeit	2,5	3,0	3,5

Die Werte der Tabelle 3 entsprechen den Wahrscheinlichkeiten

$$q = \Phi\,(-\beta) = 10E\text{-}2,\ 10E\text{-}3,\ 10E\text{-}4,\ 10E\text{-}5,\ 10E\text{-}6,\ 10E\text{-}7, \tag{27}$$

so als ob die Basisvariablen normalverteile Zufallsvariablen wären und die Laplace-Funktion $\Phi(.)$ verwendbar wäre. Die Werte (27) sind unrealistisch, sie sind viel zu klein im Vergleich mit den statistischen Daten.

Nach Ansicht des Verfassers sollte das Niveau 2 beim Entwurf von Konstruktionen nur mit den separaten Sicherheitsindizes β_R, β_S angewendet werden. Die Wahrscheinlichkeiten q sind nicht nötig, da die Methode verteilungsfrei ist. Lineare Lastkombinationen und die Tragfähigkeit von Verbundkonstruktionen werden ohne irgendwelche Reduktionskoeffizienten berechnet. Die Sicherheitsfaktoren sollen nicht zu rasch mit den Variationskoeffizienten wachsen – die Regel III (umgekehrt proportionale Sicherheitsindizes) erfüllt diese Anforderung. Lösungen des Optimierungsproblems zweiter Art haben gezeigt [8], daß die optimalen Sicherheitsindizes veränderlich sind, annähernd so, wie es die Regel III vorsieht.

LITERATUR

[1] Madsen, H. O., Krenk, S., Lind, N. C.: Methods of Structural Safety. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1986.

[2] Thoft-Christensen, P., Baker, M. J.: Structural Reliability Theory and Its Applications. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1982.

[3] Schueller, G. I.: Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken. Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin – München 1981.

[4] Murzewski, J.: Safety of complex structural systems. In: „Analysis of Random Capacity of Structures" – Jabłonna'82 Conference, KILiW PAN, Warszawa 1982.

[5] International Organization for Standardization: General principles on reliability of structures. (Revision of ISO 2394 – 1973), ISO/TC98 1984.

[6] The Nordic Committee on Building Regulations: Recommendation for loading- and safety regulations for structural design. NKB-Report No 36,, Nov. 1978.

[7] Deutsches Institut für Normung: Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen. DIN – Beuth Verlag, Berlin – Köln, 1981.

[8] Murzewski, J.: Sicherheit der Baukonstruktionen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1974.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr.-Ing. J. Murzewski
Politechnika Krakowska
Kraków
VR Polen