

## Berücksichtigung des Einflusses fester Schmierstoffe bei Kontaktaufgaben der Umformtechnik

V. A. Kadymov

### 1. Einführung

Die Deformation eines betrachteten Körpers  $V_M$  erfolgt durch Einwirkungen eines anderen Körpers  $V_T$  über eine Kontaktfläche.

Der deformierte Körper  $V_M$  mit vorgegebenen geometrischen Parametern und Festigkeitscharakteristika läßt sich durch Auswahl der einwirkenden mechanischen und thermischen Belastungen, des Werkstofftyps und der Form für den Körper  $V_T$  erhalten. Dies ist der Erfüllung bestimmter Einschränkungen bezüglich der in  $V_M$  auftretenden Deformationen, Restspannungen, der Arbeit der Reibungskräfte usw. äquivalent. Oftmals wird dabei ein drittes aktives Material (Zwischenschichtmaterial)  $V_*$  entlang der Kontaktfläche [1] verwendet. Dieses ist im allgemeinen ein „weicherer“ Material, und es kann als „Schmierung“ bezeichnet werden. Die Bedeutung dieses Materials liegt in der Einflußnahme auf den Charakter und das Ausmaß der Ungleichförmigkeiten der Deformationen. Damit wird einer möglichen Zerstörung von  $V_M$  vorgebeugt, die Arbeit der Reibungskräfte wird verringert usw. Andererseits entsteht das Problem der Erhaltung des physikalischen Volumens  $V_*$  entlang der Kontaktfläche im Prozeß der endlichen Formänderungen von  $V_M$ .

Die hier beschriebene Aufgabenklasse tritt bei der Projektierung und Schaffung technologischer Umformprozesse (Druckbehandlung) sowie beim Studium von Prozessen auf, die in den tiefer gelegenen Erdschichten (Geosphäre) ablaufen. Die Reibungsbedingungen am Umformwerkzeug bestimmen vielfach die Effektivität des Umformprozesses. Zum Unterschied zur Kontaktwechselwirkung von 2 starren (nicht deformierbaren) Körpern ist für Umformprozesse – diese sind in der Regel durch großen Kontaktdruck und endliche irreversible Deformationen gekennzeichnet – der Begriff „Schmierung“ über den Rahmen der traditionell verwendeten Schmierstoffe erweitert worden. Als „Schmierung“  $V_*$  treten in der Umformpraxis feste und viskose Materialien auf. Diese sind relativ „weich“ im Vergleich zu den bearbeiteten Materialien  $V_M$  und um so mehr zum Werkzeugwerkstoff  $V_T$ :  $\sigma_S^* \ll \sigma_S^M$ . Wenn die Deformation des physikalischen Volumens  $V_M$  bei Erhalt (d. h. nicht vollständigem Verdrängen) des Volumens der „Schmierung“  $V_*$  an der Kontaktfläche der Festkörper abläuft, so ist es günstig, eine gekoppelte Randwertaufgabe für die physikalischen Volumina  $V_*$  und  $V_M$  zu formulieren. Für einige Fälle sollten auch die Gleichungen für  $V_T$  einbezogen werden, z. B. bei Untersuchungen des plastischen Fließens in einer dünnen Metallschicht zwischen 2 sich zueinander nähernden Flächen fester Körper, wobei die Verschiebung des

Werkzeugs  $V_T$  vergleichbar mit der Dicke der plastischen Schicht  $V_M$  ist. Wenn es zum Kontakt der Körper  $V_T$  und  $V_M$  ohne Anwesenheit des Volumens  $V_*$  kommt bzw. wenn dieses verdrängt wurde, so genügt es, die Randwertaufgabe nur für den deformierbaren Körper  $V_M$  zu berechnen. Dabei wird der Einfluß der „Schmierung“ auf den Prozeß im ganzen in der (tangentialen) Randbedingung an der Kontaktfläche berücksichtigt. Diese wird dann im Falle der statischen Randbedingung durch die Reibungsspannung  $\sigma_T$  in der Gleitzone  $\Sigma_T$  bzw. im Falle der kinematischen Randbedingung durch eine Bedingung, die der Haftung in der Haftzone  $\Sigma_V$  entspricht, modelliert.

Wichtigster Rückschluß aus den Ausführungen dieser Arbeit ist, daß die Kontaktreibung bei Kontaktwechselwirkungen zwischen deformierbaren Festkörpern gesteuert werden muß. D. h., man kann so einwirken, daß sich die Effektivität der Produktion, die Qualität des Endproduktes usw. verbessern. Ein Vergleich des Gesagten mit den Aufgaben über das Umströmen von festen Körpern ist möglich. Dabei ist die Viskosität der Flüssigkeit an der Kontaktfläche wesentlich, und es kommt zur sogenannten Grenzschichtbildung [2], [3].

In der Sprache der Umformtechnik kann man folgende Aussage formulieren: die Art bzw. das Regime der Reibung wird durch die Menge und die Eigenschaften der Drittmaterialien (Schmierung, Oxidationsprodukte der Materialien  $V_T$  und  $V_M$  sowie andere) vorbestimmt. Man kann folgende näherungsweise Einteilung der Reibung in drei Gruppen vornehmen [4]:

1. Die Reibung wird als Trockenreibung bezeichnet, wenn an den Oberflächen der sich reibenden Körper keine dritten Stoffe auftreten. Die Oberfläche des bearbeiteten Materials und des Werkzeugs befinden sich in Kontakt und es können relative Verschiebungen an den zu ihnen tangentialen Flächen auftreten.
2. Die Reibung wird als Grenzreibung bezeichnet, wenn auf den Oberflächen der in Kontakt stehenden Körper Stoffe, die sich wesentlich von den Materialien  $V_T$  und  $V_M$  unterscheiden, adsorbiert werden. Dabei kommt es infolge der geringen Dicke der an der Oberfläche adsorbierten „Schmierung“ zu einer mechanischen Verzahnung der Kontaktflächenrauigkeit.
3. Die Reibung wird als Flüssigreibung bezeichnet, wenn zwischen den sich reibenden Oberflächen eine „Schmier“schicht  $V_*$  existiert, so daß die mechanische Verzahnung der Oberflächenrauigkeiten aufgehoben wird. Die wesentliche Besonderheit der Flüssigreibung ist der Druck in der „Schmier“schicht  $V_*$ .

Dieser muß so groß sein, daß er das physikalische Volumen  $V_M$  in den Zustand des plastischen Fließens versetzen kann. In diesem Fall wird die „Schmierung“ nicht aus dem Spalt zwischen den sich reibenden Körpern herausgedrückt werden, und die Deformation des Volumens  $V_M$  erfolgt über die „Schmier“-schicht. Der beste Weg zur Realisierung der Flüssigreibung besteht in der Ausnutzung des plastisch-hydrodynamischen Effekts [1], d. h. der Realisierung eines Maßnahmenkomplexes, der mit der Konstruktion des Werkzeugs  $V_T$  und den rheologischen Eigenschaften der „Schmierungen“  $V_*$ , die die Flüssigreibung sichern, verbunden ist.

Es sei nochmals unterstrichen, daß diese Klassifikation nicht absolut ist. In der Praxis treten oftmals Zwischenregime auf (z. B. halbtrockene bzw. halbflüssige Reibung). Die Sicherung der Flüssigreibung in technologischen Prozessen hat zweifellos eine Reihe von Vorteilen. Eine solche Reibung wird erfolgreich bei der Technologie des Ziehens eingesetzt. Es werden dabei die Parameter des Werkzeugs (u. a. die des Druckrohres und der Düse) sowie der Schmierung, die ein stabiles hydrodynamisches Reibungsregime sichern [1], [4] bis [6], berechnet. Weiterhin wird aktiv an der Suche von Methoden zur Nutzung des hydrodynamischen Effektes bei Walzprozessen, beim Tiefbohren, Pressen usw. gearbeitet.

## 2. Die mathematische Formulierung des Problems

Es wird eine Klasse nichtstationärer plastischer Strömungen in einer dünnen Materialschicht  $V_M$  zwischen 2 sich nähernden Oberflächen starrer Körper  $V_T$  allgemein analysiert. Dabei tritt „Schmierung“ in der Kontaktschicht auf. Folgende Fälle sind denkbar:

1. Das Fließen der plastischen Schicht  $V_M$  beginnt noch vor dem Abreißen der „Schmier“-schicht  $V_*$  über die gesamte Kontaktfläche. Damit wird ein solcher Schmierungszustand erzeugt, für den eine gekoppelte Aufgabe über das Fließen der plastisch deformierbaren Schicht und der „Schmierung“ zu formulieren ist. Dabei wird zugelassen, daß für einen Teil der Kontaktfläche (im zentralen Kontaktbereich) Flüssigreibung mit Übergang zur Grenzreibung (in der Nähe des Randes der Kontaktfläche, wo es zur Verzahnung der Oberflächenrauigkeit der Kontaktflächen kommt) realisiert wird.
2. Anfangs fließt nur die „Schmier“-schicht  $V_*$  bis zu dem Moment, wo diese völlig auf der gesamten Kontaktfläche verschwindet. Anschließend beginnt das Fließen des physikalischen Volumens  $V_M$ . In diesem Fall genügt es, die Aufgabe über das plastische Fließen in der Schicht  $V_M$  zu betrachten (entkoppelte Aufgabe), wobei die Berücksichtigung der Schmierung auf den Kontaktflächen  $\Sigma_\tau$  auf die Angabe einer Randbedingung in den Kraftgrößen zurückgeführt wird [7], [8]:

$$p_\tau = \begin{cases} \mu p_n & \text{für } 0 \leq p_n \leq p_\tau^{\max}/\mu \text{ (nach Coulomb)} \\ p_\tau^{\max} = \text{konst} & \text{für } p_\tau^{\max}/\mu < p_n < \infty \text{ (nach Prandtl)} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$p_n = k_n [1 - \exp(-1,25 p_n/\sigma_S)] \tau_S \text{ (nach A. N. Levantov)} \quad (2.2)$$

Hierin bedeuten  $\tau_S = \sigma_S/\sqrt{3}$ ;  $\mu$  – der Reibungskoeffizient  $k_n = p_\tau^{\max}/\mu$  – der Korrekturfaktor für den Reibungskoeffizienten (dieser ist experimentell zu ermitteln). Dabei wird für einen Teil des Kontaktes Haftung vorausgesetzt. Die Grenze  $L$  zwischen der Haftzone  $\Sigma_V$  und der Gleitzone  $\Sigma_\tau$  an der Kontaktfläche ist zu Beginn nicht bekannt und muß folglich im Zuge der Lösung der Aufgabe ermittelt werden. Dabei werden die Stetigkeitsbedingungen für den Spannungsvektor und den Fließgeschwindigkeitsvektor verwendet:

$$\left. \begin{matrix} \vec{p}^{(n)} \\ \vec{v} \end{matrix} \right|_{\Sigma_V} = \left. \begin{matrix} \vec{p}^{(n)} \\ \vec{v} \end{matrix} \right|_{\Sigma_\tau}, \quad \forall M \in L \cup [t_0, t_k] \quad (2.3)$$

mit  $\vec{p}^{(n)} = \tilde{\sigma} \cdot \vec{n}$  als Spannungsvektor auf der Fläche mit der Normalen  $\vec{n}$ .

Zur Untersuchung der letztgenannten Aufgabe wurde von A. A. Il'yushin und I. A. Kiyko [9], [10] eine Fließtheorie für eine dünne Schicht eines plastischen Materials erarbeitet.

Das physikalische Verhalten des Volumens  $V_*$  der „Schmierung“ wird befriedigend durch endliche nicht-linear-tensorielle Beziehungen zwischen  $\tilde{\sigma}$  und  $\tilde{V}$  in der Form der Rivlin-Ericksen-Gleichungen [11] beschrieben:

$$\tilde{\sigma} = \varphi_0 \tilde{E} + \varphi_1 \tilde{V} + \varphi_2 \tilde{V}^2, \quad (2.4)$$

mit  $\tilde{\sigma} = \sigma^{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j$ ,  $\tilde{V} = v^{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j$  – Cauchyscher Spannungstensor bzw. Deformationsgeschwindigkeitstensor;  $\tilde{E} = \delta^{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j$  – Einheitstensor (Maßtensor);  $\varphi_1 = \varphi_1(J_2, J_3 = v_{ik} v_{ki})$  – scheinbare Viskosität;  $\varphi_2 = \varphi_2(J_2, J_3 = v_{ij} v_{jk} v_{ki})$  – Querviskosität (diese ruft nur Normalspannungen hervor. Für  $\varphi_2 = 0$  erhält man die nichtlinearen Navier-Stokesschen Gleichungen für dilatante Fluide:

$$\tilde{\sigma} = \varphi_0 \tilde{E} + \varphi_1 \tilde{V}, \quad (2.5)$$

wobei für inkompressible Flüssigkeiten  $\varphi_0 = \sigma_{kk}/3 = -p$  gilt ( $p$  – hydrostatischer Druck).

Bei der Analyse von Prozessen mit hohem Kontaktdruck

$$\vec{p}^{(n)} = \tilde{\sigma} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial V_T}$$

kann der Zusammenhang  $\varphi_1$  von  $\vec{p}^{(n)}$  wesentlich werden. Analoges gilt bei Temperaturentwicklungen für den Zusammenhang  $\varphi_1$  von  $T$ . Charakteristische Beispiele für

solche Zusammenhänge können in [1], [12], [13] gefunden werden.

Die äußere Einwirkung durch die Körper  $V_T$  ruft in  $V_*$  ein Fließen hervor. Dieses beginnt vom Zeitpunkt  $t = t_0$  in ein Fließen in  $V_* \cup V_M$  überzugehen. Offensichtlich ist die Anfangsverteilung  $V_*(t_0)$ ,  $V_M(t_0)$  und  $V_T(t_0)$  für die physikalischen Volumina nicht bekannt. Wie bereits gesagt, sind diese während der Lösung zu ermitteln. In Abhängigkeit von den Aufsetzbedingungen (viskose und plastische Eigenschaften der „Schmierung“, Geometrie des Gebietes  $V_M$ , mechanische Eigenschaften des Materials von  $V_M$ , Aufsetzgeschwindigkeit) ändert sich die Enddicke der Schmierschicht. Dabei ist die Deformationsgeschwindigkeit ein wesentlicher Faktor, der auf den Charakter des Fließens beim Aufsetzen einwirkt. Beispielsweise erhöht sich die Effektivität der Schmierung beim Aufsetzen eines Pressenhammers – auch niedrigviskose Flüssigkeiten können effektive zusammengedrückte Schmierfilme geben, so daß der hydrodynamische Effekt gesichert ist.

Das Verhalten des Kontinuums  $V_M$  wird durch die Gleichungen für das viskoplastische Fließen sich verfestigender Körper [7] beschrieben:

$$\tilde{\sigma} - \sigma \tilde{E} = \frac{2 \sigma_u^M}{3 v_u} \tilde{V}, \quad V = \tilde{V} \dots \tilde{E} = 0 \quad (2.6)$$

mit  $\sigma_u^M = \sigma_u^M(v_u, \lambda)$  als aus dem Experiment bekannter Funktion der Intensität der Deformationsgeschwindigkeiten  $v_u = \sqrt{2/3 v_{ij} v_{ij}} = \sqrt{2/3 J_2}$  und dem Grad der Deformation (Analogie zu den im Teilchen gespeicherten Gleitungen)  $\lambda(x, t)$ . Letztere Größe stellt die Lösung einer Differentialgleichung dar

$$\frac{d\lambda}{dt} = v_u, \quad \lambda(\vec{x}, t = t_0) = 0 \quad (2.7)$$

Die Gleichgewichtsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} = 0, \quad \vec{x} \in V_M \cup V_* \quad (2.8)$$

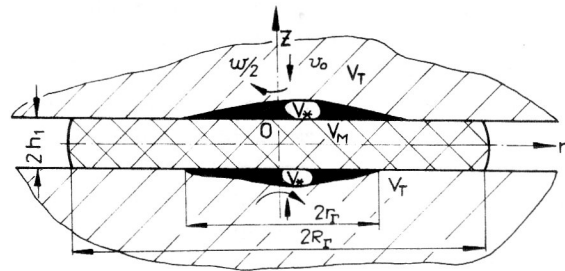
und die Stokes-Gleichungen

$$\tilde{V} = [\vec{\nabla} \vec{\nabla} + (\vec{\nabla} \vec{\nabla})^T] / 2, \quad \vec{x} \in V_M \cup V_* \quad (2.9)$$

sowie die Randbedingungen vervollständigen die Randwertaufgabe.

### 3. Axialsymmetrische Strömung in einer dünnen Schicht. Aufbau eines optimalen Prozesses.

Es wird die axialsymmetrische gekoppelte Aufgabe über das Fließen einer plastischen Schicht  $V_M$  unter Einwirkung sich nach einem bestimmten Gesetz  $\vec{v}_T = \mp v_0(t) \vec{k}_3 \pm [w(t)r/2] \vec{k}_2$  nähernder fester Körper  $V_T$ , wobei entlang des Kontaktbereichs ein aktives Zwischenmaterial  $V_*$  sein soll (Bild 1). Die Kontaktflächen der Körper  $V_T$  und  $V_M$  sollen vor der Deformation eben sein. Der Körper, der das bewegte



**Bild 1**  
Geometrie eines Kontaktbereiches bei Umformprozessen (Erläuterungen siehe Text)

Volumen  $V_T(t)$  bildet, wird als hinreichend starr gegenüber  $V_*$  und  $V_M$  angesehen. Jedoch muß bei der Analyse von Strömungen in einer dünnen Schicht  $V_M(t)$  ( $h \ll R_0$ ) mit elastischen Verschiebungen  $w$  (in Richtung der Normalen) des Randes  $\partial V_T$  des Körpers gerechnet werden. Ursachen dafür sind hohe Drücke  $p$  im zentralen Bereich der Kontaktzone. Folgendes Zahlenbeispiel [10] unterstreicht das: für eine dünne plastische Schicht, die mit elastischen Körpern in Kontakt steht, wobei das elastische Modell von Winkler verwendet wird, erhält man folgende Abschätzung

$$R/h \sim 21,0; \quad \lambda/h \sim 1/30 \rightarrow w/h \sim 0,59.$$

Hierbei wurde die Greensche Funktion in der Form

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = \lambda \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

verwendet, folglich ist

$$w = \frac{1}{2\tau_S^M} \iint_{S_r} K(r, r') p(r') dS(r') = \lambda p / (2\tau_S^M) \quad (3.1)$$

Wie schon bemerkt, erhält man bei großer Annäherungsgeschwindigkeit für die Körper  $V_T$  hohe Kontaktdrücke in der Schicht  $V_*$ . Aufgrund der viskosen Eigenschaften der Schicht wird diese nicht völlig aus der Kontaktzone verdrängt. Sie ist im zentralen Teil des Kontaktes konzentriert:

$$h_1(t_0) < z < f(r, t_0); \quad r < r_T(t_0)$$

mit

$$f(r, t_0) = h_1(t_0) + \check{w} p(r, t_0)$$

und  $\check{w} p(r, t_0)$  als elastische Verschiebungen in Normalenrichtung der Kontaktflächen des Werkzeugs  $V_T$ ,  $r_T(t)$  ist die unbekannte Kontaktgrenze, die den Bereich der Flüssig- und der Grenzreibung zwischen  $V_T$  und  $V_M$  teilt.

Man kann nun erwarten, daß beim weiteren Fließen von  $V_* \cup V_M$  das physikalische Volumen  $V_*$  schlagartig in den zentralen Teil zwischen  $V_T$  und  $V_M$  übergeht und dann sich starr mit  $V_T$  weiter verschiebt. Dies erfolgt bis zu dem Moment, wo die Normalverschiebungen der Körper im zentralen Teil der Größe nach vergleichbar mit der aktuellen Dicke  $h_1(t)$  der Schicht  $V_M$  sind. Eine strenge mathematische Beschreibung und Unter-

suchung dieser Prozesse ist überaus kompliziert. Daher wird sich nachfolgend auf die Theorie von Il'yushin und Kiyko beschränkt. Diese gestattet, die qualitativen Besonderheiten der zu untersuchenden Prozesse darzustellen.

Anmerkung: Für die angeführten Prozesse sind hohe Kontaktdrücke und der Effekt des Gleitens des plastischen Materials  $V_M$  bezüglich der physikalischen Oberfläche  $V_T$  charakteristisch. A. A. Il'yushin stellte auf der Grundlage der Untersuchung der klassischen Prandtl-Aufgabe über das Zusammendrücken einer Schicht zwischen 2 parallelen sich nähernden rauhen Platten eine Reihe von physikalischen Hypothesen auf. Mit deren Hilfe formulierte er ein mathematisches Näherungsmodell, welches qualitativ in erster Näherung nichtstationäre plastische Volumenströmungen in einer dünnen Schicht beschreibt. Dem Wesen nach wird das Modell einer hydrodynamischen Flüssigkeit vorgeschlagen, deren Eigenschaften sich durch Mittlung über die Schichtdicke folgender Größen ergibt: Kontakt- druck  $p$  sowie die Geschwindigkeiten  $u, v$  in der Fließ- ebenen.

Zunächst wird gezeigt, wie man die unbekanntenen Anfangswerte  $p(r, t_0)$  und  $r_{\Gamma}(t_0)$  bestimmen kann. Entsprechend den bisherigen Ausführungen lassen sich die Gleichungen der Theorie von Il'yushin und Kiyko für das Anfangsfließen  $V_M(t \geq t_0)$  wie folgt angeben:

$$\text{grad } p(r, t) = - \frac{2T(r)}{h_1(t)} \frac{\vec{v} - \vec{v}_T}{|\vec{v} - \vec{v}_T|}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} + \frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

$$p \Big|_{r=R_{\Gamma}(t)} = \sigma_S^M, \quad (3.4)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = -v_0(t),$$

$$T(r, t) = \begin{cases} \tau_S^M \equiv \sigma_S^M / \sqrt{3}, & r_{\Gamma}(t) < r < R_{\Gamma}(t) \\ \tau_S^* \equiv \sigma_S^* / \sqrt{3}, & 0 < r < r_{\Gamma}(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Bei Annahme, daß  $\tau_S^* = C_1 = \text{konst.}$ ,  $\tau_S^M = C_2 = \text{konst.}$  ist, lautet die Lösung der Aufgabe (3.2) bis (3.4) (für Interessenten sei hier auf [14] verwiesen)

$$u(r, t) = - \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{dt} \frac{r}{2} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{r}{2}; \quad v(r, t) = 0; \quad (3.6)$$

$$p(r, t) = \begin{cases} \frac{2\tau_S^M}{h_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(d\lambda)^2 + (d\varphi)^2}} (R_{\Gamma} - r) + \sigma_S^M, & r_{\Gamma} \leq r \leq R_{\Gamma} \\ \frac{2\tau_S^*}{h_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(d\lambda)^2 + (d\varphi)^2}} (r_{\Gamma} - r) + p_{\Gamma}(t), & 0 \leq r \leq r_{\Gamma} \end{cases} \quad (3.7)$$

mit

$$t \geq t_0,$$

$$p_{\Gamma}(t) = \frac{2\tau_S^M}{h_1(t)} \frac{d\lambda/dt}{\sqrt{(d\lambda/dt)^2 + (d\varphi/dt)^2}} [R_{\Gamma}(t) - r_{\Gamma}(t)] + \sigma_S^M,$$

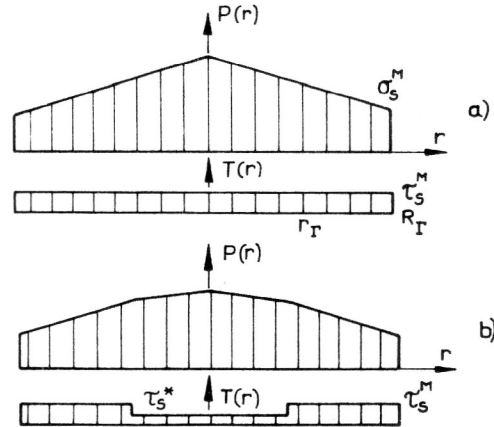
$$R_{\Gamma} = R_{\Gamma 0} \exp(\lambda/2).$$

Nachfolgend wird sich auf das Winklersche Modell für den elastischen Körper  $V_T$  beschränkt, d. h., es wird Gl. (3.1) angenommen. Die normalgerichteten elastischen Verschiebungen  $w$  ändern sich proportional zum Kontakt- druck  $[w(r, t) = \lambda_1 p(r, t)]$ . Folglich kann man eine kleine positive Zahl  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll h_1$ ) festlegen, für die man ein Kriterium zur eindeutigen Bestimmung von  $r_{\Gamma}(t)$ ,  $t \geq t_0$  angeben kann:

$$w(r, t) = \epsilon, \quad (3.8)$$

wobei  $w \equiv \lambda_1 p(r, t)$  entsprechend Gl. (3.7) zu bestimmen ist.

Die Verläufe der normalen und tangentialen Kontaktspannungen in der Schicht  $V_M$  sind auf Bild 2 dargestellt. Die Darstellung erfolgte für die Betragswerte. Es ist zu erkennen, daß die Verwendung einer aktiven Zwischenschicht die Werte  $p(r)$  und  $T(r)$  sichtbar verringert. Daraus folgt, daß sich die durch äußere Kräfte verrichtete Elementararbeit (Leistung) verringert.



**Bild 2**  
Verläufe der Kontaktspannungen bei Abwesenheit (a) und Anwesenheit (b) eines Schmierstoffes  $V^*$ .

Folgender Spannungszustand ist entsprechend der Theorie von Il'yushin und Kiyko auf der Kontaktfläche  $\partial V_M (z = h_1)$ :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} \approx -p(r, t) + \sigma_S; \quad \sigma_{33} = -p(r, t); \quad \sigma_{12} \approx 0;$$

$$\sigma_{13} = -T(r, t) \frac{d\lambda}{\sqrt{(d\lambda)^2 + (d\varphi)^2}};$$

$$\sigma_{23} = -T(r, t) \frac{d\lambda}{\sqrt{(d\lambda)^2 + (d\varphi)^2}} \quad (3.9)$$

mit  $T(r, t)$  und  $p(r, t)$  entsprechend den Gln. (3.5) und (3.7).

Die Leistung der äußeren Kräfte beträgt damit

$$N = \delta A / dt = 2 \iint_{S_k(t)} \vec{p}^{(n)} \cdot \vec{v}_T ds$$

$$= 2 \int_0^{R_{\Gamma}(t)} \vec{p}^{(n)} \cdot \vec{v}_T 2\pi r dr, \quad (3.10)$$

wobei wie folgt zu ersetzen ist

$$\vec{n} = -\vec{k}_3, \quad \vec{p}^{(n)} = \sigma_{ij} n_j \vec{k}_i$$

$$= T \frac{d\lambda}{\sqrt{(d\lambda)^2 + (d\varphi)^2}} \vec{k}_1 + T \frac{d\varphi}{\sqrt{(d\lambda)^2 + (d\varphi)^2}} \vec{k}_2 +$$

$$+ (-p) \vec{k}_3; \quad \vec{v}_T = \frac{1}{2} (d\varphi/dt) r \vec{k}_2 + (dh_1/dt) \vec{k}_3.$$

Als Ergebnis erhält man abschließend

$$N = 2\pi \frac{d\lambda}{\sqrt{(d\lambda)^2 + (d\varphi)^2}} \left\{ \frac{1}{3} \frac{d\varphi}{dt} [\tau_S^* r_{\Gamma}^3 + \tau_S^M (R_{\Gamma}^3 - r_{\Gamma}^3)] + \right.$$

$$+ \frac{2d\lambda}{3dt} [\tau_S^* r_{\Gamma}^3 + \tau_S^M R_{\Gamma}^3 - \tau_S^M r^2 (3R_{\Gamma} - 2r_{\Gamma})]$$

$$\left. + 2 \frac{d\lambda}{dt} \tau_S^M (R_{\Gamma} - r_{\Gamma}) r_{\Gamma}^2 + 2\pi R_{\Gamma}^2 h_1 \frac{d\lambda}{dt} \sigma_S^M \right\}.$$

Ausgehend von der Gl. (3.10) und den Ausdrücken  $p(r)$  sowie  $T(r)$  (siehe Bild 2) kann man schlußfolgern, daß  $dN/dr_{\Gamma} < 0$  für  $0 \leq r_{\Gamma} < R_{\Gamma}$  ist. Daraus ergibt sich, daß bei ähnlichen Bedingungen in plastischen Fließprozessen in einer dünnen Schicht  $V_M$  die Leistung der äußeren Kräfte mit der Erhöhung des Volumens  $V_*$ , welches im Kontaktbereich mit der „Schmierung“ konzentriert ist, zunimmt. Der Maximalwert wird bei vollständig verdrängter „Schmierung“ ( $r_{\Gamma} = 0$ ) erreicht.

Aus der Gl. (3.7) folgt, daß bei ähnlichen Bedingungen mit der Erhöhung des Parameters  $\chi = (d\varphi/d\lambda)$  der Kontaktdruck abnimmt. Dabei gilt  $p(r, t) \rightarrow \sigma_S^M$  bei  $\chi \rightarrow \infty$ . Somit kommt es mit der Erhöhung der Drehmomente der Körper  $V_T$  dazu, daß sich der Kontaktdruck in der Schicht  $V_M$  verringert, und das bedeutet, daß entsprechend Gl. (3.1) die elastischen Verschiebungen der Körper  $V_T$  abnehmen. Aufgrund der getroffenen Modellannahmen führt dies zu einer Verringerung des an einer Stelle konzentrierten Volumens  $V_*(t_0)$  der Zwischenschicht.

Damit ein maximaler Beitrag des Zwischenmediums beim Fließprozeß gewährleistet ist, wird wie folgt vorgefahren:

1. Zunächst wird bis zum Zeitpunkt  $t = t_0$  ein reines Aufsetzen ( $w = 0, t \leq t_0$ ) gewährleistet. Somit beginnt das plastische Fließen in der Schicht  $V_M(t_0)$  bei einer maximalen Menge an in der zentralen Zone

konzentrierter „Schmierung“. Die dazu benötigte Gesamtkraft kann nach folgender Formel berechnet werden

$$F = \iint_{S_k(t)} p(r, t_0) ds = \int_0^{R_{\Gamma}(t_0)} p(r, t_0) 2\pi r dr,$$

wobei  $p(r, t_0)$  durch die Beziehung (3.7) bei  $w = d\varphi/dt = 0$  definiert ist.

2. Als Folge des gleichzeitigen Aufsetzens und Einwirkens eines einwirkenden Drehmomentes ergibt sich ein „Breitschmieren“ des Zwischenmediums im zentralen Teil. Damit wird wesentlich der Kontaktdruck und der Reibungswert herabgesetzt und damit die Leistung der äußeren Kräfte.

#### LITERATUR

- [1] Колмогоров, В. Л., Орлов, С. Л., Колмогоров, Г. Л. Гидродинамическая подача смазки. – Москва: Металлургия, 1975.
- [2] Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. – Москва: Наука, 1969. (Перевод с немецкого).
- [3] Prandtl, L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. – Verhandlg. III. Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. – S. 484 – 491.
- [4] Колмогоров, В. Л. Механика обработки металлов давлением. – Москва: Металлургия, 1986.
- [5] Шевляков, В. Ю. Изотермическое течение пластической среды в учетом пристенного скольжения. – В сборнике „Исследование течений и фазовых превращений в полимерных системах“. – Свердловск, 1985. – с. 21 – 27.
- [6] Математическое моделирование технологических процессов обработки металлов. – Материалы научнотехнической конференции. – Пермь, 1987.
- [7] Ильющин, А. А. Некоторые вопросы теории пластического течения. – Изв. АН СССР. ОТН. – Москва 1958, № 2. – с. 64 – 86.
- [8] Леванов, А. Н., Колмогоров, В. Л. и др. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением. – Москва: Металлургия, 1976.
- [9] Ильющин, А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям. – ПММ. – Москва ХУИ (1954). – с. 265 – 288.
- [10] Кийко, И. А. Теория пластического течения. – Москва: МГУ, 1978.
- [11] Литвинов, В. Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. – Москва: Наука, 1982.
- [12] Галахов, М. А. и др. Математические модели контактной гидродинамики. – Москва: Наука, 1985.
- [13] Hamrock, B. J., Dowson, D. Ball Bearing Lubrication. – New York: Wiley & Sons.
- [14] Кадымов, В. А. Две задачи пластических течений на плоскости. – Доклады АН Азерб. ССР, 1983, № 8, с. 12 – 16.

#### Адрес автора:

канд. физ.-мат. наук  
Вагид Ахмед оглы Кадымов  
Институт математики и механики АН Азерб. ССР  
ул. Ф. Агаева, д. 9, к-л 553  
Б А К У  
370 602  
СССР