

# Berechnung von Balken unter Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität

Erich Raue

## 1. Problemübersicht

Die Untersuchung der Tragwerke im Grenzzustand der Tragfähigkeit setzt häufig eine Berechnung unter Berücksichtigung von physikalischen Nichtlinearitäten voraus. In vielen Fällen stellt jedoch die Tragwerksanalyse auf der Basis linear-elastischen Materialverhaltens bereits für die Beurteilung des Grenzzustandes der Nutzungsfähigkeit eine grobe Näherung dar, so daß auch für diesen Grenzzustand Berechnungsmodelle anzunehmen sind, die nichtlineares Materialverhalten berücksichtigen.

Bei biegebeanspruchten Stahlbetonkonstruktionen werden Abweichungen vom linear-elastischen Tragverhalten hervorgerufen durch

- Rißbildung des Betons in der Zugzone,
- nichtlineare Betonspannungsverteilung in der Druckzone,
- zunehmend plastische Verformungen des Stahles bei Erreichen der Fließgrenze.

Bei biegebeanspruchten Stahlkonstruktionen wird die Grenze  $p_E$  des elastischen Widerstandes erreicht, wenn die Randspannungen im meistbeanspruchten Querschnitt die Fließgrenze erreichen.

Die Nichtlinearität des Zusammenhangs zwischen Schnittgrößen und zugehörigen Formänderungen ist bei statisch unbestimmten Tragwerken Ursache für Schnittgrößenumlagerungen.

Bei Tragwerken aus elastisch-ideal-plastischem Material wird das elastisch-plastische Stadium durch die Belastungsintensität  $p_p$ , die den plastischen Widerstand charakterisiert, begrenzt. Bei entsprechend großem plastischem Formänderungsvermögen des Materials kann  $p_p$  zur Beurteilung des Grenzzustandes der Tragfähigkeit herangezogen werden. Ist das Formänderungsvermögen einzelner Querschnitte, Zonen u. ä. jedoch begrenzt, werden Formänderungskriterien für die Bewertung des Grenzzustandes der Tragfähigkeit relevant. Auch aus dieser Sicht gewinnen Berechnungsverfahren für Tragwerke mit *teilweisen* Schnittgrößenumlagerungen an Bedeutung. Die Tragwerksanalyse im Belastungsbereich  $p_E \leq p \leq p_p$  wird im allgemeinen iterativ durchgeführt, wobei beanspruchungsabhängige Steifigkeiten eingeführt werden. Eine Alternative hierzu bietet die Formulierung von Berechnungsmodellen auf der Grundlage von Extremalprinzipien und deren Überführung in Aufgaben der quadratischen Optimierung [1].

Die Anwendung dieser Methode auf Balkentragwerke mit elastisch-ideal-plastischem Materialverhalten, d. h. bilinearer Arbeitslinie, wird in [2] gezeigt.

Diese Berechnungsmethode läßt sich verallgemeinern und auch auf den Fall „multilinear“ Arbeitslinien universell für beliebige Tragwerke anwenden.

Nachfolgend wird dieser Berechnungsweg am Beispiel von Balkentragwerken demonstriert. Ohne Iteration oder schrittweise Berechnung ist es möglich, die Biegemomente und Durchbiegungen auch für Belastungsintensitäten  $p_E \leq p \leq p_p$  *direkt* zu bestimmen.

## 2. Modellbildung des Materialverhaltens

In Bild 1 sind charakteristische Momenten-Krümmungs-Beziehungen angegeben, die durch multilineare Arbeitslinien approximiert werden. Diese bereichsweise linearen Arbeitslinien werden zerlegt, indem der vorgegebene elastisch-plastische Körper als Summe spezifischer elastisch-plastischer Körper aufgefaßt wird. Dem entspricht eine Zerlegung des Momentes  $M$  in  $m$  Momentenanteile  $M_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )

$$M = M_1 + \dots + M_j + \dots + M_m = \sum_{j=1}^m M_j \quad (2.1)$$

denen die Plastizitätsbedingungen

$$M_j \leq M_j^{(+)} \quad (2.2)$$

$$-M_j \leq M_j^{(-)} \quad (2.3)$$

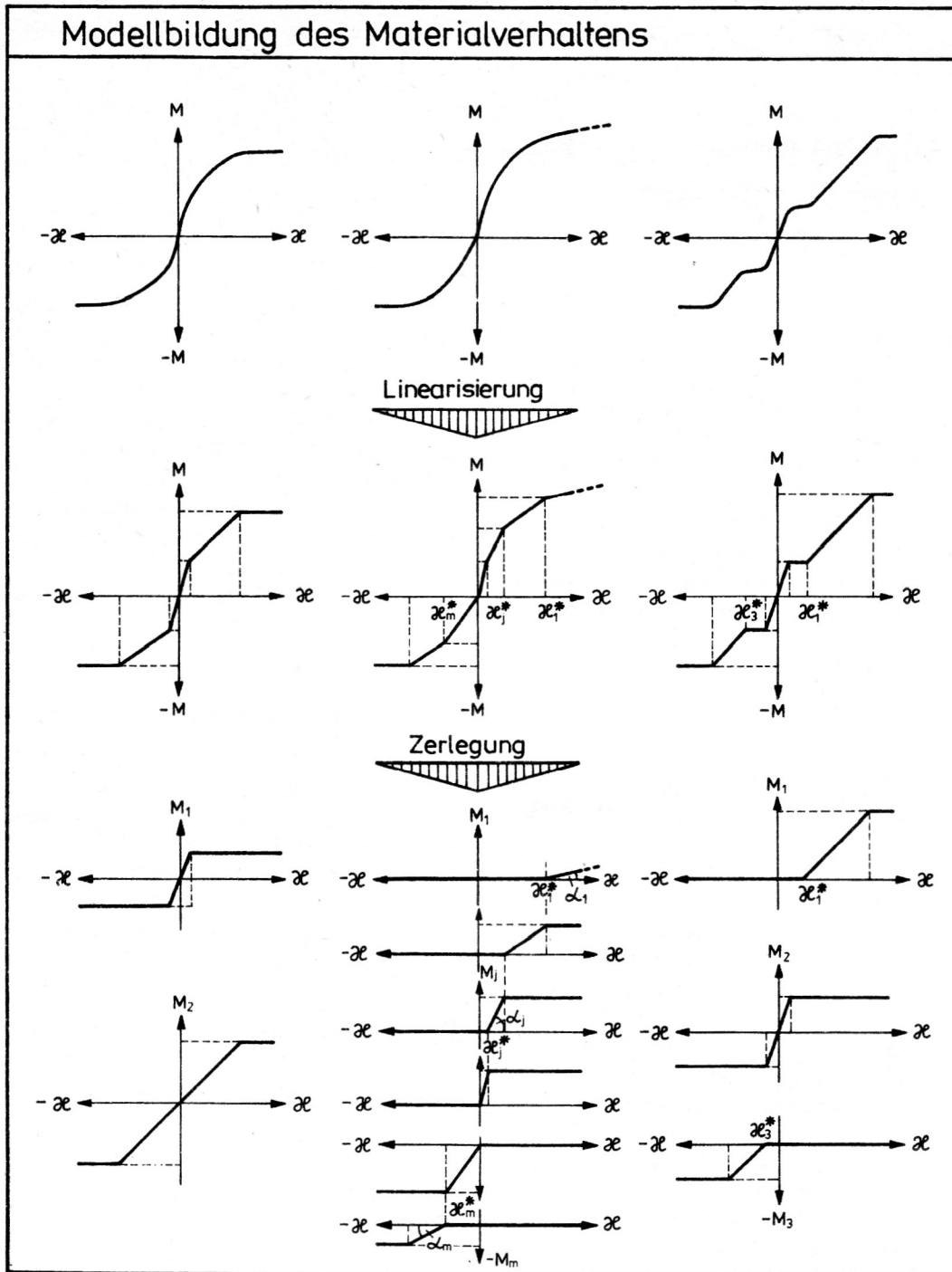
zugewiesen werden.

Bei Material mit Verfestigung im plastischen Stadium entfällt die Bedingung (2.2) für  $j = 1$  bzw. (2.3) für  $j = m$ .

Wie Bild 1 zeigt, sind teilweise unterschiedliche Zerlegungen in Schnittgrößenanteile möglich.

Für die praktische Berechnung ist eine Aufgliederung in möglichst wenige Momentenanteile anzustreben, um die Anzahl der Unbekannten gering zu halten. Die Zerlegung in Schnittgrößenanteile stellt eine Alternative zum Schichtenmodell dar, das ebenfalls prinzipiell immer anwendbar ist. Die Entscheidung zwischen Zerlegung der Schnittkräfte in Schnittgrößenanteile oder Zerlegung des Querschnitts in mehrere Querschnittsanteile hängt von der Spezifik der Arbeitslinie und der Plastizitätsbedingungen im Raum der Spannungen bzw. der Schnittgrößen ab.

# Modellbildung des Materialverhaltens



**Bild 1**  
Modellbildung des Materialverhaltens

## 3. Berechnungsgrundlagen

Nach dem Prinzip vom Minimum der konjugierten Formänderungsenergie gilt [1]:

In einem Tragwerk tritt unter Belastung  $p \leq p_p$  von allen statisch zulässigen Schnittgrößenzuständen derjenige ein, für den die konjugierte Formänderungsenergie ein Minimum annimmt.

**Statisch zulässig** ist ein Schnittgrößenzustand, wenn die Gleichgewichtsbedingungen sowie die statischen Randbedingungen erfüllt und an keiner Stelle des Tragwerkes die Plastizitätsbedingungen verletzt werden.

Für Balkentragwerke, bei denen die Querkräfte  $Q(x)$  keinen Einfluß auf die Formänderungen und auf die Plastizitätsbedingungen haben, liefert das Prinzip vom Minimum der konjugierten Formänderungsenergie folgende Extremalaufgabe [2]:

Von allen statisch zulässigen Biegemomenten  $M_j(x)$

$$M(x) = \sum_{j=1}^m M_j(x)$$

treten unter einer Belastung  $p(x) = p\bar{p}(x)$  mit der Belastungsverteilung  $\bar{p}(x)$  und der Belastungsintensität  $p \leq p_p$  diejenigen ein, für die die Extremalbedingung

$$\int_0^l \sum_{j=1}^m \left[ \frac{1}{2} \frac{M_j^2(x)}{B_j(x)} + \kappa_j^*(x) M_j(x) \right] dx \rightarrow \text{Minimum (3.1)}$$

erfüllt ist.

Hierbei ist  $B_j(x)$  die zum Momentenanteil  $M_j(x)$  gehörige Biegesteifigkeit

$$B_j = \tan \alpha_j \quad (3.2)$$

Die mit  $\kappa_j^*$  bezeichneten Krümmungen stellen „Vor“-Krümmungen dar (Abb. 1).

Die Biegemomente  $M_j(x)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) sind statisch zulässig, wenn sie folgende Nebenbedingungen erfüllen:

#### Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dx^2} + p &= \frac{d^2 \sum_{j=1}^m M_j}{dx^2} + p \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{d^2 M_j}{dx^2} + p = 0 \quad x \in [x_0, x_n] \end{aligned} \quad (3.3)$$

#### Statische Randbedingungen

Bei frei verschieblichen Rändern gilt für die Querkräfte

$$-Q_j(x_0) = M_j'(x_0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.4)$$

$$Q_j(x_n) = -M_j'(x_n) = 0.$$

Bei gelenkiger Randlagerung ist

$$-M_j(x_0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.5)$$

$$M_j(x_n) = 0.$$

#### Plastizitätsbedingungen

Für die Biegemomentenanteile gilt

$$M_j(x) - M_j^{(+)}(x) \leq 0 \quad (3.6)$$

$$-M_j(x) - M_j^{(-)}(x) \leq 0$$

Die Extremalaufgabe mit der Extremalbedingung (3.1) und den Restriktionen (3.3 bis 3.6) läßt sich in eine Extremalaufgabe überführen, die von den Nebenbedingungen (3.3 bis 3.6) frei ist. Dazu wird unter Verwendung der Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_w, \lambda_{w_0}, \lambda_{w_n}$  usw. die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int_0^l \frac{M_j^2}{B_j} dx + \sum_{j=1}^m \int_0^l \kappa_j^* M_j dx \\ &+ \int_0^l \lambda_w \left[ \sum_{j=1}^m M_j'' + p \right] dx \end{aligned}$$

$$+ [\lambda_{w_0} \sum_{j=1}^m M_j'(x_0) - \lambda_{w_n} \sum_{j=1}^m M_j'(x_n)]_{l_{pQ}} \quad (3.7)$$

$$+ [-\lambda_{\varphi_0} \sum_{j=1}^m M_j(x_0) + \lambda_{\varphi_n} \sum_{j=1}^m M_j(x_n)]_{l_{pM}}$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^l [\lambda_j^{(+)} (M_j - M_j^{(+)}) + \lambda_j^{(-)} (-M_j - M_j^{(-)})] dx$$

mit  $\lambda_j^{(+)} \geq 0$  und  $\lambda_j^{(-)} \geq 0$ .

Durch  $l_{pQ}$  bzw.  $l_{pM}$  werden querkraftfreie bzw. momentenfreie Ränder markiert.

Nach partieller Integration des dritten Gliedes in Gl. (3.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int_0^l \frac{M_j^2}{B_j} dx + \sum_{j=1}^m \int_0^l \kappa_j^* M_j dx \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_0^l \lambda_w' M_j dx + \int_0^l \lambda_w p dx \\ &+ \lambda_w(x_n) \sum_{j=1}^m M_j'(x_n) - \lambda_w(x_0) \sum_{j=1}^m M_j'(x_0) \\ &- \lambda_w'(x_n) \sum_{j=1}^m M_j(x_n) \\ &+ \lambda_w'(x_0) \sum_{j=1}^m M_j(x_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$+ [\lambda_{w_0} \sum_{j=1}^m M_j'(x_0) - \lambda_{w_n} \sum_{j=1}^m M_j'(x_n)]_{l_{pQ}}$$

$$+ [-\lambda_{\varphi_0} \sum_{j=1}^m M_j(x_0) + \lambda_{\varphi_n} \sum_{j=1}^m M_j(x_n)]_{l_{pM}}$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^l [\lambda_j^{(+)} (M_j - M_j^{(+)}) + \lambda_j^{(-)} (-M_j - M_j^{(-)})] dx$$

Die Variation der Lagrange-Funktion nach  $M_j$  ergibt die Verträglichkeitsbedingungen

$$\frac{M_j}{B_j} + \kappa_j^* + \lambda_j^{(+)} - \lambda_j^{(-)} - \kappa = 0 \quad (3.9)$$

$$x \in [x_0, x_n]$$

für die Krümmung  $\kappa$ , wobei  $\lambda_w = w$  als Durchbiegung identifiziert werden kann.

Durch Variation von  $L$  nach den Randwerten von  $M$  und  $M'$  auf den Rändern  $l_{pQ}$  und  $l_{pM}$  erhält man die Beziehungen

$$\lambda_{w_0} = \lambda_w(x_0) = w(x_0)$$

$$\lambda_{w_n} = \lambda_w(x_n) = w(x_n)$$

und

$$\lambda_{\varphi_0} = \lambda_\varphi(x_0) = w'(x_0) = \varphi_0$$

$$\lambda_{\varphi_n} = \lambda_\varphi(x_n) = w'(x_n) = \varphi_n$$

Die entsprechenden Variationen von L auf den nicht zu  $I_{pQ}$  und  $I_{pM}$  gehörigen liefern die kinematischen Randbedingungen für die Durchbiegungen  $w_0$  bzw.  $w_n$  sowie die Verdrehungen  $\varphi_0$  bzw.  $\varphi_n$ .

Die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_j^{(+)}$  und  $\lambda_j^{(-)}$  stellen die Fließparameter dar und sind mit den plastischen Krümmungsanteilen identisch.

Die Minimumaufgabe (3.1) mit den Nebenbedingungen (3.3 bis 3.6) geht mit Hilfe der Lagrange-Funktion in die Minimaxaufgabe

$$\min_{M, w, \lambda} \max L(M, w, \lambda^{(+)}, \lambda^{(-)})$$

mit

$$\lambda^{(+)} \geq 0$$

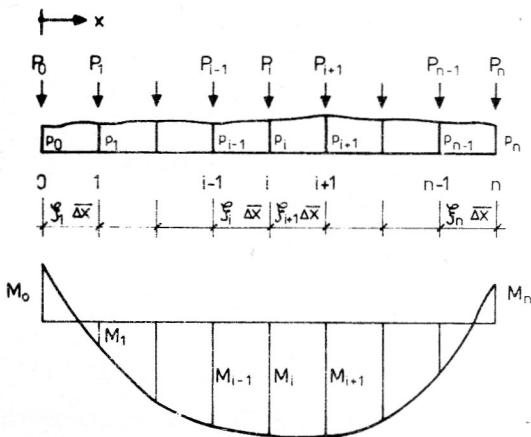
$$\lambda^{(-)} \geq 0$$

über.

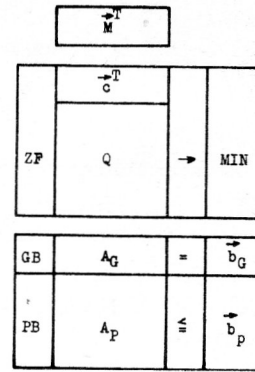
#### 4. Diskretisiertes Berechnungsmodell

Um die Extremalaufgabe (3.1) mit den Nebenbedingungen (3.3 bis 3.6) in eine quadratische Optimierungsaufgabe zu überführen, ist eine Diskretisierung vorzunehmen.

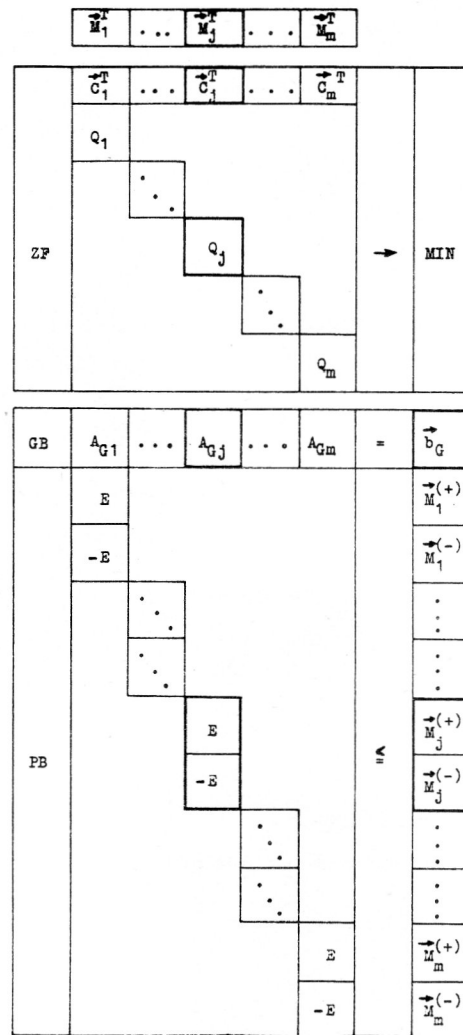
Die Biegemomente  $M_i(x)$ , die Belastungsfunktion  $\bar{p}(x)$ , die Durchbiegung  $w(x)$ , die Fließparameter  $\lambda^{(+)}(x)$ ,  $\lambda^{(-)}(x)$  usw. werden durch ihre Funktionswerte an ausgewählten Stellen  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) beschrieben und als Vektoren dargestellt (Bild 2)



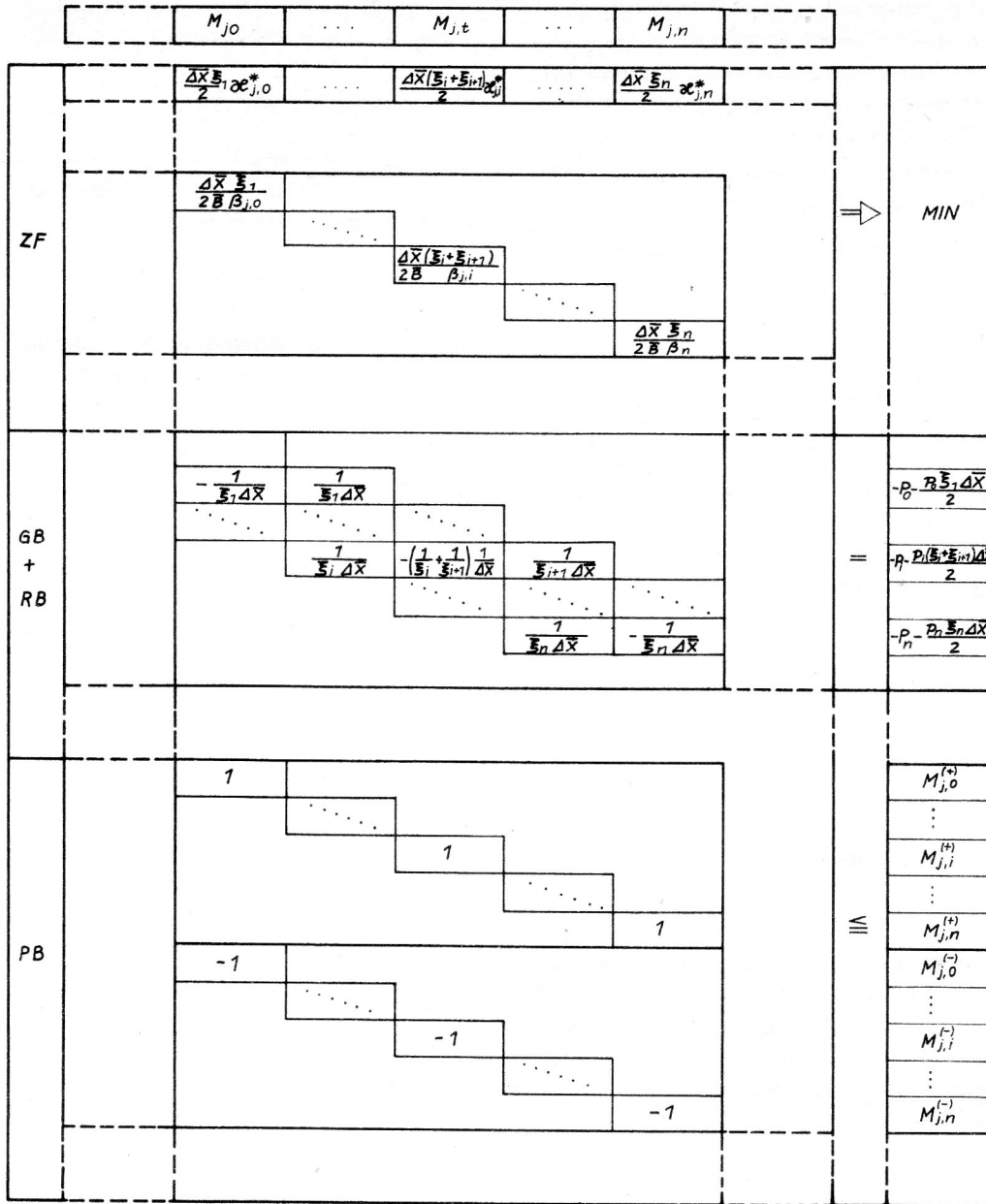
**Bild 2**  
Diskretisierung der Belastung und des Momentenverlaufes



**Bild 3**  
Problematrix (Übersicht)



**Bild 4**  
Problematrix



**Bild 5**  
 Problematrix (Schnittgrößenanteil j)

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_j &= [M_{j,0}, \dots, M_{j,i}, \dots, M_{j,n}]^T \\
 \vec{p} &= [\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_i, \dots, \bar{p}_n]^T \\
 \vec{w} &= [w_0, \dots, w_i, \dots, w_n]^T \\
 \vec{M}_j^{(+)} &= [M_{j,0}^{(+)}, \dots, M_{j,i}^{(+)}, \dots, M_{j,n}^{(+)}]^T \\
 \lambda^{(+)} &= [\lambda_{j,0}^{(+)}, \dots, \lambda_{j,i}^{(+)}, \dots, \lambda_{j,n}^{(+)}]^T \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

In der Lagrange-Funktion werden näherungsweise die Integration durch Summation, die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt. Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen dieser angenäherten Lagrange-Funktion nach den Lagrange-Multiplikatoren  $w_j, \lambda_j^{(+)}, \lambda_j^{(-)}$  ergeben sich die Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen in diskretisierter Form [2].

Im Ergebnis erhält man eine quadratische Optimierungsaufgabe mit der Zielfunktion (ZF)

$$\frac{1}{2} \vec{M}^T \mathbf{Q} \vec{M} + \vec{c}^T \vec{M} \longrightarrow \text{Minimum} \tag{4.2}$$

Nebenbedingungen sind Gleichgewichtsbedingungen (GB) einschließlich statischer Randbedingungen (RB)

$$\mathbf{A}_G \vec{M} = \vec{b}_G \tag{4.3}$$

und Plastizitätsbedingungen (PB)

$$\mathbf{A}_P \vec{M} = \vec{b}_P \tag{4.4}$$

mit

$$\vec{M} = [\vec{M}_1, \dots, \vec{M}_j, \dots, \vec{M}_m]^T \tag{4.5}$$

Der Aufbau der Problematrix der Optimierungsaufgabe und die Elemente der Matrizen  $\mathbf{Q}, \mathbf{A}_G, \mathbf{A}_P$  und der Vektoren  $\vec{c}, \vec{b}_G$  und  $\vec{b}_P$  sind in den Bildern 3 bis 5 angegeben.

Als Lösung der Optimierungsaufgabe (4.2) bis (4.4) erhält man die Biegemomente  $M$  für eine vorgegebene Belastung. Die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren stellen die Durchbiegungen und die plastischen Verdrehungen in den Teilungspunkten dar.

Soll die Grenztragfähigkeit  $p_p$  ermittelt werden, so ist die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} p &\longrightarrow \text{Maximum} \\ A_G \vec{M} - p \vec{b}_G &= 0 \\ A_P \vec{M} &= \vec{b}_P \end{aligned} \quad (4.6)$$

zu lösen.

Bei Anwendung der Tafel nach Bild 5 ist darauf zu achten, daß die Gleichgewichtsbedingungen nur für solche Teilungspunkte aufgestellt werden, an denen eine Verschiebung  $w$  möglich ist. Sind die Balkenränder unver-schieblich gelagert, so entfallen die zweite bzw. vor-letzte Bedingungsgleichung in

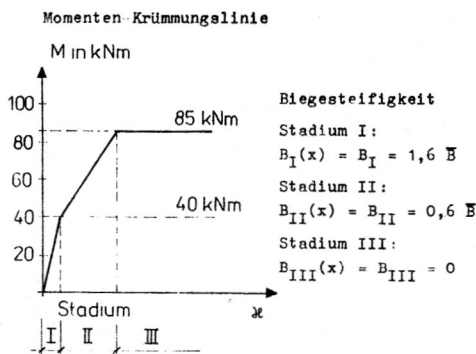
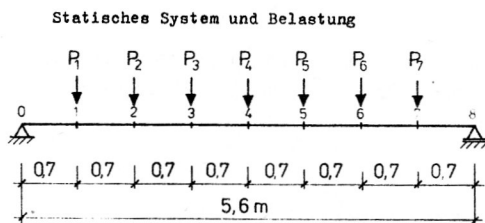
$$A_G \vec{M} = \vec{b}_G,$$

bei eingespannten Rändern entsprechend die erste bzw. letzte Bedingungsgleichung.

## 5. Berechnungsbeispiele

### Beispiel 1

Für den in Bild 6 dargestellten, beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldträger sollen die Biegemomente und Durchbiegungen bestimmt werden. Die Momenten-Krümmungslinie im Bereich positiver Biegemomente hat einen trilinearen Verlauf, der sich in zwei bilineare Verläufe zerlegen läßt.



Das Biegemoment  $M(x)$  wird demzufolge als Summe der beiden Anteile  $M_1(x)$  und  $M_2(x)$  dargestellt.

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x)$$

Es wird angenommen, daß die Biegesteifigkeiten  $B_I$  und  $B_{II}$  über die Balkenlänge konstant sind. Da der Balken gelenkig gelagert ist, wird

$$M_{1,0} = M_{2,0} = M_{1,8} = M_{2,8} = 0$$

gesetzt, und die entsprechenden Spalten der Problem-matrix werden gestrichen. Es entfallen in den Gleichungsbedingungen nach Bild 5 die beiden ersten und die beiden letzten Bedingungsgleichungen.

Die Zielfunktion wird mit  $\bar{B}$  multipliziert. Man erhält deshalb die Durchbiegungen ebenfalls  $\bar{B}$ -fach.

Mit

$$\bar{B}q_{1,ii} = \frac{\Delta \bar{x}}{2} \frac{(\xi_i + \xi_{i+1})}{\beta_{1,i}} = \frac{1 \cdot (0,7 + 0,7)}{2 \cdot 1} = 0,7$$

$$(i = 1, 2, \dots, 7)$$

$$\bar{B}q_{2,ii} = \frac{\Delta \bar{x} (\xi_i + \xi_{i+1})}{2\beta_{2,i}} = \frac{1 \cdot (0,7 + 0,7)}{2 \cdot 0,6} = 1,16\bar{B}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 7)$$

$$\frac{1}{\xi_i \Delta \bar{x}} = \frac{1}{0,7 \cdot 1,0} = 1,42857$$

$$-\left(\frac{1}{\xi_i} + \frac{1}{\xi_{i+1}}\right) \frac{1}{\Delta \bar{x}} = -\left(\frac{1}{0,7} + \frac{1}{0,7}\right) \frac{1}{1} = -2,85714$$

$$\begin{aligned} l &= 5,6 \text{ m} \\ \Delta x_1 = \dots = \Delta x_8 &= 0,7 \text{ m} \\ \Delta \bar{x} &= 1 \text{ m} \\ \xi_1 = \dots = \xi_8 &= 0,7 \\ P_1 = \dots = P_7 &= p \end{aligned}$$

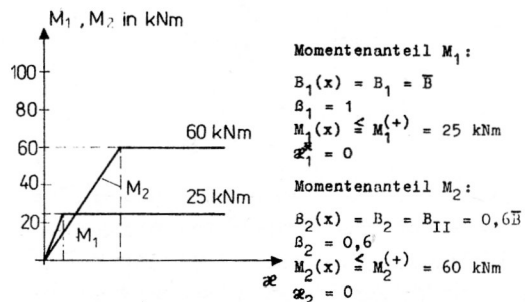
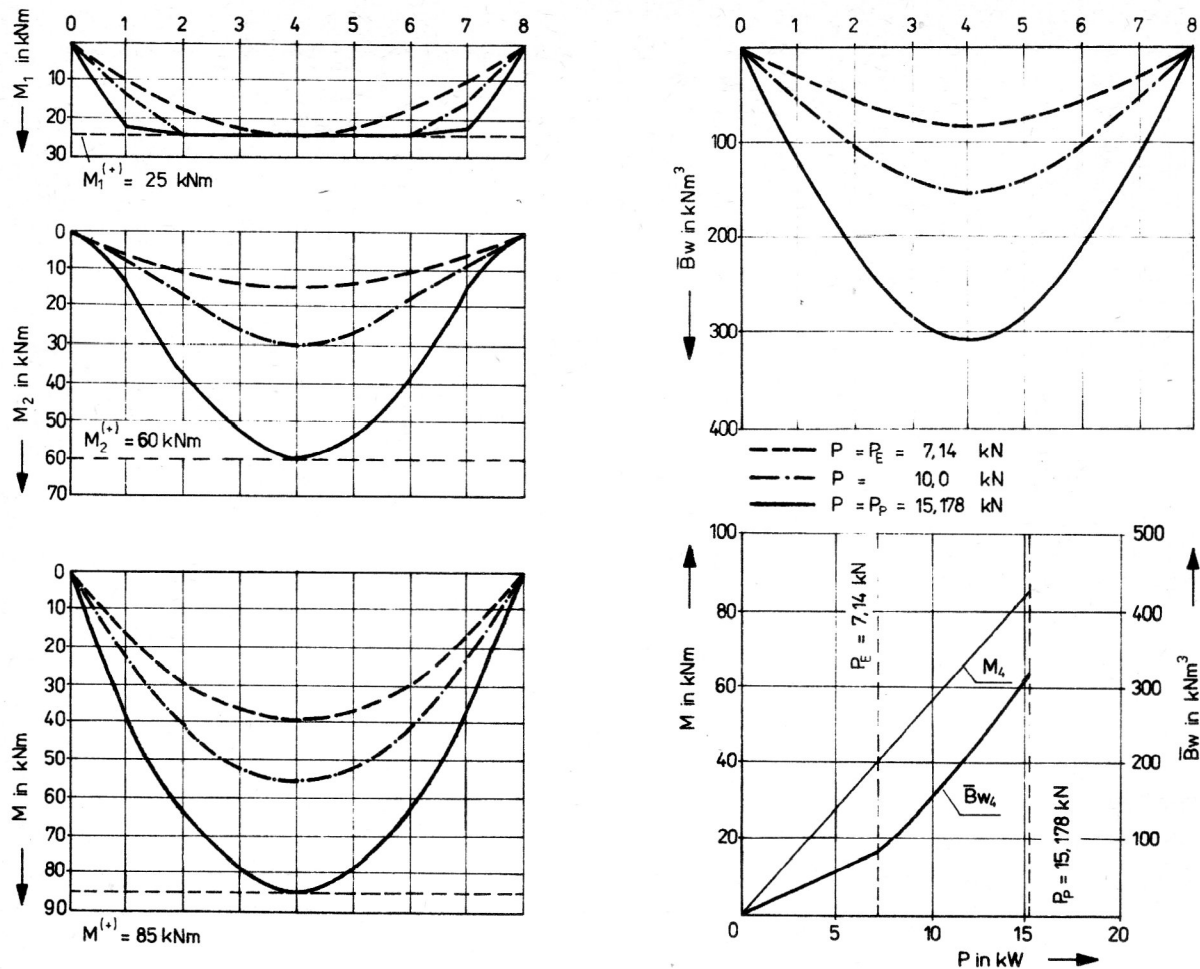


Bild 6  
 Statisches System, Belastung und Momenten-Krümmungslinie zu Berechnungsbeispiel 1



**Bild 7**  
Entwicklung der Biegemomente und Durchbiegungen (Beispiel 1)

kann die in Bild 6 angegebene Problematrix aufgestellt werden. Die Grenze des elastischen Widerstandes ist bei  $P = 7,14 \text{ kN}$  erreicht, die Grenztragfähigkeit bei  $P_p = 15,178 \text{ kN}$ .

In Bild 7 sind die Ergebnisse der Berechnung für drei Belastungsintensitäten zusammengestellt.

Faßt man den Knick in der Arbeitslinie bei  $M = 40 \text{ kNm}$  als Rißbildungsmoment auf, so kann man die Ausbreitung der gerissenen Bereiche über den Balken an der Entwicklung des Momentenanteils  $M_1$  verfolgen. In den Bereichen mit  $M_1 = M_1^{(+)} = 25 \text{ kNm}$  ist der Balken gerissen. Deutlich ist die Zunahme der Durchbiegungen nach Überschreiten der Grenze des elastischen Widerstandes erkennbar. Da der Balken statisch bestimmt gelagert ist, nehmen die Biegemomente  $M(x)$  proportional zur Belastung zu.

#### Beispiel 2

Im Unterschied zu Beispiel 1 soll der untersuchte Träger an den beiden Rändern eingespannt sein. Geometrie und Belastung sollen die gleichen wie im Beispiel 1 sein. Es wird vorausgesetzt, daß sich die Arbeitslinien im Bereich negativer und positiver Momente entsprechen und den im Beispiel 1 angenommenen Verlauf haben.

Das Biegemoment  $M(x)$  wird wieder als Summe von zwei Anteilen  $M_1(x)$  und  $M_2(x)$  aufgefaßt.

Im Unterschied zu dem vorangegangenen Beispiel sind die Plastizitätsbedingungen zu ergänzen

$$M_1 \leq M_1^{(+)} \quad \text{und} \quad -M_1 \leq M_1^{(-)}$$

$$M_2 \leq M_2^{(+)} \quad \text{und} \quad -M_2 \leq M_2^{(-)}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind für alle Innenpunkte  $i = 1, 2, \dots, 7$  aufzustellen.

Die Ergebnisse der Berechnung zeigt Bild 8.

#### Beispiel 3

Untersucht wird ein beidseitig eingespannter Balken mit der gleichen Belastungsanordnung und Geometrie wie im Beispiel 1 und 2.

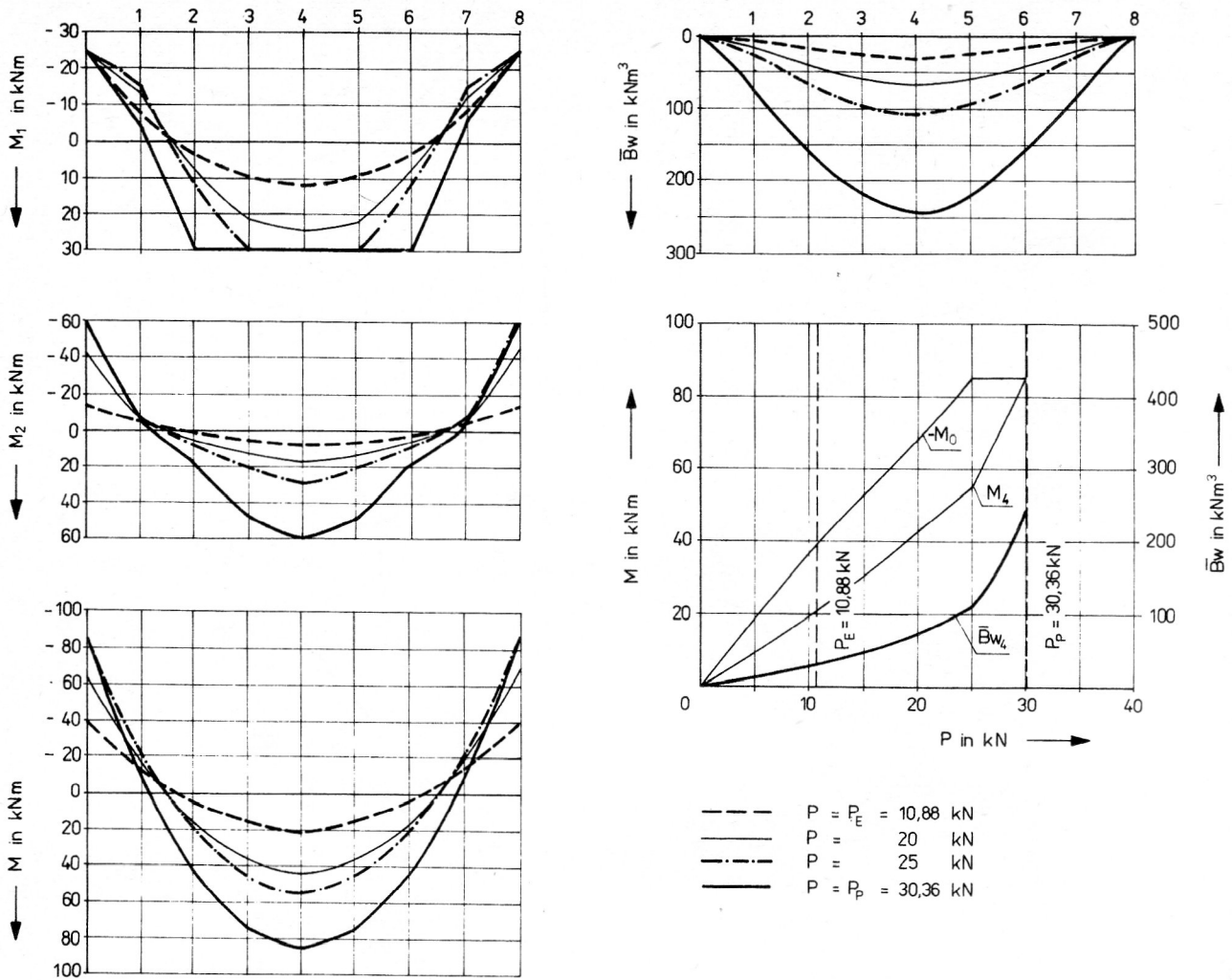
Das Materialverhalten wird durch die in Bild 9 dargestellte Arbeitslinie beschrieben, die in 3 Anteile zerlegt wird.

Die Matrizen  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  sind Diagonalmatrizen mit den Elementen

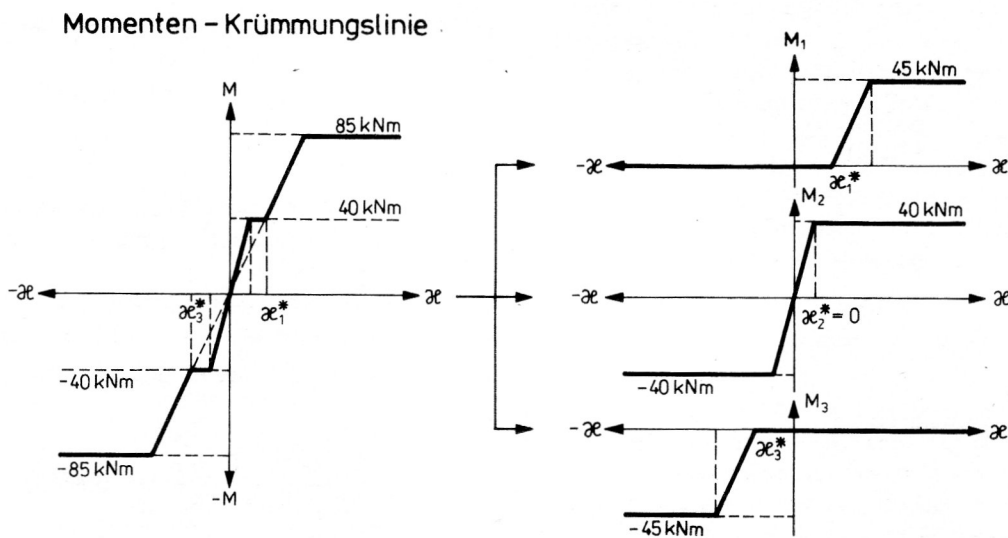
$$\bar{B}q_{1,00} = \frac{\Delta \bar{x} \xi_1}{2\beta_{1,0}} = \frac{1 \cdot 0,7}{2 \cdot 0,85} = 0,4118 = \bar{B}q_{1,88}$$

$$\bar{B}q_{1,ii} = \frac{\Delta \bar{x} (\xi_i + \xi_{i+1})}{2\beta_{1,i}} = \frac{1 \cdot (0,7 + 0,7)}{2 \cdot 0,85} = 0,82353$$

( $i = 1, 2, \dots, 7$ )

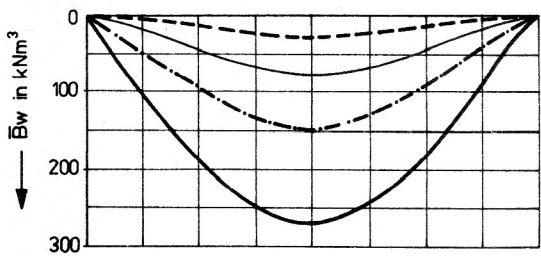
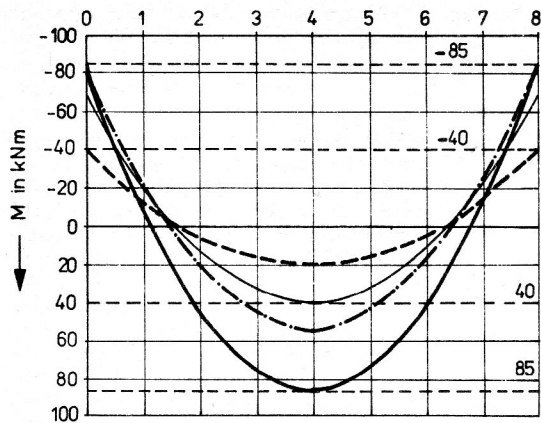


**Bild 8**  
Entwicklung der Biegemomente und Durchbiegungen (Beispiel 2)



**Bild 9**  
Momenten-Krümmungslinie zu Berechnungsbeispiel 3





- - - - -  $P = P_E = 10,88 \text{ kN}$   
 ————  $P = 20,0 \text{ kN}$   
 - · - · -  $P = 25,0 \text{ kN}$   
 ————  $P = P_p = 30,36 \text{ kN}$

**Bild 10**  
Entwicklung der Biegemomente und Durchbiegungen (Beispiel 3)

$$\bar{B}q_{2,00} = \frac{\Delta \bar{x} \xi_1}{2\beta_{2,0}} = \frac{1 \cdot 0,7}{2 \cdot 1,6} = 0,2188$$

$$\bar{B}q_{2,ii} = \frac{\Delta \bar{x} (\xi_i + \xi_{i+1})}{2\beta_{2,i}} = \frac{1 \cdot (0,7 + 0,7)}{2 \cdot 1,6} = 0,4375$$

( $i = 1, 2, \dots, 7$ )

$$\bar{B}q_{3,00} = \bar{B}q_{1,00} = \bar{B}q_{3,88}$$

$$\bar{B}q_{3,ii} = \bar{B}q_{1,ii}$$

( $i = 1, 2, \dots, 7$ )

Für den linearen Anteil der Zielfunktion erhält man

$$\begin{aligned} \bar{B}c_{1,0} &= \frac{\Delta \bar{x} \xi_1}{2} \bar{B} \kappa_{1,0}^* = \frac{1 \cdot 0,7}{2} \cdot \frac{40}{0,85} = \\ &= 16,4706 = \bar{B}c_{1,8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}c_{1,i} &= \frac{\Delta \bar{x} (\xi_i + \xi_{i+1})}{2} \bar{B} \kappa_{1,i}^* = \\ &= \frac{1 \cdot (0,7 + 0,7)}{2} \cdot \frac{40}{0,85} = 32,9412 \end{aligned}$$

( $i = 1, 2, \dots, 7$ )

$$\bar{B}c_{2,0} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 8)$$

$$\bar{B}c_{3,0} = -\bar{B}c_{1,0} = \bar{B}c_{3,8}$$

$$\bar{B}c_{3,i} = -\bar{B}c_{1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

Die Entwicklung der Biegemomente und Durchbiegungen ist in Bild 10 dargestellt.

Der Vergleich der Momentenverläufe nach Beispiel 2 und 3 zeigt nur geringe Abweichungen. Die Unterschiede zwischen den Arbeitslinien nach Beispiel 2 und 3 werden bei den Durchbiegungen deutlich.

Im Beispiel 3 sind die Durchbiegungen in Feldmitte bei  $P = 25 \text{ kN}$  um 40 %, bei  $P = P_p = 30,36 \text{ kN}$  um 11,5 % größer.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Raue, E.: Nichtlineare Analyse statisch und dynamisch beanspruchter Flächentragwerke. In: Schriftenreihe der HAB Weimar 1989 Nr. 71.
- [ 2 ] Raue, E.: Berechnung von Balkentragwerken unter Berücksichtigung von Plastifizierungen. In: Wissenschaftliche Zeitschrift der HAB Weimar 1989 H. 5.

#### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. Erich Raue  
 Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar  
 Sektion Bauingenieurwesen  
 Wissenschaftsbereich Stahlbeton-, Spannbeton- und  
 Plastbauwerke  
 Marienstraße 13  
 Weimar, 5300