

Freie Torsion prismatischer Verbundstäbe mit dünnwandigen offenen Querschnitten

Wolfgang Pfefferkorn, Torsten Hauck

Ein dünnwandiger Verbundstab (vgl. Bild 1) soll ein Konstruktionselement, bestehend aus homogenen, isotropen, linear elastischen, fest aneinander haftenden Materialschichten sein, für dessen Querschnittsabmessungen gilt: $t \ll H$. An den Stabenden wird ein Torsionsmoment M_z eingelegt. Es entstehen die Schubspannungskomponenten $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ und $\tau_{zy} = \tau_{yz}$. Die anderen Komponenten des Spannungstensors sind vernachlässigbar. Das wird durch Untersuchungen des räumlichen Spannungszustandes eines solchen Verbundstabes unter Nutzung der Methode der finiten Elemente (FEM) bestätigt.

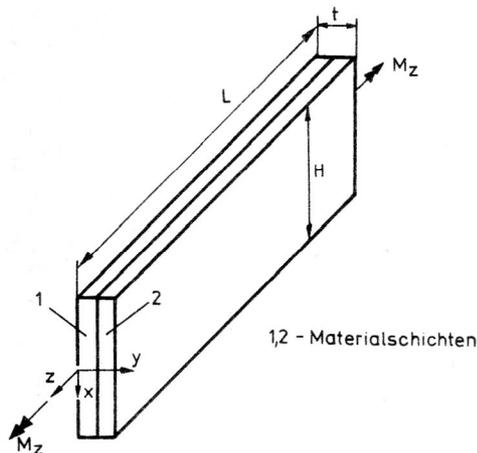


Bild 1
Verbundstab

Führt man die Spannungsfunktion $\Phi(x, y)$ ein, deren partielle Ableitungen nach den Querschnittskordinaten die Schubspannungen in der Querschnittsfläche des Torsionsstabes ergeben.

$$\Phi_{,x} = -\tau_{zy}; \quad \Phi_{,y} = \tau_{zx} \quad (1)$$

und ermittelt die Linien gleicher Funktionswerte der Spannungsfunktion, so ist die Schubspannung normal zu einer solchen Linie gleich Null und die Schubspannung längs einer solchen Linie die Resultierende aus den Komponenten τ_{zx} und τ_{zy} .

In Bild 2 werden diese Linien gleicher Funktionswerte der Spannungsfunktion $\Phi(x, y)$ in einem Biverbundquerschnitt dargestellt.

Man sieht, daß in einiger Entfernung von den Rändern $x = \pm H/2$ die Schubspannung τ_{zy} verschwindet. Die Schubspannung τ_{zx} in der **Materialschicht** i ergibt sich zu

$$\tau_{zx_i} = c_i (y - y_T) \quad (2)$$

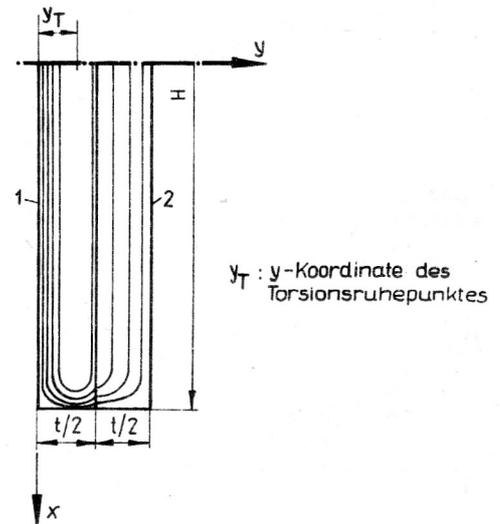


Bild 2
Linien gleicher Funktionswerte der Spannungsfunktion $\Phi(x, y)$

In Kenntnis dieser Zusammenhänge lassen sich die Näherungsformeln für die Berechnung torsionsbeanspruchter prismatischer Stäbe mit dünnwandigen homogenen Querschnitten durch Näherungsformeln für dünnwandige Verbundquerschnitt ergänzen.

Aus der Gleichheit der Schubverzerrungen γ_{zx_1} und γ_{zx_2} zweier benachbarter Materialschichten 1 und 2 in der Fugestelle $y = t/2$ folgt auf Grund unterschiedlicher Schubmoduln G_1 und G_2 für die Schubspannung der Schicht 1

$$\tau_{zx_1} \left(y = \frac{1}{2} t \right) = \tau_{zx_2} \left(y - \frac{1}{2} t \right) \frac{G_1}{G_2} \quad (3)$$

Führt man das Schubmodulverhältnis $\nu_i = G_i/G_0$ ein, wobei G_i der Schubmodul der Materialschicht i und G_0 ein Bezugsschubmodul sind, so ergibt sich mit $c_i = \nu_i \cdot K$ die Schubspannung τ_{zx_i} zu

$$\tau_{zx_i} = \nu_i K (y - y_T) \quad (4)$$

Die Bestimmungsgleichung für die Koordinate y_T des Torsionsruhepunktes, der gleich dem Schubmittelpunkt ist, ergibt sich aus

$$0 = \sum_{i=1}^n \int_{(y_i)} \tau_{zx_i} dy \quad (5)$$

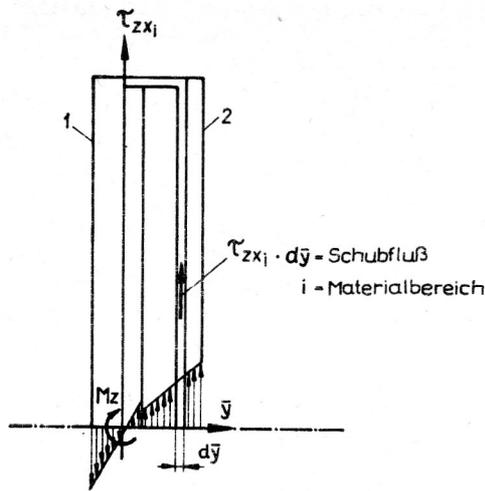


Bild 3
Schubspannungsverteilung τ_{zx_i} und Torsionsröhre mit dem Schubfluß $\tau_{zx_i} \cdot d\bar{y}$ (dargestellt für $G_1 > G_2$)

worin n die Anzahl der Materialschichten darstellt, zu:

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \int_{(y_i)} y dy}{\sum_{i=1}^n v_i \int_{(y_i)} dy} \quad (6)$$

Die Bestimmungsgleichung für die Konstante K erhält man mit Bezug auf die Föppl'sche Näherung für dünnwandige Querschnitte und mit $\bar{y} = y - y_T$ (siehe dazu Bild 3)

$$\tau_{zx_i} \cdot d\bar{y} = \frac{dM_z}{2H\bar{y}} \quad (7)$$

Nach dem Einsetzen von Gleichung (4) in (7) und Integration ist

$$K = \frac{M_z}{2H \sum_{i=1}^n v_i \int_{(\bar{y}_i)} \bar{y}^2 d\bar{y}} \quad (8)$$

und mit dem modifizierten axialen Flächenträgheitsmoment, bezogen auf den Torsionsruhepunkt

$$I_{x_0} = H \sum_{i=1}^n v_i \int_{(\bar{y}_i)} \bar{y}^2 d\bar{y} \quad (9)$$

kann man die Schubspannung τ_{zx} in der Materialschicht i wie folgt bestimmen:

$$\tau_{zx_i} = v_i \frac{M_z}{2I_{x_0}} \bar{y} \quad (10)$$

Die Torsionssteifigkeit GI_t des Verbundstabes erhält man mit

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2G_i} \int_{(V_i)} \tau_{zx_i}^2 dV = \frac{1}{2} M_z \varphi \quad (11)$$

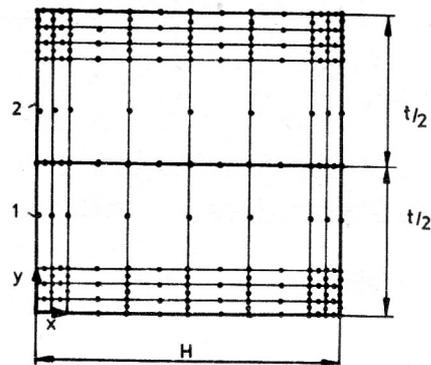


Bild 4
Finite-Elemente-Vernetzung

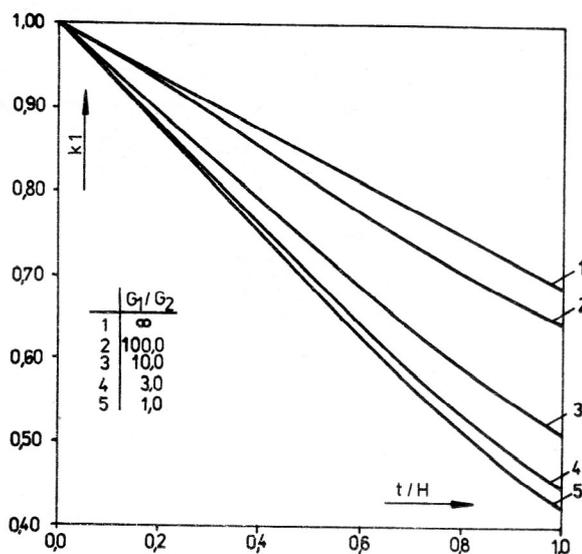


Bild 5
Vergleich der Torsionssteifigkeiten
 $k_1 = GI_t(\text{FEM})/GI_t(\text{Näherung})$

zu

$$GI_t = 4 G_o I_{x_0} \quad (12)$$

Damit kann zwischen dem Torsionsmoment M_z und der Drillung Θ folgender Zusammenhang formuliert werden:

$$\Theta = \frac{M_z}{4 G_o I_{x_0}} \quad (13)$$

Zur Abschätzung der Genauigkeit dieser Näherung wurden an dem in Bild 2 dargestellten Biverbundquerschnitt für unterschiedliche Geometrie- und Materialverhältnisse Vergleichsrechnungen mit dem FEM-Programm FEAP durchgeführt. Zur Diskretisierung des Torsionsproblems wurden isoparametrische 8-Knoten-Elemente mit quadratischem Ansatz für die Spannungsfunktion im Element verwendet. Das Bild 4 zeigt die Vernetzung des Stabquerschnittes mit den Materialbereichen 1 und 2. Zum Vergleich der Ergebnisse des FEM-Programmes mit den Näherungslösungen für dünnwandige offen geschichtete Profile werden die Größen k_1 , k_2 und k_3 als Ver-

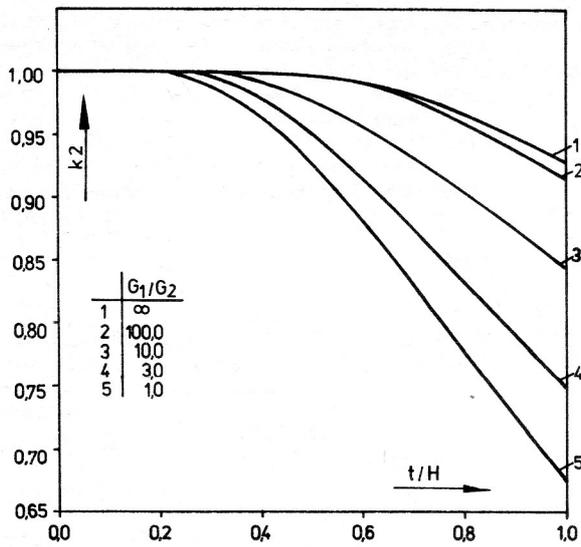


Bild 6
 Vergleich der maximalen Schubspannungen in der Materialschicht 1
 $k_2 = \tau_{1\max}(\text{FEM}) / \tau_{1\max}(\text{Näherung})$

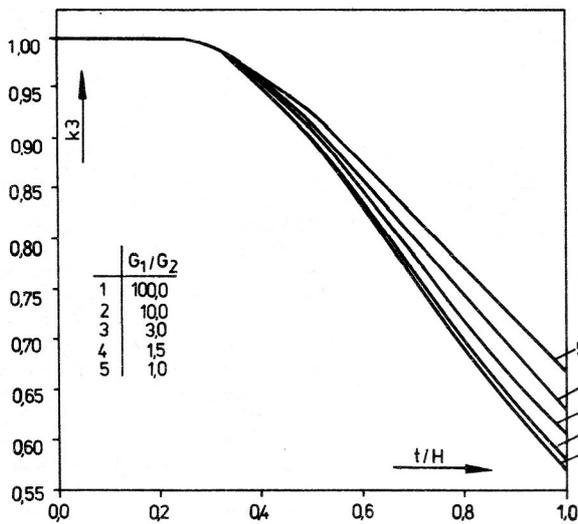


Bild 7
 Vergleich der maximalen Schubspannungen in der Materialschicht 2
 $k_3 = \tau_{2\max}(\text{FEM}) / \tau_{2\max}(\text{Näherung})$

hältnisse der Lösungen der FEM zu den Lösungen dieser Näherung für die Torsionssteifigkeit GI_t sowie für die maximalen Schubspannungen τ_{zx} in den Materialbereichen 1 und 2 definiert.

Im Bild 5 ist k_1 in Abhängigkeit von dem Verhältnis der Kantenlängen des prismatischen Verbundquerschnittes t/H und für verschiedene Schubmodulverhältnisse zwischen den beiden Materialbereichen G_1/G_2 aufgetragen. Man sieht, daß für $t/H < 0,2$ die Abweichung der Näherungslösung von der FEM-Lösung für die Torsionssteifigkeit GI_t unter 10 % liegt. Die Bilder 6 und 7 stellen k_2 und k_3 in Abhängigkeit von t/H und G_1/G_2 dar. Es ist zu erkennen, daß für die dargestellten Schubmodulverhältnisse die Näherungslösung mit der FEM-Lösung bis zu dem Verhältnis $t/H \leq 0,2$ übereinstimmen.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. W. Pfefferkorn
 Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“
 Sektion Werkstoff- und Verarbeitungstechnik
 4200 Merseburg
 Otto-Nuschke-Straße

Dipl.-Ing. T. Hauck
 Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“
 Sektion Werkstoff- und Verarbeitungstechnik
 4200 Merseburg
 Otto-Nuschke-Straße