

Konstitutive Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie auf der Grundlage von 3 Invarianten des Spannungstensors

Holm Altenbach, Michael Dankert, Aleksandr Aleksejevič Zoločevskij

0. Einleitung

Aufgrund bestimmter Praxisanforderungen (insbesondere aus dem Bereich der Schlüssel- bzw. Hochtechnologien) nehmen in letzter Zeit in der Mechanik-Forschung die Fragen der verbesserten Werkstoffmodellierung an Bedeutung zu. Der Begriff „verbesserte Werkstoffmodellierung“ (als Synonym kann hier auch realistischere Modellierung stehen) ist dabei im Sinne von Erweiterungen existierender Modelle zu verstehen, wobei derzeit hauptsächlich 3 Erweiterungsrichtungen zu erkennen sind: linear elastisch-inelastische Werkstoffmodelle, nichtlineare Werkstoffmodelle sowie sogenannte bimodulare Werkstoffmodelle (d. h. Modelle für Werkstoffe mit wesentlichen Unterschieden in den Werkstoffeigenschaften bei Zug und Druck). Dabei stellen die bimodularen Werkstoffmodelle ein bestimmtes Modell eines nichtlinear-elastischen Werkstoffverhaltens dar, wobei der Rahmen der abschnittsweise linearen Approximation des Deformationsdiagrammes bei Zug und Druck nicht verlassen wird. Allgemein genügt es jedoch nicht, das Verformungsverhalten durch bimodulare Werkstoffmodelle (einfachste Approximation) zu beschreiben.

Nachfolgend werden für kleine Verzerrungen die konstitutiven Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie auf der Grundlage von 3 Invarianten des Spannungstensors und 6 Konstanten formuliert. Dabei werden auch die grundlegenden Experimente zur Modellverifikation beschrieben. Für den Sonderfall einer speziellen Konstitutivgleichung sind jedoch nur 3 Parameter nötig. Die Anwendungsgrenzen der vorgeschlagenen Beziehungen werden formuliert.

Zur Überprüfung der Berechnungsergebnisse, die entsprechend den vorgeschlagenen Beziehungen erzielt wurden, erfolgen Vergleiche mit experimentellen Daten für einachsige und mehrachsige Spannungszustände, wobei als Werkstoffe Celluloid, Polyethylen und Grauguß betrachtet werden. Eine Diskussion der Einschränkungen aus dem Druckerschen Stabilitätspostulat für die Parameter in den Konstitutivgleichungen bilden den Abschluß.

Der vorliegende Beitrag steht im Zusammenhang mit früheren Arbeiten [1], [2].

1. Diskussion experimenteller Ergebnisse

Im Rahmen der nichtlinearen Elastizitätstheorie für isotrope Werkstoffe bei kleinen Verzerrungen und bei Deformationscharakteristika, die von der Belastung

abhängen, ist eine wichtige Frage die nach dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln bei Zug und Druck. Für klassische Werkstoffe (z. B. Stähle mit geringem Kohlenstoffanteil) kann die Frage eindeutig beantwortet werden. In diesem Fall enthält das Deformationsdiagramm einen linearen Anfangsabschnitt, wobei dieser für Zug und Druck identisch ist. Der Tangens des Anstiegswinkels der Geraden ist gleich dem Wert des Elastizitätsmoduls für den Werkstoff.

Für Grauguß, Graphit, Polymere, Composite und andere Werkstoffe gibt es Schwierigkeiten bei der experimentellen Ermittlung der Elastizitätsmoduln. Die Deformationsdiagramme der betrachteten Werkstoffe weisen eine wesentliche Nichtlinearität auf und enthalten nur einen kleinen linearen Anfangsabschnitt. Die Ermittlung der Elastizitätsmoduln erfolgt daher nicht über den Tangens des Anstiegs im Anfangsbereich, sondern auf der Grundlage eines bestimmten Sekanten- bzw. Tangentenmoduls. Daher geben unterschiedliche Autoren ziemlich stark voneinander abweichende Ergebnisse an. Genauso wird die Gleichheit der Werte bei Zug und Druck eingeschätzt: einige Autoren gehen von der Gleichheit aus, andere von wesentlichen Unterschieden (2- bis 4fache bzw. eine oder mehrere Zehnerpotenzen). Die letztgenannte Tatsache führte zur Entwicklung der bimodularen Elastizitätstheorie [3] bis [7], während die erste Aussage die Konsequenz hat, daß es für die bimodulare Elastizitätstheorie keine experimentelle Bestätigung gibt [8], [9].

Um die wirkliche Situation besser zu verstehen, kann man beispielsweise Ergebnisse zur nichtlinearen Verformung von Phenoplasten bei einachsigem Zug bzw. Druck analysieren. Auf Bild 1 ist das Verformungsdiagramm bei Druck für festen Phenopolyurethan der Dichte 76 kg/m^3 dargestellt [10]. Es ist zu erkennen, daß auf der betrachteten Kurve zwei quasilineare Abschnitte liegen. Dabei ist der Elastizitätsmodul E_0 , der für den ersten Abschnitt gilt, größer als der Modul E_1 auf dem zweiten Abschnitt. Da der erste Abschnitt nur schwer zu erkennen ist, wird traditionell bei Druck der Modul E_1 angenommen.

Analog verhält sich die Situation bei Zug. Auf Bild 2 ist das Deformationsdiagramm bei Zug für festen Phenopolyurethan der Dichte 56 kg/m^3 dargestellt [8]. Charakteristisch ist, daß auch hier zwei Möglichkeiten der Bestimmung der Tangenten zur Kurve bestehen. Dabei werden zwei lineare Abschnitte definiert und entsprechend die Moduln E_0 und E_1 . Die Grenze des zweiten linearen Abschnitts befindet sich im Schnitt-

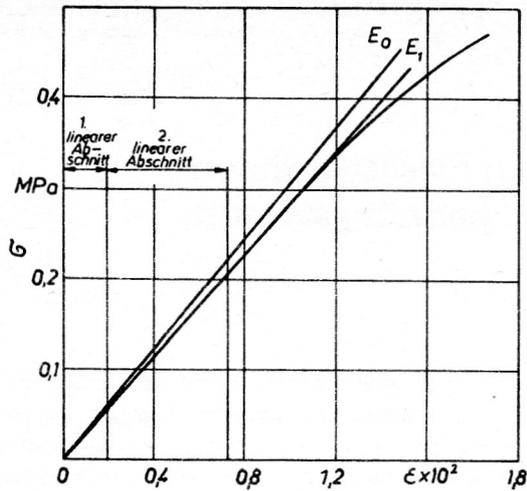


Bild 1
Verformungsdiagramm des festen Phenopolyurethans bei Druckbelastung

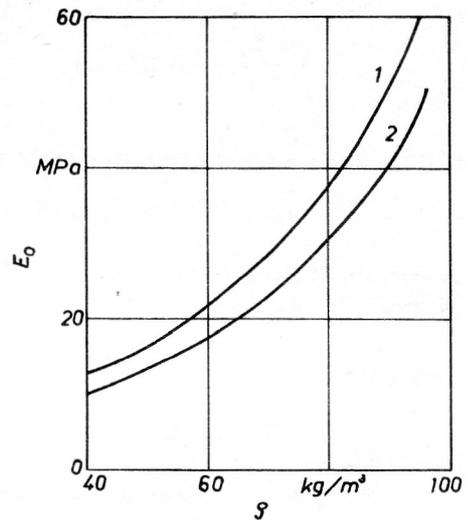


Bild 3
Änderung des Elastizitätsmoduls E_0 für Phenopolyurethan in Abhängigkeit von der Dichte (1-Zug, 2-Druck)

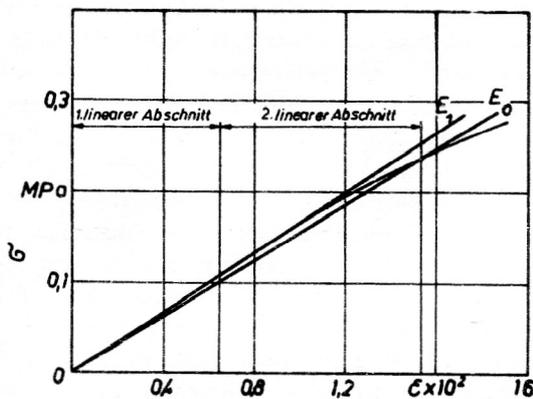


Bild 2
Verformungsdiagramm des festen Phenopolyurethans (Dichte 56 kg/m^3) bei Zugbelastung

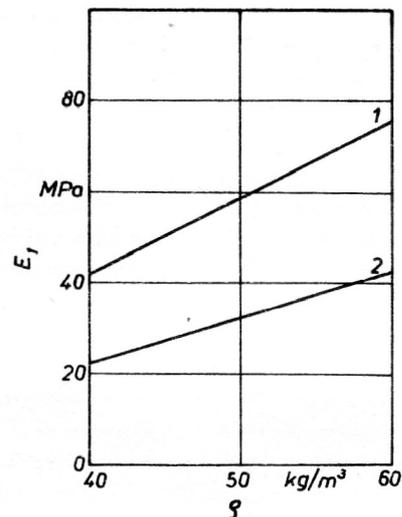


Bild 4
Änderung des Elastizitätsmoduls E_1 für festes PVC in Abhängigkeit von der Dichte (1-Zug, 2-Druck)

punkt der Tangenten, die E_0 definiert, mit der Verformungskurve. Es konnte festgestellt werden, daß im Gegensatz zum Verhältnis bei Druck $E_0 < E_1$ gilt. Dies kann durch die Streckung der Elemente von Molekülketten des Phenoplasts bei Zug infolge der Belastungsaufnahme erklärt werden, da in diesem Fall die Nachgiebigkeit des Materials in Belastungsrichtung kleiner wird. Es sei darauf hingewiesen, daß durch spezielle Experimente zur Energiedissipation nachgewiesen wurde [10], daß sich die untersuchten Phenoplaste innerhalb der Grenzen der angegebenen linearen Bereiche sowohl bei Zug wie auch bei Druck im elastischen Zustand befanden. Deshalb sind E_0 und E_1 tatsächlich Elastizitätsmoduln der Materialien. Die Möglichkeit der Existenz mehrerer Elastizitätsmoduln bei bestimmten Belastungsarten wurde schon früher für verschiedene Materialien experimentell nachgewiesen [11], wobei auch eine quantenmechanische Erklärung dieser Effekte gegeben wurde.

Auf Bild 3 ist die Änderung des Elastizitätsmoduls E_0 für festes Phenopolyurethan in Abhängigkeit von der Dichte ρ bei Zug (1) und Druck (2) dargestellt [10].

Unter Berücksichtigung der natürlichen Streuung experimenteller Ergebnisse läßt sich die Annahme der Gleichheit der Elastizitätsmoduln bei Zug und Druck im linearen Anfangsbereich des Deformationsdiagramms begründen. Analoge Aussagen lassen sich für Grauguß, organisches Glas, Glasplaste mit Epoxyd-Phenol-Matrix, Polymerbeton und Phenopolystyrol fünf verschiedener Dichten mit speziell für diese Ziele durchgeführten Experimenten treffen. Zum Vergleich ist auf Bild 4 für festes Phenopolyvinylchlorid die Änderung des Moduls E_1 in Abhängigkeit von der Dichte ρ bei Zug (1) und Druck (2) dargestellt [10]. Dabei kann festgestellt werden, daß der Modul bei Zug zweimal so groß wie der analoge Wert bei Druck ist. In diesem Falle kann man von bimodularem Material sprechen. Es ist offensichtlich, daß es bei Berechnungen von Konstruktionen aus den untersuchten Materialien notwendig ist, die Werte

für E_1 zu berücksichtigen, da die genaue Ermittlung des Moduls E_0 sehr schwierig und auch der entsprechende lineare Bereich klein ist, so daß Aussagen über diesen Abschnitt für Berechnungen keine Rolle spielen. Aus dem bisher Dargelegten ergibt sich die Notwendigkeit der Ausarbeitung einer Elastizitätstheorie für bimodulare Materialien.

Die Gleichheit von E_0 bei Zug und Druck hat keinerlei Beziehung zur bimodularen Elastizitätstheorie. Die Behauptungen in [9], daß „die grundlegende Hypothese der Elastizitätstheorie für bimodulare Materialien keine experimentelle Bestätigung hat“, ist nicht zutreffend. Die Diskussion darüber, die von verschiedenen Autoren geführt wird [9], [12], [13], hängt mit den verschiedenen Deutungen der existierenden Termini „Elastizitätsmodul“ und „Bimodularität“ zusammen. Man kann sich natürlich über Vor- und Nachteile der Verwendung dieser Termini streiten. Dennoch ist die Notwendigkeit der Ausarbeitung der Elastizitätstheorie für bimodulare Materialien unbestreitbar.

Die Bimodularität stellt folglich ein gewisses Modell für nichtlinear-elastisches Verhalten von Materialien im Rahmen einer abschnittsweise linearen Approximation des Verformungsdiagramms bei Zug und Druck dar. Eine vollständige Beschreibung der nichtlinearen Verformungen ist jedoch im Rahmen dieser Approximation nicht möglich.

2. Theoretische Grundlagen

Derzeit gibt es eine Reihe von Möglichkeiten zur Aufstellung von konstitutiven Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie isotroper Materialien mit Kennwerten, die von der Art der Belastung abhängen [3] bis [7]. Dabei wird stets als Grundlage die Hypothese von der Existenz eines Potentials angenommen

$$\Phi = \varphi(\sigma_e) \quad (2.1)$$

Dieses Potential ist Funktion einer noch zu definierenden Vergleichsspannung σ_e . Die Form der Funktion σ_e hängt von der Anzahl der verwendeten Basisinvarianten des Spannungszustandes ab. Die drei Invarianten des Spannungstensors können folgendermaßen definiert werden:

$$\text{erste Invariante} \quad - \quad I_1 = \sigma_{kl} \delta_{kl},$$

$$\text{zweite Invariante} \quad - \quad I_2 = \sigma_{kl} \sigma_{kl},$$

$$\text{dritte Invariante} \quad - \quad I_3 = \sigma_{ik} \sigma_{kj} \sigma_{ji}.$$

Dabei ist σ_{kl} das Kronecker-Symbol und es gilt die Einsteinsche Summationskonvention. Diese Invarianten sind wie folgt kombinierbar:

$$\text{lineare Invariante} \quad - \quad \sigma = B I_1,$$

$$\text{quadratische Invariante} \quad - \quad \sigma_0^2 = A I_1^2 + C I_2,$$

$$\text{kubische Invariante} \quad - \quad \sigma_1^3 = D I_1^3 + K I_1 I_2 + E I_3,$$

wobei insgesamt 6 Konstanten A, B, C, D, K, E eingeführt werden. Die Vergleichsspannung soll eine homo-

gene Funktion des Spannungszustandes sein, daher kann folgende Form für sie angegeben werden:

$$\sigma_e = \alpha \sigma + \sigma_0 + \gamma \sigma_1 \quad (2.2)$$

Hierbei sind α, γ bestimmte Zahlenwerte, die den spezifischen Einfluß der ungeraden Invarianten im Ausdruck für σ_e berücksichtigen. Unter Verwendung der Gln. (2.1) und (2.2) erhält man einen Zusammenhang zwischen den Komponenten des Verzerrungstensors und des Spannungstensors entsprechend der Gleichung

$$\epsilon_{kl} = \partial \Phi / \partial \sigma_{kl},$$

die hier folgenden konkreten Ausdruck annimmt:

$$\epsilon_{kl} = v(\sigma_e) \left\{ A I_1 \delta_{kl} + C \sigma_{kl} \right\} / \sigma_0 + \alpha B \delta_{kl} + \gamma \left\{ D I_1^2 \delta_{kl} + E \sigma_{kn} \sigma_{nl} + (K/3) (I_2 \delta_{kl} + 2 I_1 \sigma_{kl}) \right\} / \sigma_1^2 \quad (2.3)$$

Dabei ist

$$v(\sigma_e) = \varphi'(\sigma_e).$$

Möglich sind folgende Annahmen für die Funktion $v(\sigma_e)$:

$$\text{Potenzgesetz} \quad - \quad v(\sigma_e) = \sigma_e^n, \quad (2.4)$$

$$\text{hyperbolischer Sinus} \quad - \quad v(\sigma_e) = \sinh(\sigma_e/a),$$

$$\text{Exponentialgesetz} \quad - \quad v(\sigma_e) = \exp(\sigma_e/b).$$

n, a, b sind Konstanten. Der Wert $n = 1$ in Gl. (2.4) entspricht dem Fall der Bimodularität.

Entsprechend [12] sind die allgemeinsten Beziehungen zwischen zwei koaxialen symmetrischen Tensoren ϵ_{kl} und σ_{kl} in folgender Form darstellbar:

$$\epsilon_{kl} = 1/3 I_e \delta_{kl} + S \left[(1/\sigma_i) (\partial \sigma_i / \partial \sigma_{kl}) - \tan \omega (\partial \xi / \partial \sigma_{kl}) \right] \quad (2.5)$$

Hierbei sind:

$$I_e = \epsilon_{nn}, \quad I_\sigma = \sigma_{nn} \quad - \quad \text{die ersten Invarianten der betrachteten Tensoren,}$$

$$\epsilon_{kl}^D = \epsilon_{kl} - 1/3 I_e \delta_{kl},$$

$$\sigma_{kl}^D = \sigma_{kl} - 1/3 I_\sigma \delta_{kl} \quad - \quad \text{die Komponenten der entsprechenden Deviatoren,}$$

$$\epsilon_i = (2/3 \epsilon_{kl}^D \epsilon_{kl}^D)^{1/2} \quad - \quad \text{die sogenannten Intensitäten der Verzerrungen und Spannungen,}$$

$$\sigma_i = (3/2 \sigma_{kl}^D \sigma_{kl}^D)^{1/2}$$

$$S = \sigma_{kl} \epsilon_{kl}^D = \sigma_i \epsilon_i \cos \omega \quad - \quad \text{die spezifische Leistung der Formänderung,}$$

$$\omega = \xi - \Psi \quad - \quad \text{die Ähnlichkeitsphase der Deviatoren,}$$

$$\xi = -1/3 \arcsin [9/2 (\sigma_{in}^D \sigma_{nk}^D \sigma_{kl}^D) / \sigma_i^3],$$

$$\Psi = -1/3 \arcsin [4/3 (\epsilon_{in}^D \epsilon_{nk}^D \epsilon_{kl}^D) / \epsilon_i^3]$$

- Winkel des Spannungs- und Verzerrungszustandes.

Falls für die Funktionen, die in die Gln. (2.5) eingehen, die Erfüllung der nachfolgenden Gln.

$$I_\epsilon = v(\sigma_e) R, S = 2/3 v(\sigma_e) \sigma_1^2 \chi, \tan \omega = \rho/\chi,$$

$$R = [(3A + C) I_1]/\sigma_0 + 3\alpha B + \gamma [(3D + 2K/3) I_1^2 + (K + E) I_2]/\sigma_1^2,$$

$$\chi = C/\sigma_0 + 2/3 [\gamma(K + E) I_1]/\sigma_1^2 - (\gamma/3) (E/\sigma_1^2) \sigma_1 \sin(3\xi),$$

$$\rho = (\gamma/3) (E/\sigma_1^2) \sigma_1 \cos(3\xi) \quad (2.6)$$

gefordert und die Beziehungen

$$I_1 = I_\sigma, \quad I_2 = 2/3 \sigma_1^2 + 1/3 I_\sigma^2,$$

$$I_3 = 1/9 I_\sigma^3 + 2/3 I_\sigma \sigma_1^2 - 2/9 \sigma_1^3 \sin(3\xi)$$

berücksichtigt werden können, erhält man nach einigen Umwandlungen aus den Gln. (2.5) die Gln. (2.3). Damit ist die Verwendung der konstitutiven Gln. (2.3) mit der Annahme des Zusammenhangs zwischen den Invarianten der Verzerrungen und der Spannungen in der Form der Gln. (2.6) verbunden.

3. Methodik der Konstantenermittlung (Grundversuche)

Die Gln. (2.3) enthielten insgesamt 6 Konstanten und 2 Koeffizienten. Ihre Ermittlung kann im Rahmen physikalischer Experimente erfolgen. Im Sinne einer Versuchsoptimierung kann man zunächst einige mathematische Experimente betrachten. Dabei werden die Konsequenzen aus bestimmten Standardtestaufgaben diskutiert. Nachfolgend werden diese Testaufgaben unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Gl. (2.4) analysiert, wobei nur solche Aufgaben betrachtet werden, für die sich ein homogener Spannungszustand einstellt. Dies sind folgende Aufgaben:

a) einachsiger Zug ($\sigma_{11} \neq 0$), der sich in Belastungsangriffsrichtung einstellt:

$$\epsilon_{11} = K_+ \sigma_{11}^n \quad (3.1)$$

sowie quer dazu

$$\epsilon_{22} = -Q \sigma_{11}^n, \quad (3.2)$$

b) einachsiger Druck ($\sigma_{11} \neq 0$) in Richtung der angreifenden Belastung:

$$\epsilon_{11} = -K_- |\sigma_{11}|^n,$$

c) Torsion ($\sigma_{12} \neq 0$), bei der sich die Gleitungen

$$2\epsilon_{12} = L \sigma_{12}^n \quad (3.3)$$

und die Dehnungen

$$\epsilon_{11} = M \sigma_{12}^n \quad \text{einstellen,}$$

d) hydrostatischer Druck ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -|\sigma|/3$), der

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -P |\sigma_{11}|^n$$

zur Folge hat.

Die hier formulierten Aufgaben werden zusammen mit Gleichung (2.3) ausgewertet. Damit erhält man die Parameter in den Konstitutivgleichungen:

$$C = L^{2r}/2, \quad \alpha B = M/(\sqrt{2C})^n, \quad A = X^2 - C,$$

$$6\gamma^3 D = [\sqrt{9A + 3C} - 3\alpha B - (3P)^r]^3 - 3(T - \alpha B)^3 + 18(A/\sqrt{A+C} + \alpha B + Q K_+^{-nr})(T - \alpha B)^2,$$

$$2\gamma^3 K = 3(T - \alpha B)^3 - [\sqrt{9A + 3C} - 3\alpha B - (3P)^r]^3 - 24(A/\sqrt{A+C} + \alpha B + Q K_+^{-nr})(T - \alpha B)^2,$$

$$\gamma^3 E = (T - \alpha B)^3 - \gamma^3 D - \gamma^3 K, \quad (3.4)$$

$$T = (K_+^r - K_-^r)/2, \quad X = (K_+^r + K_-^r)/2, \quad r = 1/(n+1)$$

Auf der Grundlage der Gln. (3.4) kann man die Anwendungsgrenzen spezieller Konstitutivgleichungen ermitteln. Diese sind Sonderfälle der Gln. (2.3) und enthalten weniger Invarianten. Angenommen, aufgrund experimenteller Daten wurden folgende Gln. aufgestellt:

$$T = M L^{-nr}, \quad \sqrt{9X^2 - 3L^{2r}} = 3T + (3P)^r \quad (3.5)$$

Damit folgt aus den Gln. (3.4) die Forderung $\gamma = 0$ und folglich auch $\sigma_e = \alpha \sigma + \sigma_0$. Letzteres bedeutet, daß die Vergleichsspannung nur die erste und die zweite Invariante enthält. Dabei gehen die Konstitutivgleichungen (2.3) in folgende lineare, dreiparametrische Tensorgleichungen über:

$$\epsilon_{kl} = v(\sigma_e) [(A I_1 \delta_{kl} + C \sigma_{kl})/\sigma_0 + \alpha B \delta_{kl}] \quad (3.6)$$

Dies bedeutet, daß die Gln. (3.5) ein Kriterium für die Anwendbarkeit der Konstitutivgl. (3.6) sind. Für den Fall, daß das Experiment folgende Gln. liefert

$$3T^3 - [\sqrt{9X^2 - 3L^{2r}} - (3P)^r]^3 = T Y = M = 0 \quad (3.7)$$

mit

$$Y = T(X - 1/2 L^{2r} X^{-1} + Q K_+^{-nr}),$$

erhält man aus den Gln. (3.4) $\alpha B = D = K = 0$, und die Gln. (2.3) nehmen folgenden Ausdruck an:

$$\epsilon_{kl} = v(\sigma_e) [(A I_1 \delta_{kl} + C \sigma_{kl})/\sigma_0 + \gamma E \sigma_{kn} \sigma_{nl}/\sigma_1^2] \quad (3.8)$$

Die Gln. (3.7) sind ein Kriterium für die Verwendung der tensoriell-nichtlinearen Gln. (3.8), wobei diese die zweite und die dritte Spannungsinvariante sowie drei Parameter enthalten. Wenn die Auswertung der Basisexperimente die folgenden Gln.

$$[\sqrt{9X^2 - 3L^{2r}} - (3P)^r]^3 = 3T^3 - 18TY,$$

$$T^3 = -3TY, M = 0 \quad (3.9)$$

mit dem bereits in den Gln. (3.7) verwendeten Ausdruck für Y liefern, ergibt sich aus Gl. (3.4) $\alpha B = D = E = 0$. Damit lassen sich unter Berücksichtigung dieser Forderungen die Konstitutivgl. (2.3) wie folgt aufschreiben:

$$\epsilon_{kl} = v(\sigma_e) \left\{ (A I_1 \delta_{kl} + C \sigma_{kl}) / \sigma_0 + \gamma [K (I_2 \delta_{kl} + 2I_1 \sigma_{kl})] / (3\sigma_1^2) \right\} \quad (3.10)$$

Diese Gln. enthalten die erste und die zweite Invariante des Spannungstensors sowie 3 Parameter. In der Literatur werden kaum Begründungen für die Anwendung dieser oder jener Invarianten des Spannungszustandes beim Aufstellen der Konstitutivgl. erörtert. Daher sind die angeführten Gln. (3.5), (3.7), (3.9) eine methodologische Grundlage zur Anwendung entsprechender Konstitutivgleichungen. Die dreiparametrischen Beziehungen sind nicht die einzigen Gleichungen, die aus den Gln. (2.3) folgen. Für den Fall, daß sich aus dem Experiment die Gln.

$$K_+ = K_-, M = P = 0, Q = 1/2 K_+, L^{2r} = 3K_+^{2r} \quad (3.11)$$

ergeben, folgen aus den Gln. (3.4) die Gln. $\alpha B = \gamma = 0$, $C = -3A$. Damit gehen die Gln. (2.3) in die Gln.

$$\epsilon_{kl} = 3/2 \sqrt{A} v(\sqrt{A} \sigma_i) \sigma_{kl}^D / \sigma_i \quad (3.12)$$

über. Dies sind Gleichungen für nichtlinear-elastische Materialien entsprechend dem Hencky-Modell. Die traditionellen Beziehungen (3.12) können also nur bei Erfüllung aller Bedingungen (3.11) angewendet werden. Die Verletzung bereits einer der Gln. (3.11) kann dazu führen, daß die Gln. (3.12) nicht verwendet werden können. Dabei können die Abweichungen in den Gln. (3.11) zu unterschiedlichen Konsequenzen führen. Falls eine vollständige Exaktheit des mathematisch-physikalischen Modells angestrebt wird, muß jede Abweichung von den Gln. (3.11) das Verwerfen der Gleichungen (3.12) zur Folge haben. Für Probleme der Praxis, für die im allgemeinen eine ingenieurmäßige Genauigkeit angestrebt wird, muß die Verletzung der Gln. (3.11) nicht unbedingt die Folge haben, daß man vom Hencky-Modell abgehen muß. Die diskutierten physikalischen Beziehungen sind auf Anwendung oberhalb der Proportionalitätsgrenze orientiert. Bei kleinen Spannungsniveaus kann man folglich einen großen Fehler bei der Untersuchung des Spannungs- und Verzerrungszustandes auf Grundlage dieser Gleichungen erwarten. Deshalb ist es manchmal günstig, die Komponenten des Verzerrungstensors mit e_{kl} zu bezeichnen und sie als Summe darzustellen

$$e_{kl} = \epsilon_{kl} + \epsilon_{kl} \quad (3.13)$$

Für ϵ_{kl} wird das verallgemeinerte Hookesche Gesetz angenommen:

$$\epsilon_{kl} = A^0 I_1 \delta_{kl} + C^0 \sigma_{kl}, \quad (3.14)$$

die Komponenten ϵ_{kl} werden nach den Gln. (2.3) bestimmt (A^0, C^0 – Materialkonstanten). Damit wird bei kleinen Spannungswerten unter Beachtung von $\epsilon_{kl} \ll \epsilon_{kl}$ eine befriedigende Beschreibung der linearen Verformung des Materials erreicht. Bei größeren Spannungsniveaus wird der Verformungscharakter im wesentlichen durch die nichtlinearen ϵ_{kl} bestimmt.

4. Auswertung von Experimenten

Bei Anwendung der betrachteten Grundversuche können sich Probleme mit der technischen Realisierung ergeben. Daher wird nachfolgend eine experimentelle Auswertung behandelt, die sich auf die dreiparametrischen Gln. (3.6), (3.8), (3.10) bezieht. Auf Bild 5 sind Verformungsdiagramme für Celluloid bei einer Temperatur von 338 K dargestellt [15]. Das vorliegende Material zeigt unterschiedliche nichtlinear-elastische Charakteristiken bei einachsigen Zug (Kurve 1) und Druck (Kurve 3). Kurve 4 bezieht sich auf den einachsigen Zug ($\sigma_{11} = \sigma_*$) mit überlagertem hydrostatischen Druck $\sigma_*/3$. Für diesen Fall ergeben sich folgende Werte für die Invarianten: $I_\sigma = 0$, $\sigma_i = \sigma_*$, $\sin(3\xi) = -1$. Daher kann der Unterschied zwischen den Kurven 1 und 4 nur durch die Invariante I_σ ausgedrückt werden, da die Werte der anderen beiden Invarianten in diesem Versuch gleich sind. Kurve 2 entspricht einer reinen Torsion ($\sigma_{12} = \sigma_*/\sqrt{3}$). Für dieses Experiment sind $I_\sigma = 0$, $\sigma_i = \sigma_*$, $\sin(3\xi) = 0$. Auf Bild 5 kann man erkennen, daß die Kurven 2 und 4 praktisch übereinstimmen. Da in den betrachteten Versuchen die Werte der Invarianten I_σ und σ_i gleich sind und sich nur die Werte von ξ unterscheiden, kann man schlußfolgern, daß der Winkel der Art des Spannungszustandes die nichtlineare Verformung des vorliegenden Materials nicht beeinflusst. Damit beschreiben die physikalischen Gleichungen, die nicht die erste Invariante des Spannungstensors berücksichtigen und nur die Spannungsintensität und den Winkel der Art des Spannungszustandes verwenden, die experimentellen Fakten nicht. Gleichzeitig widersprechen die konstitutiven Gln. (3.6), (3.8) und (3.10), die die Invarianten I_1, I_2 und I_3 einbeziehen, den experimentellen Daten nicht.

In [16] wird die nichtlineare Verformung von Polyethylen bei einachsigen Zug und Druck behandelt. Die Er-

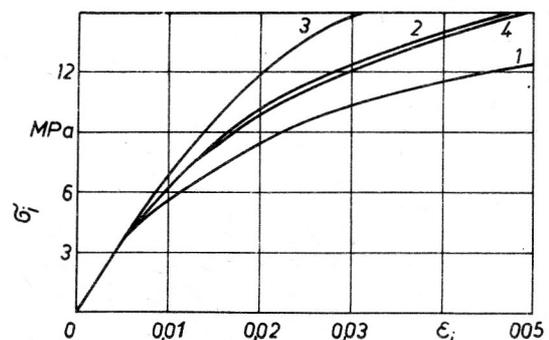


Bild 5 Verformungsdiagramm für Celluloid bei 338 K

gebnisse der Experimente wurden auf der Grundlage der Gln. (3.13) und (3.14) bearbeitet. Für die nichtlinearen Anteile ϵ_{kl} wurden folgende Zusammenhänge ermittelt: bei Zug – Gl. (3.1), (3.2), bei Druck für die Dehnung in Längsrichtung $\epsilon_{11} = -K_- |\sigma_{11}|^n$ und die Dehnung in Querrichtung $\epsilon_{22} = -\kappa \epsilon_{11}$. Die Materialkonstanten sind: $n = 3$, $K_+ = 17,32 \cdot 10^{-11}$ MPa, $Q = 7,31 \cdot 10^{-11}$, $K_- = 1,57 \cdot 10^{-11}$, $\kappa = 0,72$. Unter Verwendung der Werte K_+ , Q , K_- und der physikalischen Beziehungen (2.6), (3.8), (3.10) erhält man theoretische κ -Werte. Bei Verwendung der Gln. (3.6) ergibt sich

$$\kappa = [\alpha B - A / \sqrt{(A+C)}] / \sqrt[4]{K_-} = 1,59.$$

Offensichtlich führen die Gln. (3.6), die nur die erste und die zweite Invariante des Spannungstensors enthalten, zu einem Ergebnis, welches mehr als um das Doppelte vom experimentellen Wert abweicht.

Entsprechend den Gln. (3.10) erhält man

$$\kappa = [1/3 \gamma \sqrt[3]{K} - A / \sqrt{(A+C)}] / \sqrt[4]{K_-} = 1,04,$$

bei Verwendung der Gln. (3.8)

$$\kappa = [-A / \sqrt{(A+C)}] / \sqrt[4]{K_-} = 0,77.$$

Für Polyethylen ist das Ergebnis der Rechnung nach den nichtlinearen Tensorln. (3.8) besser (im Sinne der Übereinstimmung mit dem Experiment) als die analogen Ergebnisse der Rechnung über die linearen Tensorln. (3.6) und (3.10).

Das zweite Anwendungsbeispiel bezieht sich auf das nichtlineare Verhalten von Grauguß der Sorte CЧ 15-32 [17]. In einachsigen Zug- und Druckversuchen wurde die Möglichkeit der Anwendung der Gln. (3.13), (3.14), (3.1) bis (3.3) geklärt. Folgende Materialkennwerte wurden verwendet:

$$A^0 = -2,02 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^2/\text{kg}, \quad C^0 = 11,37 \cdot 10^{-5},$$

$$K_+ = 1,53 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^{2n}/\text{kg}^n, \quad K_- = 8,10 \cdot 10^{-10},$$

$$L = 9,07 \cdot 10^{-8}, \quad n = 4,4.$$

Tabelle 1

σ_{11} MPa	$P_{11} \cdot 10^2$	$ P_{33} \cdot 10^2$	$e_{11} \cdot 10^2$	$e_{33} \cdot 10^2$	$e_{11} \cdot 10^2$	$e_{33} \cdot 10^2$	$e_{11} \cdot 10^2$	$e_{33} \cdot 10^2$
			Gln. (3.6)		Gln. (3.8)		Gln. (3.10)	
34,2	0,139	0,211	0,130	0,213	0,102	0,201	0,108	0,205
39,0	0,167	0,261	0,191	0,276	0,140	0,255	0,151	0,261
43,9	0,217	0,317	0,277	0,358	0,190	0,323	0,210	0,333
48,8	0,306	0,423	0,401	0,470	0,264	0,414	0,295	0,430
54,2	0,443	0,572	0,649	0,689	0,409	0,592	0,463	0,619
58,7	0,526	0,672	0,786	0,799	0,486	0,675	0,553	0,709
64,7	0,847	0,997	1,134	1,086	0,685	0,900	0,784	0,951
68,7	1,09	1,28	1,49	1,38	0,89	1,13	1,02	1,20
70,8	1,24	1,41	1,71	1,56	1,01	1,27	1,17	1,35
73,3	1,42	1,58	1,97	1,77	1,16	1,43	1,40	1,52

In der Tabelle sind die experimentellen Werte der Hauptverzerrungen P_{11} , P_{33} in dünnwandigen Rohren aus Grauguß angegeben, die durch Druckkräfte und Torsionsmomente bei einem Verhältnis der Hauptspannungen von $|\sigma_{33}|/\sigma_{11} = 4,9$ belastet wurden. In der Tabelle sind ebenfalls die theoretischen Verzerrungswerte e_{11} , e_{33} angeführt, die auf der Grundlage der Gln. (3.13), (3.14) sowie (3.6), (3.8) bzw. (3.10) erhalten wurden. Es ist eine befriedigende Übereinstimmung der experimentellen und rechnerischen Ergebnisse feststellbar. Dabei kann jedoch keiner Konstitutivgl. ein Vorrang eingeräumt werden, da die entsprechenden theoretischen Werte kaum Unterschiede aufweisen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die dargestellten Ausführungen zur nichtlinearen Elastizitätstheorie von Materialien mit von der Art der Belastung abhängenden Charakteristika den derzeit vorliegenden experimentellen Ergebnissen nicht widersprechen. Die Richtung der weiteren experimentellen Forschungen kann man auf Grundlage der vorliegenden Konstitutivgl. (2.3) und der formulierten Grundversuche ausarbeiten.

5. Einschränkungen aus dem Druckerschen Stabilitätspostulat

Die Parameter, die in den Konstitutivgl. (2.5) enthalten sind, unterliegen bestimmten Einschränkungen aus dem Druckerschen Stabilitätspostulat

$$\delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} > 0.$$

Die Erfüllung dieses Postulats ist hinreichend Bedingung für die Eindeutigkeit der entsprechenden Randwertaufgabe [4], [14]. Gleichzeitig ist es ein Kriterium für die Anwendbarkeit der Konstitutivgleichungen. Aufgrund des Zusammenhangs

$$\delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} = v'(\sigma_e) (\delta \sigma_e)^2 + v(\sigma_e) \delta^2 \sigma_e$$

kann die Forderung des Druckerschen Postulats in folgende Ungleichungen überführt werden:

$$v'(\sigma_e) \geq 0, \quad v(\sigma_e) \geq 0, \quad \delta^2 \sigma_e \geq 0.$$

Die ersten beiden Bedingungen schränken die Materialklassen nicht wesentlich ein. Die Bedingung $\delta^2 \sigma_e \geq 0$ bedeutet, daß die Funktion $\sigma_e(\sigma_{kl})$ konvex sein und jeder konkrete Fall untersucht werden muß. Die entsprechenden Abschätzungen für $\sigma_e(I_\sigma, \sigma_1, \xi)$ kann man auf Grundlage der Arbeiten [4], [14] geben. Für die Gln. (3.6) ist die Erfüllung der Bedingung $\delta^2 \sigma_e \geq 0$ offensichtlich. Es gilt

$$\delta^2 \sigma_e = [C \delta \sigma_{kl} \delta \sigma_{kl} + A (\delta I_1)^2 - (\delta \sigma_0)^2] / \sigma_0$$

und die Erfüllung der Ungleichung ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die quadratische Form

$$\sigma_0^2 = A I_1^2 + C I_2$$

positiv definit ist. Unter Beachtung von

$$A(S_{nn})^2 + C S_{kl} S_{kl} > 0, \quad S_{kl} = \sigma_{kl} \delta \sigma_0 - \delta \sigma_{kl} \sigma_0$$

sind die entsprechenden Umformungen leicht zu realisieren. Daher sind aus der Sicht der Erfüllung des Druckerschen Postulats die tensoriell-linearen Gln. (3.6) den Gln. (2.3), (3.8) bzw. (3.10) vorzuziehen.

LITERATUR

- [1] Zoločevskij, A., Konkin, V., Moračkovskij, O., Koczyk, S.: Eine Theorie zur nichtlinearen Verformung anisotroper Körper und ihre Anwendung auf die Berechnung des Kriechverhaltens dünner Schalen. *Technische Mechanik* 6 (1985) 4. S. 27 – 36.
- [2] Zoločevskij, A. A.: Kriechen von Konstruktionselementen aus Materialien mit von der Belastung abhängigen Charakteristiken. *Technische Mechanik* 9 (1988) 3. – S. 177 – 184.
- [3] Амбарцумян, С. А.: Разномодульная теория упругости. – Москва: Наука, 1982. – 320 с.
- [4] Цвелодуб, И. Ю.: К разномодульной теории упругости изотропных материалов. – В кн.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1977, вып. 32. – с. 123 – 131.
- [5] Матченко, Н. М., Толоконников, Л. А.: О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах. – В: Инж. журнал. *Механика твердого тела*. – Москва (1968) 6. – с. 108 – 110.
- [6] Ломакин, Е. В.: Разномодульность композитных материалов. – В: *Механика композитных материалов*. – Рига (1981) 1. – с. 23 – 29.
- [7] Золочевский, А. А.: Обоснование определяющих уравнений нелинейного деформирования материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. – В: *Журнал прикладной механики и технической физики*. – Москва (1986) 6. – с. 139 – 143.

- [8] Жуков, А. М.: Модули упругости материалов при растяжении и сжатии. – В: *Журнал прикладной механики и технической физики*. – Москва (1985) 4. – с. 128 – 131.
- [9] Жуков, А. М.: Сопротивление некоторых материалов чистому растяжению и сжатию. – В: *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – Москва (1986) 4. – с. 197 – 202.
- [10] Менгес, Г., Книпшилд, Ф.: Деформативность и прочность жестких пенопластов. – В кн.: *Прикладная механика ячеистых пластмасс*. – Москва: Мир, 1985. – с. 32 – 73.
- [11] Белл, Дж. Ф.: Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. – Часть I: Малые деформации. – Москва: Наука, 1984. – 600 с.
- [12] Амбарцумян, С. А., Хачатрян, А. А.: Письмо в редакцию по поводу статьи А. М. Жукова „Сопротивление некоторых материалов чистому растяжению и сжатию“ – В: *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – Москва (1986) 4. – с. 203 – 205.
- [13] Жуков, А. М.: Письмо в редакцию. – В: *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – Москва (1986) 4. – с. 205.
- [14] Цвелодуб, И. Ю.: О формах связи между тензорами напряжений и скоростей деформаций ползучести в изотропных устойчивых средах. – В: *Проблемы прочности*. – Киев (1979) 9. – с. 27 – 30.
- [15] Nishitani, T.: Mechanical behavior of nonlinear viscoelastic celluloid under superimposed hydrostatic pressure. – In: *Trans. ASME: J. Pressure Vessel Technol.* – New York 100 (1978) 3. – S. 271 – 276.
- [16] Дзене, И. Я.: Объемные деформации полимеров при кратковременном нагружении. – В: *Механика полимеров*. – Рига (1974) 5. – с. 828 – 833.
- [17] Паняев, В. А.: О деформациях и разрушении полухрупких тел. – Автореф. дис. канд. техн. наук. – Фрунзе: Ин-т физики и математики АН Киргизской ССР, 1970. – 12 с.

Anschrift der Verfasser:

Dr. sc. techn. H. Altenbach
Sektion Technologie der metallverarbeitenden Industrie
WB Werkstofftechnik
M. Dankert
Sektion Maschinenbau
WB Festkörpermechanik
Technische Universität „Otto von Guericke“
PSF 124
Magdeburg
DDR – 3010

к. т. н., доц. А. А. Золочевский
кафедра „Динамика и прочность машин“
Харьковский политехнический институт им. Ленина
ул. Фрунзе
Харьков
СССР – 310 018