

# Zu einer Methode der verteilten Parameter bei Strömungsberechnungen mit der Methode der Finiten Elemente

H. Loest, J. Socolowsky, R. Lipp

## 1. Einleitung

Strömungsprozesse können durch die Zustandsgrößen Druck, Dichte, Temperatur und die vektorielle Größe der Geschwindigkeit gekennzeichnet werden. In einem räumlichen Gebiet, welches mit einem bestimmten Volumenstrom durchflossen wird, können sich diese Größen in Abhängigkeit vom Ort und von der Zeit ändern. Es handelt sich bei den genannten Größen um Feldgrößen.

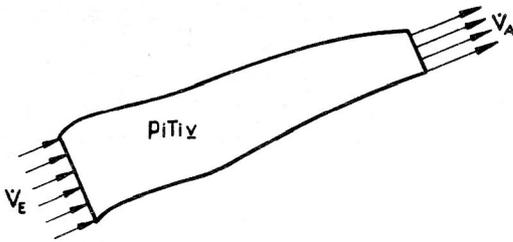


Bild 1  
Strömungsparameter im Prozeßgebiet

Je nach Strömungsmedium lassen sich den Strömungsparametern, dem Ort oder der Zeit bestimmte Stoffeigenschaften, wie z. B. die scheinbare Viskosität, die Wärmeleitfähigkeit, die Dichte usw., zuordnen.

$$\begin{bmatrix} \rho \\ v \\ T \\ t \\ x \\ H_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ \lambda \\ \eta \end{bmatrix}$$

Die Ursachen der Veränderung der Stoffeigenschaften können in stoffspezifischen (Strukturbildung, Reaktion) oder prozeßspezifischen Abhängigkeiten ( $\eta(T)$ ,  $\eta(\dot{\gamma})$ ) liegen.

Für den Ingenieur sind die Änderungen der Eigenschaften des verarbeiteten Mediums, z. B. Änderungen der rheologischen Eigenschaften, und deren Einfluß auf den Prozeß von Bedeutung.

Strömungsprozesse, bei denen die Änderung der Stoffeigenschaften zu berücksichtigen ist, sind z. B. die Schichturformung keramischer Folien und Plastfolien, die Beschichtung von Informationsaufzeichnungsmaterialien oder der Druckprozeß. Die Untersuchung dieser Strömungen ist für die Steuerung der Verarbeitungs-

maschinen, die Einstellung besonderer Prozeßzustände, die Einhaltung von Qualitätsparametern an das Produkt, die Auslegung von Formungswerkzeugen und die Determinierung von Fehlern von Bedeutung [2], [3], [6], [9]. Zur Lösung von Differentialgleichungssystemen, welche diese Strömungsprobleme beschreiben, ist die Methode der finiten Elemente (FEM) ein geeignetes numerisches Verfahren. Mit der zunehmenden Verfügbarkeit von 16- und 32-Bit-Personalcomputern werden Berechnungen von realen Prozessen mit Programmen auf der Basis der Finite-Element-Methode immer mehr zum Arbeitsinstrument des Ingenieurs.

Für die Berechnung praxisrelevanter Strömungen wird eine Methode verlangt, welche auf der einen Seite das Einarbeiten von beliebigen Abhängigkeiten der rheologischen Parameter in ein Modell ermöglicht und auf der anderen Seite die Aufbereitung von rheologischen Daten auf ein Minimum reduziert.

Eine derartige Methode soll im folgenden vorgestellt werden. Sie wird bereits in dem in [1] vorgestellten Programmpaket FLUID eingesetzt.

## 2. Das mathematische Modell

Das Programmpaket FLUID beinhaltet ein FEM-Programm, welches zweidimensionale, stationäre, laminare, isotherme Strömungsprobleme mit maximal zwei freien Oberflächen und einem dynamischen Kontaktpunkt berechnen kann.

Dem Programm liegt das folgende dimensionslose mathematische Modell zugrunde [10].

Dabei werden die kartesischen Koordinaten mit einer charakteristischen Länge  $L$ , die Geschwindigkeiten mittels des absoluten Betrages einer charakteristischen

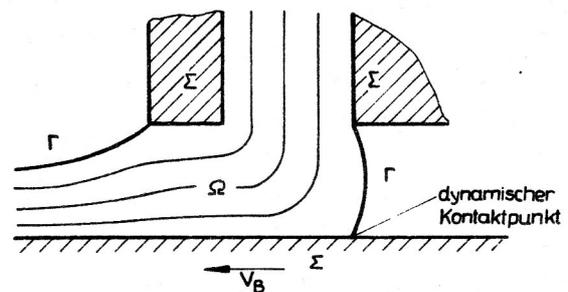


Bild 2  
Exemplarisches Strömungsgebiet

Geschwindigkeit  $v$  und die Spannungen und Drücke mit  $\rho \cdot v^2$  dimensionslos gemacht.

Die dimensionslose Impulsbilanz lautet damit:

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} - \nabla T(\underline{v}) - \frac{1}{Fr} \underline{g} = 0 \quad x \in \Omega \quad (1)$$

Dabei ist  $T$  der Spannungstensor, für den folgende rheologische Konstitutivgleichung für ein nichtlinear-viskoses Fluid gelten soll:

$$T(\underline{v}) = -pI + F^{-1}(\underline{x}, \underline{v}, J_2^*) D(\underline{v}) \quad (2)$$

Darin ist  $D$  der Deformationsgeschwindigkeitstensor mit

$$D_{ij}(\underline{v}) = 0.5 (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) \quad (3)$$

mit  $i, j = 1, 2, 3$

sowie  $J_2^*$  dessen zweite Invariante mit:

$$J_2^* = \sqrt{\frac{1}{2} J_2} = 2 \left[ \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{m=2j=1}^3 \sum_{m=2j=1}^{m-1} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

In der rheologischen Konstitutivgleichung (2) sei außerdem  $F$  eine positive Funktion, die entweder durch eine explizite Funktionsgleichung oder durch eine „mehrdimensionale“ Wertetabelle gegeben ist.

Über diesen Faktor  $F$  wird im Weiteren auch die Zuordnung der verteilten Stoffeigenschaft Viskosität realisiert (vgl. Abschnitt 4). Man kann  $F$  lokal als verallgemeinerte Reynoldszahl  $Re^*$  auffassen. Im Falle eines Newtonschen Fluides gilt insbesondere

$$F = Re = \text{const.} \quad (5)$$

Im Strömungsgebiet  $\Omega$  gilt ferner die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad x \in \Omega \quad (6)$$

Für die verschiedenen Ränder  $\Sigma_i$  gelten folgende Randbedingungen:

– An den festen Rändern

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{a}(\underline{x}) \quad x \in \Sigma \quad (7)$$

– An den freien Grenzflächen  $\Gamma_i$  der tangentialen Verlauf der Geschwindigkeit

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = 0 \quad x \in \Gamma \quad (8)$$

und das Gleichgewicht der Spannungen

$$-p_u \underline{n} - T(\underline{v}) \underline{n} + We \frac{d\underline{t}}{ds} = 0 \quad x \in \Gamma \quad (9)$$

In [10] ist dargestellt, wie man die Aufgabe (3) bis (9) in eine schwache bzw. Variationsformulierung überführt. Letztere ist die Grundlage für die Anwendbarkeit der Methode der finiten Elemente. Das auf der Basis der in [1] entwickelten Leitlinienmethode zur Berechnung von

Strömungen mit freien Grenzflächen geschaffene FEM-Programm benutzt folgende Elemente bzw. Ansatzfunktionen:

- Das Strömungsgebiet wird in Dreieckselemente zerlegt, wobei jedes Element nochmals in vier kongruente Teildreiecke (die sogenannten Viertelemente) unterteilt ist.
- In jedem Viertelement wird die Geschwindigkeit zwischen den Werten in den Eckpunkten linear approximiert.
- Der Druck wird auf jedem Element konstant approximiert.

Die freien Grenzflächen werden stückweise linear, d. h. auf jedem entsprechenden Viertelement linear approximiert.

Eine Besonderheit der Lösungsstrategie aus [1] sowie des dazugehörigen FEM-Programms FLUID besteht darin, daß die Geschwindigkeit  $v$ , der Druck  $p$  und die Form der freien Oberflächen simultan in einem Iterationszyklus ermittelt werden.

Aufgrund der stückweisen linearen Approximation der Geschwindigkeit und wegen (4) sind die Größen  $J_2^*$  auf jedem Viertelement konstant. Das ist bei der rechen-technischen Realisierung von großem Vorteil.

Aus den Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ - und in  $y$ -Richtung, dem Druck und der Form der freien Oberfläche werden die zweite Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors, die Stromlinien als stückweise lineare Funktionen und Prozeßverläufe entlang der Stromlinien ermittelt. Das Programm gestattet außerdem, wahlweise für jedes Viertelement oder Element eine mittlere Geschwindigkeit  $v$  und die Koordinaten des Schwerpunktes  $x$  ausgeben zu lassen.

### 3. Stoffkennzeichnung

Das betrachtete Prozeßgebiet wird durch eine Reihe von Feldgrößen beschrieben. Diesem Feld von Prozeßgrößen kann ein Feld von Stoffwerten zugeordnet werden. Die benötigten Stoffwerte werden mittels rheologischer Experimente gewonnen. Dabei müssen die Abhängigkeiten der Stoffwerte von den im betrachteten Prozeßgebiet geltenden Größen ermittelt werden.

$$\eta = f(P_1, P_2, P_3) = f(\Pi_D, T, t)$$

Die Grenzen, in welchen die Stoffwerte ermittelt werden, sind durch die Änderung der Prozeßgrößen vorgegeben. Unter Umständen sind auch vorangegangene Prozeßstufen in Form von Anfangsbedingungen mit in die Betrachtungen einzubeziehen (z. B. Berücksichtigung der Deformationsgeschichte, Anfangstemperatur der betrachteten Flüssigkeit).

Die Stoffwerte können entweder über eine Materialfunktion

$$\eta_s(\dot{\gamma}, T) = \eta_1(T) \cdot \eta_2(\dot{\gamma}) \quad (10)$$

oder eine geeignete Wertetabelle in Raum und Zeit dem Strömungsgebiet zugeordnet werden.

Ein Vorteil der Verwendung einer Wertetabelle, wie sie durch die in Abschnitt 4. vorgestellte Methode unterstützt wird, ist, daß sie keiner Parameteridentifikation zur Bestimmung einer analytischen Funktionsgleichung bedarf.

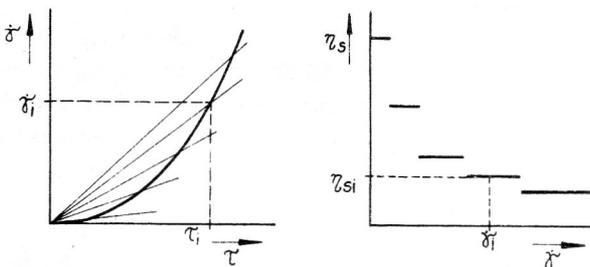
Bei der Zuordnung der Stoffwerte ist zu beachten, daß die Stoffdaten i. a. mittels rheologischer Strömungen ermittelt werden. Bei der Zuordnung dieser Daten in mehrdimensionalen Strömungen muß Richtungsunabhängigkeit der Stoffdaten vorliegen. Die Zuordnung der Stoffdaten zu richtungsabhängigen Prozeßgrößen muß über Größen geschehen, die die richtungsabhängigen Einzelgrößen zu einer Größe zusammenfassen.

Für die Zuordnung von Stoffwerten in zweidimensionale Strömungen hat sich die zweite Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors in der Form von Gleichung (4) an Stelle der Schergeschwindigkeit im eindimensionalen Fall bewährt (vgl. auch [8]).

Die Stoffwerte werden über die Viskosität in das Programm eingearbeitet. Da die Viskosität das Materialverhalten nur für Newtonsche Flüssigkeiten bei  $T = \text{const.}$  widerspiegelt, muß das Materialverhalten, welches in Form der Fließkurve im rheologischen Experiment ermittelt wird, in einer Hilfsgröße wiedergegeben werden. Die scheinbare Viskosität eignet sich für die vollständige Wiedergabe der Fließkurve. Sie errechnet sich:

$$\eta_s(\dot{\gamma}, \tau, t) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

Die Umsetzung einer Fließkurve in eine Kurve der scheinbaren Viskosität über der Schergeschwindigkeit ist in Bild 3 dargestellt.



**Bild 3**  
Ermittlung des Verlaufes der scheinbaren Viskosität als diskrete Funktion aus einer Fließkurve

#### 4. Eine Methode der verteilten Parameter – dargestellt am Beispiel der Stoffeigenschaft Viskosität

Ausgehend von dem Stoffeigenschaftsfeld, welches dem Prozeßzustand zugeordnet werden kann, unterteilt man den Prozeßraum in endlich große Teilgebiete mit den Abmessungen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  so, daß die Änderung der Parameter innerhalb eines Teilgebietes  $i$  so gering ist, daß die Stoffeigenschaften als konstant betrachtet werden können.

$$\begin{aligned} \Delta P(x, y, t) &\rightarrow 0 \\ P(x, y, t) &= \text{const.} \\ E(x, y, t) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Nimmt man als funktionale Abhängigkeit Gleichung (12) an, so müßte im  $i$ -ten Teilgebiet gelten:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\gamma}(E_i) &\rightarrow 0 \\ \Delta \tau(E_i) &\rightarrow 0 \\ \dot{\gamma}(E_i) &= \text{const.} \\ \tau(E_i) &= \text{const.} \end{aligned}$$

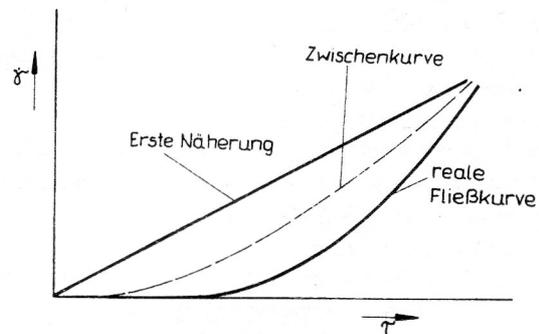
Damit ist die scheinbare Viskosität im Teilgebiet ebenfalls konstant.

$$\eta_s(E_i) = \text{const.}$$

Sind die Randbedingungen und die Prozeßgrößen des betrachteten Raumelementes bekannt, ist das Strömungsproblem innerhalb des Elementes wie für ein Newtonsches Medium lösbar.

Es ist eine geeignete Anfangslösung für das Strömungsproblem nötig. Möglichkeiten für die Anfangslösung sind:

1. Vorhandene Startlösung aus Experimenten oder ähnlichen Rechnungen aus der Literatur.
2. Bei guter Widerspiegelung des betrachteten Fluidverhaltens mit dem Newtonschen Ansatz kann die Startlösung für ein ähnliches Newtonsches Fluid unter Lösung des entsprechenden Differentialgleichungssystems ermittelt werden.
3. Bei ausgeprägtem nicht-Newtonschen Verhalten des betrachteten Fluides wird vorgeschlagen, daß man das Fließverhalten zunächst durch eine konstante Viskosität wiedergibt. Mit diesem Fließverhalten wird zunächst eine Startlösung ermittelt. Danach wird das Fließverhalten durch eine Kurve bzw. einzelne Werte angenähert, welche zwischen dem Anfangswert der Startlösung und dem Endwert liegen. Mit dieser Zwischenkurve (Bild 4) wird zunächst eine weitere Lösung ermittelt, welche als Startlösung für die nächste Rechnung dient. Die Anzahl der Fließkurven richtet sich nach der Stärke der Nichtlinearität des realen Fluidverhaltens.



**Bild 4**  
Approximation einer Fließkurve mit Zwischenkurven

Zur Diskretisierung des Prozeßgebietes nutzt die vorgestellte Methode die Vernetzung, welche bei der Anwendung der FEM erstellt wird. Die Vernetzung muß dabei den o. g. Bedingungen genügen.

$$\Delta P \sim \Delta s$$

Mittels dieser Kopplung kann durch die Nutzung der FEM eine geeignete diskrete Startlösung erstellt werden.

Bei der Methode der finiten Elemente hängt die Lösung der diskretisierten Gleichung in einem Knotenpunkt von Lösungen der benachbarten Knotenpunkte und von den Stoffeigenschaften der umgebenden Elemente ab.

Die Finite-Elemente-Gleichungen, die für einen Knotenpunkt  $m$  des Netzes verantwortlich zeichnen, entstehen in folgender Weise: In die Variationsformulierung der Bewegungsgleichung wird als Testfunktion die Formfunktion des Punktes  $m$  eingesetzt, und anschließend werden die entstehenden Integrale numerisch ausgewertet. Den Anteil, für diese FE-Gleichung, den ein an den Knotenpunkt  $m$  grenzendes Viertelelement (Dreieck) liefert, gibt die folgende Größe  $G$  an (für die erste skalare Komponente der Navier-Stokes-Gleichungen):

$$G_1 = \int_{\Delta} \left\{ [(v_1^1 N_1 + v_1^2 N_2 + v_1^3 N_3)(v_1^1 N_{1,1} + v_1^2 N_{2,1} + v_1^3 N_{3,1}) + (v_2^1 N_1 + v_2^2 N_2 + v_2^3 N_3)(v_1^1 N_{1,2} + v_1^2 N_{2,2} + v_1^3 N_{3,2}) N_1 - p_1 N_{1,1} + 1/Re [2(v_1^1 N_{1,1} + v_1^2 N_{2,1} + v_1^3 N_{3,1}) N_{1,1} + (v_1^1 N_{1,2} + v_2^1 N_{1,1} + v_2^2 N_{2,1} + v_2^3 N_{3,1} + v_1^2 N_{2,2} + v_1^3 N_{3,2}) N_{1,2} - Fr N_{1,g_1}] \right\} dx$$

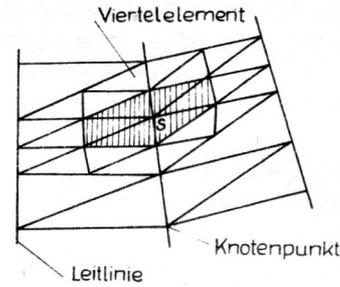
Dabei sind  $N$  die Formfunktionen der drei Eckpunkte [1], und es gilt  $\underline{v} = (v^1, v^2)$  sowie

$$N_{i,k} = \partial N_i / \partial x_k \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2).$$

Bei der Wahl von stückweise linearen Formfunktionen  $N$  (d. h. linear auf jedem Viertelelement) ergibt sich folgende Abhängigkeit: In die FE-Gleichungen für den Punkt  $S$  (vgl. Bild 5) gehen nur Geschwindigkeitswerte für die sechs benachbarten Knotenpunkte sowie Druck bzw. Stoffeigenschaften der angrenzenden sechs Viertelemente ein (schraffiertes Sechseck in Bild 5).

Diese Tatsache würde eine Vorgehensweise, bei der z. B. die Viskosität lokal unterschiedlich zugeordnet werden kann, physikalisch sinnvoll erscheinen lassen.

Bei dieser Zuordnung werden keine Ableitungen von  $F$  für die Jacobi-Matrix des nichtlinearen diskretisierten Gleichungssystems zur Verfügung gestellt, sondern in der im Folgenden beschriebenen Form iteriert. So sind z. B. die direkte Verwendung einer rheologischen Wertetabelle oder Zuordnungen, denen keine analytische Funktionsgleichung zugrunde liegt, möglich.



**Bild 5**  
Ausschnitt der Triangulation

Im Iterationszyklus werden die Werte der scheinbaren Viskosität elementweise zugeordnet.

$$\eta_s(E_i) = f(\dot{\gamma}, t, P_1)$$

Die Güte der Lösung verbessert sich, je mehr Werte im relevanten Bereich vorliegen.

Nach erfolgter Zuordnung muß das jeweilige Gleichungssystem erneut gelöst werden. Es entsteht eine Diskrepanz zwischen den lokalen Prozeßgrößen und den zugeordneten Viskositätswerten, da die Parameter so ermittelt werden, daß  $\eta_s = \text{const.}$  angenommen wird, es sei denn, für die Fehlerschranke gilt:

$$|Re_i^* - Re_{i+1}^*| \leq \epsilon$$

$$\text{Ist } \epsilon \neq 0 \text{ und } |Re_i^* - Re_{i+1}^*| > \epsilon$$

erfolgt eine erneute Zuordnung der Stoffwerte. Der Iterationszyklus wird wiederholt, bis die o. g. Bedingung zutrifft.

Eine Variante des beschriebenen Iterationszyklusses ist, daß ein zweiter separater Iterationszyklus für die Eigenschaften  $F$  eingeführt, wobei z. B. fixiert wird. Bei dem Beispiel in Abschnitt 5 wurde die erstgenannte Variante benutzt.

## 5. Beispielrechnung und Diskussion der Ergebnisse

Im folgenden soll die Methode am Beispiel der Formungsströmung des keramischen Foliengießens erläutert werden. Das betrachtete Strömungsgebiet ist in Bild 6 dargestellt. Es besteht im wesentlichen aus einem parallelen Plattenspalt mit einem bewegten Rand und dem sich anschließenden Gebiet der freien Oberfläche. Als Randbedingungen wurden die Haftbedingung an den Wänden angenommen und die Bandgeschwindigkeit am unteren Rand vorgegeben bzw. für den oberen Rand im Kanal die Geschwindigkeit null gesetzt.

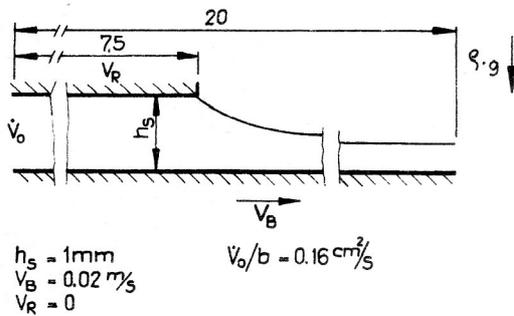
Die verwendeten Stoffwerte sind in Bild 7 dargestellt.

Die Aufbereitung der rheologischen Werte erfolgte für das dimensionslose Modell des Programmes, wie in Tabelle 1 dargestellt. Für  $Re^*$  gilt dabei:

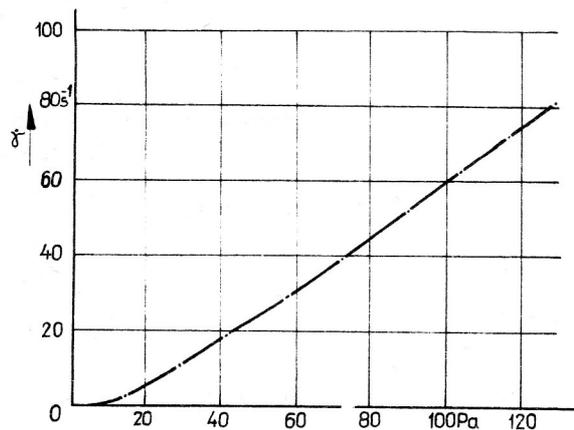
$$Re^* = \frac{v L \rho}{\eta_s}$$

Die Froude-Zahl hatte eine Größe von  $Fr = 0.0407$  und die Weber-Zahl von  $We = 85.71$ . Die Vernetzung umfaßte 168 Dreieckselemente und 13 Leitlinien, welche sich zum Ablösepunkt der freien Oberfläche hin verdichteten.

Als Startlösung wurde von einem parabolischen Geschwindigkeitsprofil ausgegangen, wobei der Durchsatz vorgegeben wurde. Die freie Oberfläche wurde für die



**Bild 6**  
Strömungsgebiet der Beispielrechnung mit Hauptabmessungen



**Bild 7**  
Fließkurve eines Tonerdeschlickers

Startlösung zwischen dem Ablösepunkt und dem abgeschätzten Endpunkt, an welchem ein ausgeglichenes Geschwindigkeitsprofil vorliegen soll, quadratisch gemittelt.

Über die zweite Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors wurden nach Tabelle 1 die entsprechenden Re-Zahlen im modellierten Prozeßgebiet zugeordnet.

Nach 24 Iterationen wurden das Geschwindigkeits- und Druckfeld, welche in Bild 8 und 10 dargestellt sind, als Ergebnis ermittelt.

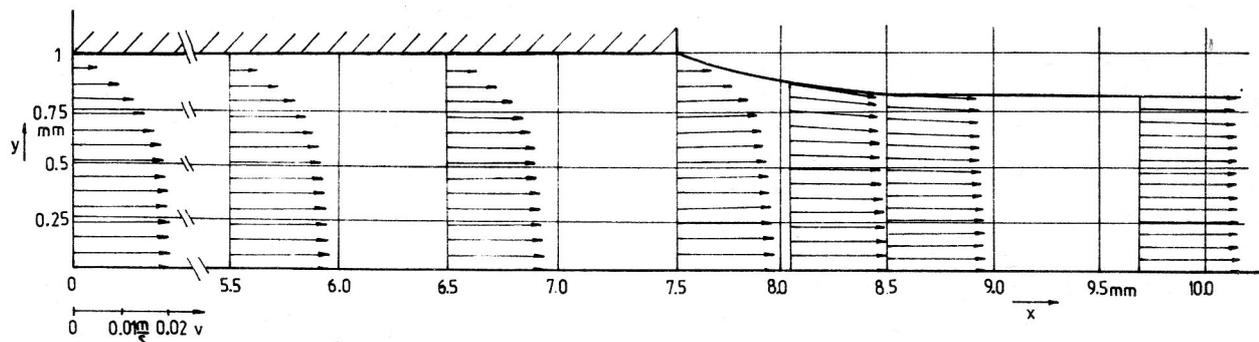
Wie aus Bild 8 ersichtlich ist, liegt im Plattenspalt eine deutliche Pfropfenströmung vor. Im Bereich zwischen  $x = 6$  bis  $7,5$  mm wirkt sich der Einfluß der Oberflächenspannung bereits deutlich auf die Form des Geschwindigkeitsprofils aus.

Im Gebiet der freien Oberfläche bildet sich ein Meniskus aus. Die Schichtdicke nimmt bis zur Endschichtdicke ab, welche bei ca.  $x = 11.5$  mm erreicht wird. Das Geschwindigkeitsprofil gleicht sich zwischen dem Ablösepunkt und dem Punkt der Erreichung der Endschichtdicke aus.

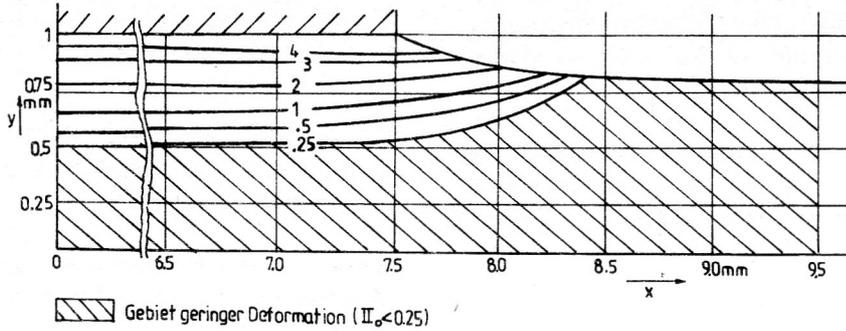
Dies wird auch aus Bild 9 deutlich, in welchem die Linien gleicher Deformation (Werte der  $\Pi_D$ ) dargestellt

**Tabelle 1**  
Wertetabelle der rheologischen Daten

$\Pi_D$ in $\text{s}^{-1}$		$Re^*$
0. ...	0.05	0.000092
0.05 ...	0.1	0.00018
0.1 ...	0.15	0.000275
0.15 ...	0.2	0.000365
0.2 ...	0.25	0.00045
0.25 ...	0.3	0.00054
0.4 ...	0.5	0.00072
0.5 ...	0.75	0.00089
0.75 ...	1.0	0.00132
1.0 ...	1.25	0.00173
1.25 ...	1.5	0.00214
1.5 ...	2.0	0.00253
2.0 ...	2.5	0.00327
2.5 ...	3.0	0.004
3.0 ...	3.5	0.0046
3.5 ...	4.0	0.00528
4.0 ...	4.5	0.00645
4.5 ...	5.5	0.00751

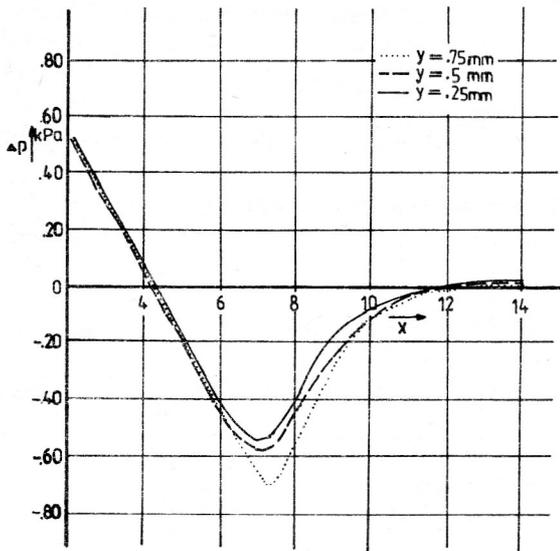


**Bild 8**  
Das Geschwindigkeitsfeld im Ergebnis



**Bild 9**

Linien gleicher Deformation mit den Werten der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors (in  $s^{-1}$ ) als Kurvenparameter



**Bild 10**

Das Druckfeld im Ergebnis

sind. Der schraffierte Bereich kennzeichnet dabei ein Gebiet geringer Deformation, in dem  $II_D = 0,25 s^{-1}$  gilt. Oberhalb dieses Gebietes befindet sich ein stärker gescherter Bereich, wobei die Werte der Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors über  $4 s^{-1}$  zum Rand hin zunehmen. Im Gebiet der freien Oberfläche laufen die Linien gleicher Deformation gegen die freie Oberfläche.

Der Verlauf des Druckes (vgl. Bild 10) auf unterschiedlichen Höhen ist in Bild 11 dargestellt. Im Kanal (zwischen  $x = 0$  bis  $6$  mm) ist eine lineare und nahezu parallele Abnahme der Druckwerte zu erkennen. Es ist keine Abhängigkeit der Druckwerte von der Höhe festzustellen. In der Nähe des Ablösepunktes (zwischen  $x = 4$  bis  $11$  mm) kommt es zu negativen Drücken infolge der Wirkung des Oberflächendruckes der freien Grenzfläche.

Mit dem zunehmenden Erreichen der Endschichtdicken laufen die Druckwerte gegen konstante Werte, deren Unterschied zahlenmäßig dem hydrostatischen Druckunterschied der Flüssigkeitssäule entspricht.

## 6. Zusammenfassung

Die in Abschnitt 4 dargestellte Methode ermöglicht die diskrete Verteilung von Stoffparametern in einem diskretisierten Prozeßgebiet. Dabei wird als nötige Unterteilung des Prozeßgebietes das FEM-Netzwerk benutzt. Das Netzwerk muß dabei den Änderungen der Prozeßvariablen angepaßt sein.

Die Methode wurde am Beispiel der Stoffeigenschaft Viskosität vorgestellt. Sie erlaubt dabei eine direkte Zuordnung von experimentell ermittelten Werten unabhängig von der rheologischen Approximation (rheologische Konstitutivgleichungen).

Die vorgestellte Methode läßt sich auf andere Stoffeigenschaften, wie z. B. die Wärmeleitfähigkeit usw., verallgemeinern, welche bei der Kopplung von Wärme- und Transportprozessen und bei Strömungsprozessen von reaktiven Medien von Bedeutung sind.

In Zusammenhang mit dem vorliegenden Artikel wird in [5] die Weiterführung der Methode vorgestellt, wie es für die Berücksichtigung von zeitlichen Veränderungen der Stoffeigenschaften erforderlich ist. Dabei werden die Prozeßvariablen entlang der Stromlinien verfolgt und die Stoffeigenschaften entsprechend zugeordnet. Die Art und Weise der Vorgehensweise und deren Anwendung werden erläutert.

### 1. Symbolverzeichnis

$\underline{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$\nabla$	Nablaoperator
$\cdot$	Skalarprodukt
$\underline{g}$	Erdbeschleunigungseinheitsvektor
$\underline{\alpha}$	vorgegebene Geschwindigkeit
$G$	Erdbeschleunigung
$\underline{n}$	Normaleneinheitsvektor
$\underline{t}$	Tangentialer Einheitsvektor
$p_u$	Umgebungsdruck
$s$	Bogenlänge
$\rho$	Dichte
$\gamma$	kinematische Viskosität
$\sigma$	Oberflächenspannung
$Fr$	Froude-Zahl mit $Fr =  \underline{v} ^2 / LG$
$We$	Weber-Zahl mit $We = \sigma / ( \underline{v} ^2 L \rho)$
$Re$	Reynolds-Zahl mit $Re =  \underline{v}  L / \gamma$
$p$	Parameter

E	Eigenschaft
Re*	verallgemeinerte Reynolds-Zahl der i-ten Iteration
$E_i$	i-tes Element
$\epsilon$	Fehlerschranke
s	Knotenpunktabstand
$\dot{\gamma}$	Schergeschwindigkeit
P	Prozeßparameter
Re	verallgemeinerte Reynolds-Zahl
D	Tensor der Deformationsgeschwindigkeit
$\nabla$	Viertelelement
N	Formfunktion
$G_1$	Anteil eines Viertelelements für die 1. Komponente der Navier-Stokes-Gleichung
$II_D$	2. Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

Unterstrichene Symbole sind Vektoren.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Socolowsky, J., Bergmann, J.: Leitlinientchnik zur Berechnung von Strömungen nichtlinear-viskoser Medien. Technische Mechanik 7 (1986) H. 1, S. 21 – 29.
- [ 2 ] Mitsoulis, E.: Computer-aided analysis of wire-coating process. Eng. Tokyo, vol. 4., 1986, S. 534 – 537.
- [ 3 ] Mitsoulis, E.: Extrudate swell in double-layer flows. Journal of Rheology 30, S. 23 – 44, 1986.
- [ 4 ] Loest, H., Lipp, R., Baumeister, H.-J.: Numerische Behandlung der Strömung einer Tonerdesuspension. Silikat-technik 39 (1988) H. 4, S. 128 – 129.

- [ 5 ] Loest, H., Lipp, R., Spauszus, S.: Ein Konzept zur numerischen Untersuchung von Strömungen keramischer Schlicker. Vortragsheft zur TECHTA, Weimar 1989
- [ 6 ] Kistler, S. F., Scriven, L. E.: Coating flow theory by finite element and asymptotic analysis of the Navier-Stokes-system. Int. num. meth. fluids 4 (1984), S. 207 – 229.
- [ 7 ] Ingle, R. N., Leutheusser, H. J.: Effects of surface tension on the configuration of the interface in emerging plane laminar sheet flow, Journal of colloid and interface science, Vol. 87, Nr. 2, 1982.
- [ 8 ] Papanastasiou, T. C.: Flows of material with yield. Journal of Rheology, 31 (5) (1987), S. 385 – 404.
- [ 9 ] Caswell, B., Tanner, R. I.: Wirecoating die design using finite element method, Sydney 1986.
- [ 10 ] Socolowsky, J.: Theoretische und numerische Untersuchungen von Strömungsproblemen bei Beschichtungs-vorgängen. Diss. A, Merseburg 1983.

#### Anschriften der Verfasser:

Dipl.-Ing. Hagen Loest  
Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar  
Sektion Baustoffverfahrenstechnik  
5300 Weimar  
Coudraystr. 13

Dr. rer. nat. Jürgen Socolowsky  
Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“  
Leuna-Merseburg  
Sektion Mathematik  
4200 Merseburg  
Otto-Nuschke-Straße

Doz. Dr. sc. techn. Roland Lipp  
Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“  
Leuna-Merseburg  
4200 Merseburg  
Otto-Nuschke-Straße