

Die plastische Deformation der Kreisringscheibe infolge wiederholter Druckbelastung des Innenrandes

Udo Gamer

1. Einleitung

Vor zehn Jahren untersuchten F. G. Kollmann und E. Önöz die Eigenspannungen in den plastisch deformierten Teilen eines Preßverbandes nach der Demontage insbesondere auch bei Auftreten sekundären Fließens in der Nabe [1]. Ihre auf der Trescaschen Fließbedingung und der zugeordneten Fließregel beruhenden Ergebnisse wurden kürzlich ergänzt durch den Autor: Er ermittelte die bleibende Deformation der Nabe [2] und verallgemeinerte deren idealplastisches Verhalten auf Material mit linearer Verfestigung [3]. Die Motivation dieser Untersuchungen war die Frage nach der Wiederverwendbarkeit der demontierten Nabe in einem neuerlichen Preßverband. Dabei stellt sich automatisch auch die Frage nach den Folgen einer mehrmaligen Aufbringung des Fugendrucks im Hinblick auf die Spannungsverteilung und die plastische Deformation.

In diesem Zusammenhang ist der idealplastische Werkstoff interessanter als das sich verfestigende Material: Bei isotroper Verfestigung erweitert sich nämlich der elastische Bereich mit jeder plastischen Deformation. Deshalb werden die durch den Aufbau und den Abbau der Last hervorgerufenen plastischen Deformationen immer kleiner, und nach wenigen Belastungszyklen hat sich die Scheibe eingespielt. Die idealplastische Scheibe hingegen spielt sich nicht ein, wie man mit Hilfe des Melanschen Theorems zeigen kann. Vielmehr ergibt sich nach der ersten Lastaufbringung eine quasi-alternierende plastische Dehnung in Umfangsrichtung. Sie nimmt bei der Belastung zu und bildet sich bei der darauffolgenden Entlastung um beinahe denselben Betrag wieder zurück. Die anderen beiden plastischen Dehnungen wachsen monoton, und zwar in radialer Richtung als Stauchung bei jeder Belastung und in axialer Richtung als Dehnung bei jeder Entlastung.

Im folgenden sind Spannungen, Verschiebung und plastische Dehnungen bei Belastung und Entlastung zusammengestellt. Dann wird gezeigt, daß es nicht zum Einspielen kommen kann. Die Wiederaufbringung der Last führt zu derselben Spannungsverteilung wie die erste Belastung; die Spannungen verlaufen also nach dem ersten Lastmaximum zyklisch. Unter Ausnutzung dieser Tatsache lassen sich die konstanten Inkremente der plastischen Dehnungen bei weiteren Belastungszyklen unschwer bestimmen.

2. Der erste Auf- und Abbau der Last

Bei elastischem Verhalten herrschen in der Scheibe die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = -\bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2} \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad (2.1)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right) \quad (2.2)$$

Dazu gehört die Verschiebung

$$\bar{u} = (1-\nu) \bar{\sigma}_r R + \bar{p} \frac{2Q^2}{1-Q^2} \frac{1}{R}, \quad (2.3)$$

wo $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_0$ die auf die Zugfließgrenze bezogenen dimensionslosen Spannungen, \bar{p} den dimensionslosen Druck $\bar{u} = Eu/(\sigma_0 b)$ die dimensionslose Verschiebung, $R = r/b$ den dimensionslosen Radius und $Q = a/b$ das Verhältnis von Innen- und Außenhalbmesser bezeichnen.

Die primäre plastische Deformation setzt ein am Innenrand, $R = Q$, beim Druck

$$\bar{p}_p = \frac{1}{2} (1 - Q^2). \quad (2.4)$$

Im plastischen Bereich, $Q \leq R \leq Z$, lauten die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = \log \frac{R}{Q} - \bar{p}, \quad (2.5)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \log \frac{R}{Q} + 1 - \bar{p}. \quad (2.6)$$

Die Verschiebung hat in der gesamten Scheibe die einheitliche Form [4]

$$\bar{u} = (1-\nu) \bar{\sigma}_r R + \frac{Z^2}{R}. \quad (2.7)$$

Die primären plastischen Dehnungen sind

$$\bar{\epsilon}_{\varphi 1}^p = -\bar{\epsilon}_{r 1}^p = \frac{Z^2}{R^2} - 1 \quad (2.8)$$

mit $\bar{\epsilon}_{ij}^p = E \epsilon_{ij}^p / \sigma_0$. Im elastischen Bereich, $Z \leq R \leq 1$, treten die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{1}{2} Z^2 \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad (2.9)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{1}{2} Z^2 \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right) \quad (2.10)$$

auf. Der Druck ist mit dem elastisch-plastischen Grenzzadius durch

$$\bar{p} = \log \frac{Z}{Q} + \frac{1}{2} (1 - Z^2) \quad (2.11)$$

verknüpft.

Wenn $Q < 0.450764$ und der Druck die Größe

$$\bar{p}_t = 1 - Q^2 \quad (2.12)$$

überschreitet, tritt bei der Entlastung sekundäres Fließen ein. Wie weiter unten gezeigt wird, stimmt dieser Druck überein mit demjenigen, für welchen bei der Wiederbelastung tertiäres Fließen beginnt. Für $Q \geq e^{-1}$ kann der Druck bis zur Traglast

$$\bar{p}_T = -\log Q \quad (2.13)$$

gesteigert werden. Für $Q < e^{-1}$ ist nur eine Teilplastizierung möglich bis zum kritischen Druck [5]

$$\bar{p}_c = 1. \quad (2.14)$$

Im folgenden ist stets eine Belastung bis zum Maximaldruck $\bar{p}_m > \bar{p}_t$ vorausgesetzt.

Der Druck am Innenrand wird jetzt langsam verringert. Damit tritt im plastischen Bereich elastische Entlastung ein. Den durch den Höchstdruck hervorgerufenen Spannungen werden elastische Entlastungsterme hinzugefügt. Im Bereich primärer plastischer Deformation, $Q \leq R \leq Z_m$, lauten die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = \log \frac{R}{Q} - \bar{p}_m - (\bar{p} - \bar{p}_m) \frac{Q^2}{1-Q^2} \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad (2.15)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \log \frac{R}{Q} + 1 - \bar{p}_m + (\bar{p} - \bar{p}_m) \frac{Q^2}{1-Q^2} \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right), \quad (2.16)$$

Mit denselben Entlastungstermen erhält man im elastischen Bereich, $Z_m \leq R \leq 1$,

$$\bar{\sigma}_r = - \left[\frac{1}{2} Z_m^2 + (\bar{p} - \bar{p}_m) \frac{Q^2}{1-Q^2} \right] \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad (2.17)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \left[\frac{1}{2} Z_m^2 + (\bar{p} - \bar{p}_m) \frac{Q^2}{1-Q^2} \right] \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right). \quad (2.18)$$

In der gesamten Scheibe ist die Verschiebung gegeben durch

$$\bar{u} = (1-\nu) \bar{\sigma}_r R + \left[Z_m^2 + 2(\bar{p} - \bar{p}_m) \frac{Q^2}{1-Q^2} \right] \frac{1}{R}. \quad (2.19)$$

Die vorstehenden Ausdrücke, in welchen Z_m den zu \bar{p}_m gehörigen Grenzradius bedeutet, gelten, solange die Entlastung elastisch verläuft, und zwar bis

$$\bar{p}_s = \frac{2}{1+Q^2} [\bar{p}_m - (1-Q^2)] = \frac{2}{1+Q^2} (\bar{p}_m - \bar{p}_t). \quad (2.20)$$

Bei diesem Druck erreicht die Umfangsspannung am Innenrand die negative Zugfließgrenze, und sekundäre plastische Deformation setzt ein.

Mit der weiteren Verringerung des Drucks breitet sich vom Innenrand nach außen der Bereich sekundären Fließens aus. Für diesen, $Q \leq R \leq X$, findet man

$$\bar{\sigma}_r = (1-\bar{p}) \frac{Q}{R} - 1, \quad (2.21)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = -1, \quad (2.22)$$

$$\bar{u} = (1-\bar{p}) Q \left(\log \frac{R}{X} - \nu \right) + \nu R + \frac{Z_m^2}{R} - 2X, \quad (2.23)$$

$$\bar{\epsilon}_{r2}^p = \bar{\epsilon}_{rI}^p = - \left(\frac{Z_m^2}{R^2} - 1 \right), \quad (2.24)$$

$$\bar{\epsilon}_{\varphi 2}^p = \frac{Z_m^2}{R^2} - 1 + \frac{Q}{R} \log \frac{R}{X} - 2 \left(\frac{X}{R} - 1 \right), \quad (2.25)$$

$$\bar{\epsilon}_{z2}^p = - \frac{Q}{R} \log \frac{R}{X} + 2 \left(\frac{X}{R} - 1 \right). \quad (2.26)$$

Der römische Index **I** bezeichnet das Ende der ersten plastischen Deformationsphase, welche durch \bar{p}_m und Z_m gekennzeichnet ist. In der restlichen Scheibe geht die elastische Entlastung weiter; im Bereich $X \leq R \leq Z_m$ gilt

$$\bar{\sigma}_r = \log \frac{R}{Q} - \bar{p}_m + \frac{1}{2} [(1-\bar{p}) Q X + X^2] \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad (2.27)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \log \frac{R}{Q} + 1 - \bar{p}_m - \frac{1}{2} [(1-\bar{p}) Q X + X^2] \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right) \quad (2.28)$$

und im Außenbereich $Z_m \leq R \leq 1$

$$\bar{\sigma}_r = - \frac{1}{2} [Z_m^2 - (1-\bar{p}) Q X - X^2] \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad (2.29)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{1}{2} [Z_m^2 - (1-\bar{p}) Q X - X^2] \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right). \quad (2.30)$$

Die Verschiebung in den letzteren beiden Bereichen ist gegeben durch

$$\bar{u} = (1-\nu) \bar{\sigma}_r R + [Z_m^2 - (1-\bar{p}) Q X - X^2] \frac{1}{R}. \quad (2.31)$$

Ergänzt werden diese Ergebnisse durch den Zusammenhang zwischen dem Druck \bar{p} und dem Grenzradius X ,

$$\bar{p} = 1 - \frac{2X}{(1+X^2)Q} \left(\log \frac{X}{Q} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} X^2 - \bar{p}_m \right). \quad (2.32)$$

Im entlasteten Zustand ergibt sich der Größtwert des Grenzradius aus

$$\bar{p}_m = \log \frac{X_m}{Q} + \frac{1}{2} \left[3 - (Q+X_m) X_m - \frac{Q}{X_m} \right]. \quad (2.33)$$

Bild 1 zeigt für $Q = 0.4$ und den Druck $\bar{p}_m = \bar{p}_T = -\log 0.4$ die Spannungen in der belasteten Scheibe nach (2.5) und (2.6) sowie die Eigenspannungen nach (2.21), (2.22), (2.27) und (2.28) mit $\bar{p} = 0$. Auf Bild 2 ist die Verschiebung unter Höchstlast nach (2.7) mit $Z_m = 1$ und nach dem Abbau der Last gemäß (2.23) und (2.31) für $\bar{p} = 0$ und $X = X_m$ nach (2.33) dargestellt. Ferner sieht man die nach (2.8), (2.25) und (2.26) berechneten plastischen Dehnungen $|\bar{\epsilon}_{rI}^p| \equiv \bar{\epsilon}_{\varphi I}^p \equiv |\epsilon_{rII}^p|$ sowie $\bar{\epsilon}_{\varphi II}^p$ und $\bar{\epsilon}_{zII}^p$.

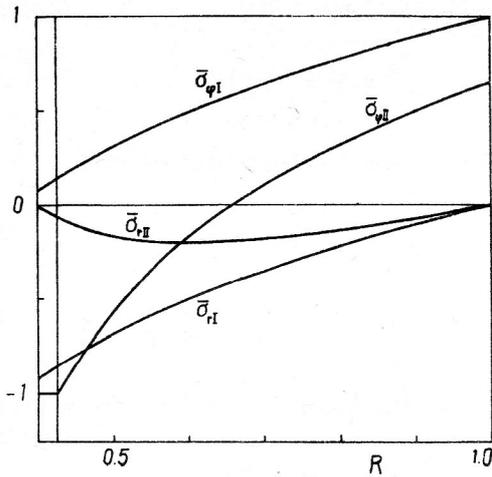


Bild 1
Spannungen in der belasteten und entlasteten Scheibe

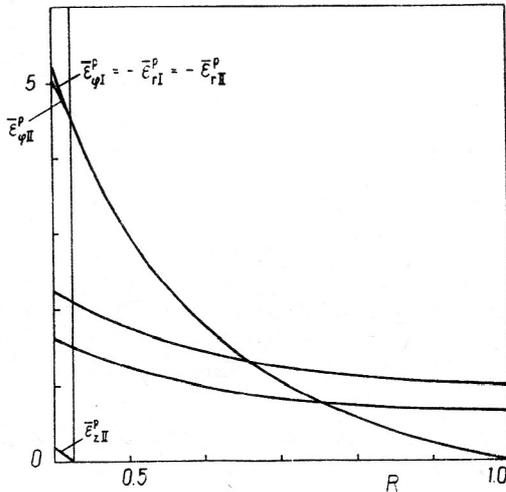


Bild 2
Verschiebungen und plastische Dehnungen in der belasteten und entlasteten Scheibe

Es erhebt sich nun die Frage, ob die Scheibe sich auf die wiederholte Druckbelastung einspielen wird. Da im vorliegenden Fall die Differenz von Umfangsspannung und Radialspannung für das Fließen unter Last maßgebend ist, kommt es zum Einspielen, wenn ein Eigenspannungszustand existiert, welcher der Bedingung

$$\sigma_{\varphi}^E + \sigma_{\varphi}^o - (\sigma_r^E + \sigma_r^o) < \sigma_o \quad (2.34)$$

oder

$$\sigma_r^o - \sigma_{\varphi}^o > \sigma_{\varphi}^E - \sigma_r^E - \sigma_o \quad (2.35)$$

genügt [6]. Hier bedeutet σ_{ij}^o ein Eigenspannungszustand und σ_{ij}^E die durch den Druck p hervorgerufenen Spannungen in der elastischen Scheibe. Deren Differenz,

$$\sigma_{\varphi}^E - \sigma_r^E = p \frac{2Q^2}{1-Q^2} \frac{b^2}{r^2}, \quad (2.36)$$

hat ihren Maximalwert am Innenrand, $r = a$. Also lautet die Bedingung

$$-\sigma_{\varphi}^o(a) > p \frac{2}{1-Q^2} - \sigma_o. \quad (2.37)$$

Nach Voraussetzung wächst der Druck bis auf $p_m > p_t = \sigma_o(1-Q^2)$, und damit geht die Bedingung über in

$$-\sigma_{\varphi}^o(a) > \sigma_o. \quad (2.38)$$

Bei idealplastischem Verhalten kann $-\sigma_{\varphi}^o(a)$ aber höchstens die Größe σ_o erreichen; somit ist die Möglichkeit des Einspielens widerlegt. Wäre die Bedingung (2.38) erfüllt, dann müßte man noch den Entlastungsvorgang untersuchen.

3. Die Wiederbelastung

Mit dem Beginn der zweiten Lastaufbringung verhält sich die gesamte Scheibe wieder elastisch. Zu den Eigenspannungen werden die durch den Druck am Innenrand hervorgerufenen Spannungen in der elastischen Scheibe addiert. Auf diese Weise erhält man im Bereich der sekundären plastischen Deformation, $Q \leq R \leq X_m$,

$$\bar{\sigma}_r = -(1 - \frac{Q}{R}) - \bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2} (\frac{1}{R^2} - 1), \quad (3.1)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi} = -1 + \bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2} (\frac{1}{R^2} + 1), \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} = & Q \log \frac{R}{X_m} + \nu(R-Q) + \frac{Z_m^2}{R} - 2X_m + \\ & + \bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2} [(1+\nu) \frac{1}{R} + (1-\nu)R] \end{aligned} \quad (3.3)$$

und im Bereich primären Fließens, $X_m \leq R \leq Z_m$,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r = & \log \frac{R}{Q} - \bar{p}_m - [-\frac{1}{2}(Q+X_m)X_m + \\ & + \bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2}] (\frac{1}{R^2} - 1), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi} = & \log \frac{R}{Q} + 1 - \bar{p}_m + \\ & + [-\frac{1}{2}(Q+X_m)X_m + \bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2}] (\frac{1}{R^2} + 1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Im elastischen Außenbereich, $Z_m \leq R \leq 1$, herrschen die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = -[\frac{1}{2}Z_m^2 - \frac{1}{2}(Q+X_m)X_m + \bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2}] (\frac{1}{R^2} - 1), \quad (3.6)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi} = [\frac{1}{2}Z_m^2 - \frac{1}{2}(Q+X_m)X_m + \bar{p} \frac{Q^2}{1-Q^2}] (\frac{1}{R^2} + 1). \quad (3.7)$$

Die Verschiebung in den Bereichen $X_m \leq R \leq 1$ hat die Form

$$\bar{u} = (1-\nu)\bar{\sigma}_r R + [Z_m^2 - (Q+X_m)X_m + \bar{p} \frac{2Q^2}{1-Q^2}] \frac{1}{R}. \quad (3.8)$$

Sobald die Differenz von Umfangs- und Radialspannung am Innenrand, $R = Q$, die Zugfließgrenze erreicht, tritt tertiäre plastische Deformation ein. Dies geschieht beim Druck

$$\bar{p}_t = 1 - Q^2 \quad (3.9)$$

Für diese Last und die Parameter $Q = 0.4$ und $\bar{p}_m = -\log 0.4$ zeigt Bild 3 die Spannungsverteilung in der Scheibe. Bei weiterer Drucksteigerung breitet sich vom Innenrand der Bereich tertiären plastischen Fließens, $a \leq r \leq y$, aus. Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung, der Fließbedingung und der Bedingung für die Radialspannung am inneren Rand, $r = a$, findet man die Spannungen

$$\sigma_r = \sigma_o \log \frac{r}{a} - p, \quad (3.10)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_o \left(\log \frac{r}{a} + 1 \right) - p. \quad (3.11)$$

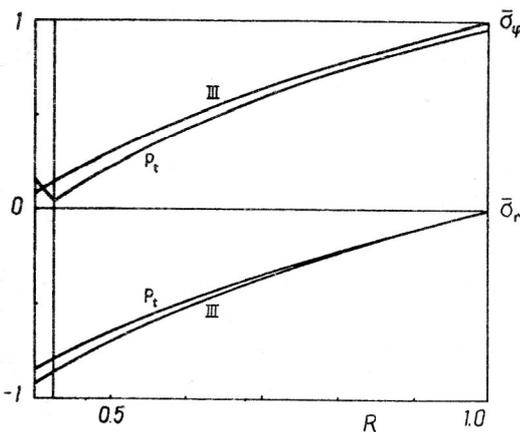


Bild 3
Spannungen am Anfang und am Ende des tertiären Fließens

Nach der zugeordneten Fließregel ist der Zuwachs der Summe der Dehnungen in radialer und in Umfangsrichtung elastisch; es gilt also

$$\epsilon_r + \epsilon_\varphi = \epsilon_r^e + \epsilon_\varphi^e + \epsilon_{rII}^p + \epsilon_{\varphi II}^p. \quad (3.12)$$

Durch Einsetzen obiger Spannungen und der plastischen Dehnungen im entlasteten Zustand nach (2.24) und (2.25) ergibt sich

$$\begin{aligned} E \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) &= (1-\nu) [\sigma_o (2 \log \frac{r}{a} + 1) - 2p] + \\ &+ \sigma_o \frac{a}{r} \log \frac{r}{x_m} - 2\sigma_o \left(\frac{x_m}{r} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Integration liefert

$$Eu = (1-\nu)\sigma_r r + \sigma_o \left(\log \frac{r}{x_m} - 1 \right) a - \sigma_o (2x_m - r) + \frac{D}{r}. \quad (3.14)$$

Daraus leitet man die plastischen Dehnungen

$$E\epsilon_r^p = \sigma_o \left(\frac{a}{r} + 2 \right) - \frac{D}{r^2}, \quad (3.15)$$

$$E\epsilon_\varphi^p = \sigma_o \left(\log \frac{r}{x_m} - 1 \right) \frac{a}{r} - 2\sigma_o \frac{x_m}{r} + \frac{D}{r^2} \quad (3.16)$$

ab.

Im sich anschließenden Bereich sekundären Fließens, $y \leq r \leq x$, wird die elastische Belastung fortgesetzt. Demnach lauten die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = -\sigma_o \left(1 - \frac{a}{r} \right) - C \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad (3.17)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = -\sigma_o + C \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \quad (3.18)$$

und die Verschiebung

$$\begin{aligned} Eu &= \sigma_o \left[a \log \frac{r}{x_m} + \nu (r-a) + \frac{z_m^2}{r} - 2x_m \right] + \\ &+ C \left[(1+\nu) \frac{b^2}{r} + (1-\nu)r \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen am Grenzradius y lassen sich C und D sowie der Druck als Funktion von y ermitteln. Die Stetigkeit der Spannungen liefert

$$\bar{p} = \log \frac{Y}{Q} + \frac{1}{2} \left[3 - (Q+Y)Y - \frac{Q}{Y} \right], \quad (3.20)$$

$$\frac{C}{\sigma_o} = \frac{1}{2} (Q+Y)Y. \quad (3.21)$$

Die noch fehlende Integrationskonstante D bestimmt man am einfachsten aus der Stetigkeit der plastischen Radialdehnung. Es ergibt sich

$$\frac{D}{\sigma_o b^2} = (Q+Y)Y + Z_m^2. \quad (3.22)$$

Damit sind die Spannungen und die Verschiebung während der dritten Fließphase in der gesamten Scheibe bekannt. Im Bereich primären Fließens, $X_m \leq R \leq Z_m$, gilt

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \log \frac{R}{Q} - \bar{p}_m - \frac{1}{2} [-(Q+X_m)X_m + \\ &+ (Q+Y)Y] \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varphi &= \log \frac{R}{Q} + 1 - \bar{p}_m + \\ &+ \frac{1}{2} [-(Q+X_m)X_m + (Q+Y)Y] \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

und im elastischen Bereich, $Z_m \leq R \leq 1$,

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{1}{2} [Z_m^2 - (Q+X_m)X_m + (Q+Y)Y] \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad (3.25)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{1}{2} [Z_m^2 - (Q+X_m)X_m + (Q+Y)Y] \left(\frac{1}{R^2} + 1 \right). \quad (3.26)$$

In den letzten beiden Bereichen lautet die Verschiebung

$$\bar{u} = (1-\nu)\bar{\sigma}_r R + [Z_m^2 - (Q+X_m)X_m + (Q+Y)Y] \frac{1}{R}. \quad (3.27)$$

Mit zunehmendem Druck wächst der Grenzradius Y . Durch Vergleich von (3.20) mit (2.33) stellt man fest, daß

$$Y(\bar{p}_m) = X_m \quad (3.28)$$

ist; bei der Steigerung des Drucks von \bar{p}_t auf \bar{p}_m zehrt der Bereich tertiären Fließens den Bereich sekundären Fließens auf. Wie man sich leicht überzeugt, stimmen nun die Spannungen in der gesamten Scheibe mit den durch die erste Höchstlast hervorgerufenen überein; nach dem erstmaligen Erreichen des maximalen Drucks verlaufen die Spannungen bei weiteren Ent- und Belastungen zyklisch. Eine notwendige Voraussetzung hierfür ist die im vorliegenden Fall gegebene Unabhängigkeit der Spannungen von der Verschiebung in den plastischen Bereichen.

Auf Bild 4 sind die Grenzradien als Funktion eines mit der Zeit monoton wachsenden Parameters schema-

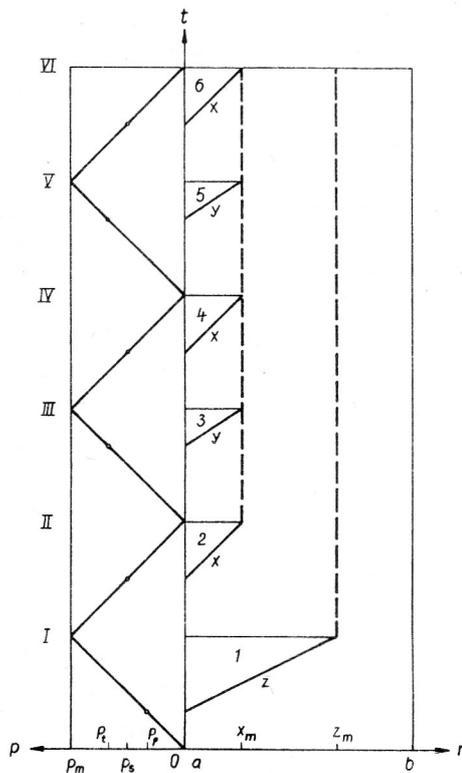


Bild 4
Die plastischen Bereiche und ihre Grenzen bei Belastung und Entlastung

tisch dargestellt. 1, 2, 3 ... bedeutet den Bereich des primären, sekundären, tertiären Fließens und I, II, III ... das Ende der ersten, zweiten, dritten ... Fließphase und damit Übergang zu elastischem Verhalten.

Auch die Verschiebung nimmt – allerdings nur im Bereich $X_m \leq R \leq 1$ – bei der zweiten Lastaufbringung wieder die zum ersten Höchstdruck gehörige Verteilung an. Die bei einem vollständigen Belastungszyklus auftretenden Zuwächse der Verschiebung und der plastischen Dehnungen im inneren Bereich, $Q \leq R \leq X_m$, werden im folgenden Abschnitt untersucht.

4. Die plastischen Dehnungszunahmen bei weiteren Lastzyklen

Während des ersten vollen Belastungszyklus – also zwischen den ersten beiden Belastungen durch den Druck \bar{p}_m – wachsen die Verschiebung und die plastischen Dehnungen um

$$\bar{u}_{III} - \bar{u}_I = \left(\log \frac{R}{X_m} - 1 \right) Q - (2X_m - R) + \frac{(Q+X_m)X_m}{R}, \quad (4.1)$$

$$\bar{\epsilon}_{rIII}^P - \bar{\epsilon}_{rI}^P = \frac{Q}{R} - \frac{(Q+X_m)X_m}{R^2} + 1, \quad (4.2)$$

$$\bar{\epsilon}_{\varphi III}^P - \bar{\epsilon}_{\varphi I}^P = \left(\log \frac{R}{X_m} - 1 \right) \frac{Q}{R} - 2 \frac{X_m}{R} + \frac{(Q+X_m)X_m}{R^2}, \quad (4.3)$$

$$\bar{\epsilon}_{zIII}^P - \bar{\epsilon}_{zI}^P = -\frac{Q}{R} \log \frac{R}{X_m} + 2 \left(\frac{X_m}{R} - 1 \right), \quad (4.4)$$

wie man durch Subtraktion der im zweiten und im dritten Abschnitt ermittelten Ausdrücke erhält. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß bei weiteren Belastungen die Spannungen zyklisch verlaufen, kann man die folgenden Inkremente leicht berechnen.

Zuerst wird die zweite Entlastungsphase, III \rightarrow IV, mit der ersten Entlastungsphase, I \rightarrow II, verglichen. Die plastischen Radialdehnungen ϵ_{rI}^P und ϵ_{rIII}^P bleiben während der Entlastung – auch bei der damit verbundenen plastischen Deformation – und der sich anschließenden Wiederbelastung konstant und ändern sich erst bei Eintritt neuerlichen Fließens unter Last. Für denselben Druck sind die elastischen Dehnungsanteile gleich, und es gilt

$$\Delta \epsilon_r = \epsilon_{rIII}^P - \epsilon_{rI}^P \quad (4.5)$$

oder

$$\frac{E}{\sigma_0} \frac{d}{dr} \Delta u = \frac{a}{r} - \frac{(a+X_m)X_m}{r^2} + 1. \quad (4.6)$$

Daraus folgt durch Integration

$$\frac{E}{\sigma_0} \Delta u = a \log r + \frac{(a+X_m)X_m}{r} + r + I. \quad (4.7)$$

Diese Differenz verschwindet an der Stelle $r = x_m$. Es ergibt sich also

$$\frac{E}{\sigma_0} \Delta u = \left(\log \frac{r}{x_m} - 1 \right) a - (2x_m - r) + \frac{(a+x_m)x_m}{r}, \quad (4.8)$$

$$\frac{E}{\sigma_0} \Delta \epsilon_\varphi = \left(\log \frac{r}{x_m} - 1 \right) \frac{a}{r} - 2 \frac{x_m}{r} + \frac{(a+x_m)x_m}{r^2}, \quad (4.9)$$

$$\frac{E}{\sigma_0} (\Delta \epsilon_r + \Delta \epsilon_\varphi) = \frac{a}{r} \log \frac{r}{x_m} - 2 \left(\frac{x_m}{r} - 1 \right). \quad (4.10)$$

(4.8) bis (4.10) sind gültig bis zum Wiedereintritt des Fließens unter Last. Bei der elastischen Entlastung ist

$$\Delta \epsilon_\varphi = \epsilon_{\varphi III}^p - \epsilon_{\varphi I}^p, \quad (4.11)$$

$$\Delta \epsilon_r + \Delta \epsilon_\varphi = -\epsilon_{z II}^p. \quad (4.12)$$

Damit sind bereits bekannte Ergebnisse wiedergewonnen. Während der plastischen Entlastung gilt

$$\Delta \epsilon_\varphi = \epsilon_{\varphi 4}^p - \epsilon_{\varphi 2}^p, \quad (4.13)$$

$$\Delta \epsilon_r + \Delta \epsilon_\varphi = -(\epsilon_{z 4}^p - \epsilon_{z 2}^p) \quad (4.14)$$

und bei Wiederanstieg der Last

$$\Delta \epsilon_\varphi = \epsilon_{\varphi IV}^p - \epsilon_{\varphi II}^p, \quad (4.15)$$

$$\Delta \epsilon_r + \Delta \epsilon_\varphi = -(\epsilon_{z IV}^p - \epsilon_{z II}^p). \quad (4.16)$$

Nun erfolgt der Vergleich der dritten Belastung, IV \rightarrow V, mit der zweiten, II \rightarrow III. Die Summen der plastischen Dehnungen $\epsilon_{r I}^p + \epsilon_{\varphi II}^p$, beziehungsweise $\epsilon_{r III}^p + \epsilon_{\varphi IV}^p$, bleiben während der elastischen und plastischen Belastung und bei dem folgenden Lastabbau konstant und ändern sich erst bei der plastischen Entlastung. Für denselben Druck gilt

$$\Delta \epsilon_r + \Delta \epsilon_\varphi = \epsilon_{r III}^p - \epsilon_{r I}^p + \epsilon_{\varphi IV}^p - \epsilon_{\varphi II}^p. \quad (4.17)$$

Mit (4.2), (4.15) und (4.9) wird daraus

$$\frac{E}{\sigma_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Delta u) = \frac{a}{r} \log \frac{r}{x_m} - 2 \left(\frac{x_m}{r} - 1 \right). \quad (4.18)$$

Integration liefert

$$\frac{E}{\sigma_0} \Delta u = \left(\log \frac{r}{x_m} - 1 \right) a - (2x_m - r) + \frac{J}{r}. \quad (4.19)$$

Die Integrationskonstante wird wieder aus dem Verschwinden des Verschiebungszuwachses am Radius $r = x_m$ ermittelt,

$$\frac{E}{\sigma_0} \Delta u = \left(\log \frac{r}{x_m} - 1 \right) a - (2x_m - r) + \frac{(a+x_m)x_m}{r}. \quad (4.20)$$

Daraus folgt

$$\frac{E}{\sigma_0} \Delta \epsilon_r = \frac{a}{r} - \frac{(a+x_m)x_m}{r^2} + 1, \quad (4.21)$$

$$\frac{E}{\sigma_0} \Delta \epsilon_\varphi = \left(\log \frac{r}{x_m} - 1 \right) \frac{a}{r} - 2 \frac{x_m}{r} + \frac{(a+x_m)x_m}{r^2} + 1 \quad (4.22)$$

$$\frac{E}{\sigma_0} (\Delta \epsilon_r + \Delta \epsilon_\varphi) = \frac{a}{r} \log \frac{r}{x_m} - 2 \left(\frac{x_m}{r} - 1 \right). \quad (4.23)$$

Diese Ergebnisse gelten bis zum Eintritt der plastischen Entlastung. Während der elastischen Belastung ist

$$\Delta \epsilon_r = \epsilon_{r III}^p - \epsilon_{r I}^p, \quad (4.24)$$

$$\Delta \epsilon_\varphi = \epsilon_{\varphi IV}^p - \epsilon_{\varphi II}^p, \quad (4.25)$$

$$\Delta \epsilon_r + \Delta \epsilon_\varphi = -(\epsilon_{z IV}^p - \epsilon_{z II}^p). \quad (4.26)$$

Somit werden (4.15) und (4.16) bestätigt. Bei der plastischen Belastung gilt

$$\Delta \epsilon_r = \epsilon_{r 5}^p - \epsilon_{r 3}^p, \quad (4.27)$$

$$\Delta \epsilon_\varphi = \epsilon_{\varphi 5}^p - \epsilon_{\varphi 3}^p \quad (4.28)$$

und bei der darauffolgenden elastischen Entlastung

$$\Delta \epsilon_r = \epsilon_{r V}^p - \epsilon_{r III}^p, \quad (4.29)$$

$$\Delta \epsilon_\varphi = \epsilon_{\varphi V}^p - \epsilon_{\varphi III}^p. \quad (4.30)$$

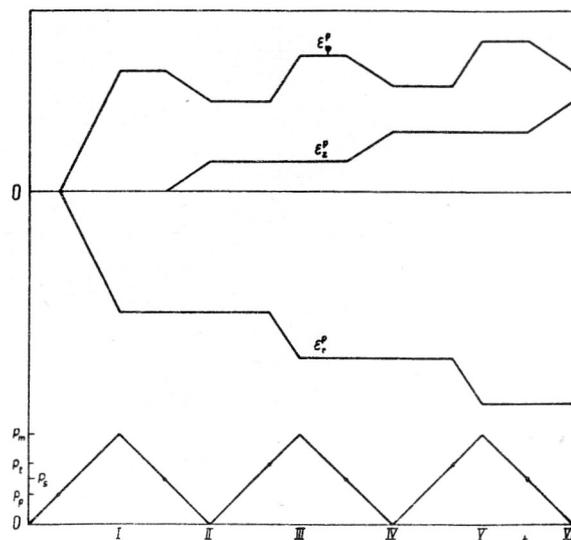


Bild 5
Die plastischen Dehnungen bei Belastung und Entlastung

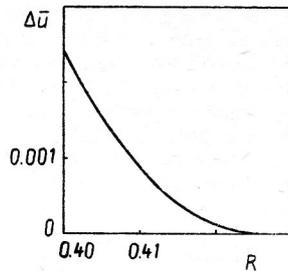


Bild 6
Zuwachs der Verschiebung bei einem Belastungszyklus

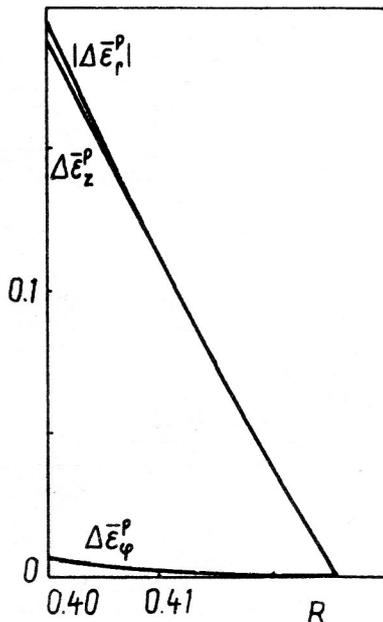


Bild 7
Zuwächse der plastischen Dehnungen bei einem Belastungszyklus

Die Gültigkeit von (4.26) endet erst bei Eintritt der plastischen Entlastung. An die Voraussetzung kleiner Deformationen sei erinnert; die Ergebnisse lassen sich nicht anwenden auf oftmalige Belastung.

Damit ist gezeigt, daß die Zuwächse an Verschiebung und plastischen Dehnungen, welche sich im Laufe des ersten vollständigen Ent- und Belastungszyklus einstellen, identisch sind mit den durch weitere Lastzyklen hervorgerufenen Zuwächsen, und zwar in jeder beliebigen Phase des Zyklus. Bild 5 zeigt schematisch die Zunahme der plastischen Deformation am Innenrand.

Numerische Ergebnisse hierzu sind auf den Bildern 6 und 7 dargestellt, und zwar zeigt Bild 6 den Verschiebungszuwachs $\Delta \bar{u}$ als Funktion von R nach (4.1) und Bild 7 die Zuwächse $|\Delta \epsilon_r^p|$, $\Delta \epsilon_z^p$ und $\Delta \epsilon_\phi^p$ nach (4.2) bis (4.4). Sowohl Δu als auch $\Delta \epsilon_\phi^p$ hat eine horizontale Tangente an der Stelle $r = x_m$. Die erstere erklärt sich aus $du/dr = \epsilon_r^e + \epsilon_r^p$ wegen der Stetigkeit der Spannungen und der plastischen Radialdehnung und

der Eindeutigkeit dieser Größen an der Stelle $r = x_m + 0$. Mit Hilfe der Kompatibilitätsbedingung $d(\epsilon_\phi^e + \epsilon_\phi^p)/dr = (\epsilon_r^e + \epsilon_r^p - \epsilon_\phi^e - \epsilon_\phi^p)/r$ und einer ähnlichen Argumentation zeigt man auch $d(\Delta \epsilon_\phi^p)/dr = 0$ an dieser Stelle.

LITERATUR

- [1] Kollmann, F. G.; Önz, E.: Die Eigenspannungen in den Ringen eines elastisch-plastisch beanspruchten Querspreßverbandes nach der Entlastung. Forsch.-Ing.-Wes. 45 (1979), 169 – 177. .
- [2] Gamer, U.: Die bleibende Deformation in der idealplastischen Nabe eines demontierten Preßverbandes.
- [3] Gamer, U.: Die Eigenspannungen in der sich verfestigenden Nabe eines demontierten Preßverbandes.
- [4] Gamer, U.: Die teilplastizierte Nabe eines Preßverbandes. Z. angew. Math. Mech. 67 (1987), 65 – 66.
- [5] Gamer, U.: The Elastic-plastic Shrink Fit with Supercritical Interference. Acta Mechanica 61 (1986), 1 – 14.
- [6] Martin, J. B.: Plasticity: Fundamentals and General Results. Cambridge, London 1975.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Udo Gamer
Technische Universität Wien
Institut für Mechanik
Wiedner Hauptstraße 8 – 10
A – 1040 WIEN