TECHNISCHE MECHANIK 10 (1989) Heft 4
Manuskripteingang: 22. 5. 1989

# Folgerungen aus der Verwendung orthogonaler Polynomansätze für den Spannungsansatz im hybriden Gleichgewichtsmodell in der Methode der finiten Elemente

D. Huste

## 1. Einleitung

In [1] wurde eine Möglichkeit der a priori-Bandbreitenminimierung der Ausgangsmatrizen des hybriden Gleichgewichtsmodells (HGM) unter Verwendung orthogonaler Polynome für den Spannungsansatz dargestellt.
Bei Verwendung derartiger Polynome ergibt sich die Fragestellung, ob gegenüber bisher üblichen Ansätzen Änderungen in den Elementeigenschaften auftreten, oder ob Identität erzielt wird.

## 2. Nachweis der Identität der interessierenden Größen

Dazu kann folgender Satz aufgestellt und bewiesen werden.

*Satz:*

Es sei [P] die Matrix des Spannungsansatzes eines HGM, [P*] die Matrix des Spannungsansatzes unter Verwendung eines andersgearteten Polynomansatzes des gleichen Unterraumes.
Die Matrizen [N] und [L] seien unverändert.
Dann gilt:

$$\{\sigma^*\} = \{\sigma\}, \{q^*\} = \{q\}, [k^*] = [k]$$

*Beweis:*

a) Unter der Voraussetzung der Verwendung von Polynomansätzen des gleichen Unterraumes existiert immer eine reguläre Matrix [Φ] so, daß gilt

$$[P^*] = [P]\,[\Phi]. \tag{1}$$

Da diese Beziehung für alle x,y des betrachteten Gebietes gilt, gilt auch

$$[R^*] = [R]\,[\Phi] \tag{2}$$

Mit diesen Ausgangsgrößen können die in [1] aufgezeigten Beziehungen für die Bestimmung der Ausgangsmatrizen des HGM aufgestellt werden.

$$[H^*] = \int_A [P^*]^T\,[N]\,[P^*]\,dA \tag{3}$$

$$= [\Phi]^T \int_A [P]^T\,[N]\,[P]\,dA\,[\Phi]$$

$$[H^*] = [\Phi]^T\,[H]\,[\Phi] \tag{4}$$

Daraus folgt

$$[H^*]^{-1} = [\Phi]^{-1}\,[H]^{-1}\,[[\Phi]^T]^{-1}. \tag{5}$$

Weiter gilt

$$[T^*] = \int_s [R^*]^T\,[L]\,ds \tag{6}$$

$$= [\Phi]^T \int_s [R]^T\,[L]\,ds$$

$$[T^*] = [\Phi]^T[T], \text{ bzw.} \tag{7}$$

$$[T^*]^T = [T]^T[\Phi]. \tag{8}$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix wird nach folgender Beziehung gebildet

$$[k^*] = [T^*]^T[H^*]^{-1}[T^*]. \tag{9}$$

(5), (7) und (8) in (9) eingesetzt, ergibt

$$[k^*] = [T]^T[\Phi]\,[\Phi]^{-1}\,[H]^{-1}[[\Phi]^T]^{-1}[\Phi]^T[T]. \tag{10}$$

$$= [T]^T[H]^{-1}[T] = [k] \text{ (lt. Def.)}.$$

Daraus folgt

$$[k^*] = [k]. \tag{11}$$

b) Entsprechend [1] gilt die Beziehung

$$\{q\} = [k]\,\{Q\}. \tag{12}$$

Es gilt aber auch

$$\{q^*\} = [k^*]\,\{Q\}. \tag{13}$$

Daraus folgt unmittelbar unter Nutzung von (11)

$$\{q^*\} = \{q\}. \tag{14}$$

c) Es gilt

$$\{\beta\} = [H]^{-1}[T]\,\{q\}, \text{ sowie} \tag{15}$$

$$\{\beta^*\} = [H^*]^{-1}[T^*]\,\{q\}. \tag{16}$$

(5) und (7) in (16) eingesetzt, ergibt

$$\{\beta^*\} = [\Phi]^{-1}[H]^{-1}[[\Phi]^T]^{-1}[\Phi]^T[T]\,\{q\}$$

$$= [\Phi]^{-1}[H]^{-1}[T]\,\{q\}.$$

**Tabelle 1:**
**Transformationsmatrix $[\Phi]$ für die Überführung des traditionellen in den orthogonalen vollquadratischen Spannungsansatz (nur Elemente verschieden von Null)**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | −G | −G | |
| 2 | | 1 | | | | | | | | −F∗G | −G | |
| 3 | | | 1 | | | | | b/2a | a/2b | | | |
| 4 | | | | H | | | | | | | | |
| 5 | | | | | H | | | | | | | |
| 6 | | | | | | H | | | | | | |
| 7 | | | | | | | H | | | | | |
| 8 | | | | | | | | 12 | | | | |
| 9 | | | | | | | | | 12 | | | |
| 10 | | | | | | | | | | 12G | | |
| 11 | | | | | | | | | | | 12G | |
| 12 | | | | | | | | | | | | 12G |

$G = \sqrt{5}/2$ $\qquad F = b^2/a^2$ $\qquad H = 2*\sqrt{3}$

Daraus folgt entsprechend (15)

$$\{\beta^*\} = [\Phi]^{-1}\ \{\beta\}\ . \tag{17}$$

Es gilt ebenso

$$\{\sigma\} = [P]\ \{\beta\}\ , \quad \text{sowie} \tag{18}$$

$$\{\sigma^*\} = [P^*]\ \{\beta^*\}\ . \tag{19}$$

(1) und (17) in (19) eingesetzt, ergibt

$$\{\sigma^*\} = [P]\,[\Phi]\,[\Phi]^{-1}\ \{\beta\}$$

$$= [P]\ \{\beta\} \quad \text{und entsprechend (18)}$$

$$\{\sigma^*\} = \{\sigma\}\ . \tag{20}$$

Damit ist die Identität der interessierenden Größen nachgewiesen.

Da dieser Satz nicht nur für die Verwendung orthogonaler Polynomansätze gilt, sondern für beliebige Referenzsysteme eines gleichen Unterraumes, erweitert sich dessen Bedeutung:

Elementaussagen, die sich in einem beliebigen Referenzsystem treffen lassen, gelten für jeden Polynomspannungsansatz des gleichen Unterraumes.

In Tabelle 1 ist die Transformationsmatrix $[\Phi]$ für den „normalen" vollquadratischen Spannungsansatz der Rechteckscheibe zur Überführung in den orthogonalen Ansatz angegeben.

## 3. Anwendung auf die Rechteckscheibe mit linearem Verschiebungsansatz

Durch den Autor wurde die Rechteckscheibe 1. Ordnung mit zwei Freiheitsgraden je Knoten unter Verwendung orthogonaler Polynomansätze für die Spannungen untersucht. In [1] ist in Bild 3 die [H]-Matrix für den vollquadratischen Spannungsansatz angegeben. Es zeigt sich, daß diese [H2]-Matrix folgende Struktur besitzt

$$[H2] = \left[\begin{array}{c|c} H1 & 0 \\ \hline 0 & H1z \end{array}\right] \quad \text{mit} \tag{21}$$

[H1] als [H]-Matrix für den vollständigen linearen Spannungsansatz.

Die [T21]-Matrix für den vollquadratischen Spannungsansatz und den linearen Verschiebungsansatz, in Tabelle 2 angegeben, besitzt die Struktur

$$[T21] = \left[\begin{array}{c} T11 \\ \hline 0 \end{array}\right]. \tag{22}$$

Damit ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix für die Rechteckscheibe mit quadratischem Spannungsansatz und linearem Verschiebungsansatz zu

$$[k21] = [T21]^T\,[H2]^{-1}\,[T21] \tag{23}$$

Die Beziehungen (21) und (22) in (23) eingesetzt, ergibt

$$[k21] = [T11^T : 0]\ \left[\begin{array}{c|c} H1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & H1z^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} T11 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

**Tabelle 2:** [T]-Matrix des Rechteckscheibenelements mit vollquadratischem orthogonalem Spannungsansatz und linearem Verschiebungsansatz

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-b/2$ | 0 | $b/2$ | 0 | $b/2$ | 0 | $-b/2$ | 0 |
| 2 | 0 | $-a/2$ | 0 | $-a/2$ | 0 | $a/2$ | 0 | $a/2$ |
| 3 | $-a/2$ | $-b/2$ | $-a/2$ | $b/2$ | $a/2$ | $b/2$ | $a/2$ | $-a/2$ |
| 4 | 0 | $-Fb^2/a$ | 0 | $Fb^2/a$ | 0 | $-Fb^2/a$ | 0 | $Fb^2/a$ |
| 5 | 0 | $Fa$ | 0 | $-Fa$ | 0 | $Fa$ | 0 | $-Fa$ |
| 6 | $Fb$ | 0 | $-Fb$ | 0 | $Fb$ | 0 | $-Fb$ | 0 |
| 7 | $-Fa^2/b$ | 0 | $Fa^2/b$ | 0 | $-Fa^2/b$ | 0 | $Fa^2/b$ | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$F = \sqrt{3}/6$

$$= [T11^T H1^{-1} \mid 0] \left[ \frac{T11}{0} \right]$$

$$= [T11]^T [H1]^{-1} [T11] = [k11], \qquad (24)$$

wobei [k11] die Elementsteifigkeitsmatrix des Rechteckscheibenelements mit linearem Spannungs- und Verschiebungsansatz ist.

Es gilt

$$\{\beta 2\} = [H2]^{-1} [T21] \{q\}, \quad \text{bzw.} \qquad (25)$$

$$\{\beta 1\} = [H1]^{-1} [T11] \{q\}. \qquad (26)$$

Die Beziehungen (21) und (22) in (25) eingesetzt, ergibt

$$\{\beta 2\} = \left[ \begin{array}{c|c} H1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & H1z^{-1} \end{array} \right] \left[ \frac{T11}{0} \right] \{q\}$$

$$= \left[ \frac{H11^{-1} T11}{0} \right] \{q\}$$

$$\{\beta 2\} = \left\{ \frac{\beta^1}{0} \right\}. \qquad (27)$$

Da sich zeigen läßt, daß für jede Erweiterung des Spannungsansatzes der Rechteckscheibe mit linearem Verschiebungsansatz über den vollständigen linearen Spannungsansatz hinaus die [H]-Matrix analog (21) und die [T]-Matrix analog (22) strukturiert ist, folgt die Identität aller dieser Elemente mit dem Element „linear-linear" und die Nullidentität aller zusätzlichen $\beta$-Werte. Nach den Beziehungen (11) und (17) und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $[\Phi]$ eine obere Dreiecksmatrix ist, gelten diese Aussagen auch für alle anderen Polynomansätze des gleichen Unterraumes für die Spannungen.

Plan führte bereits in [2] die Identität der Steifigkeitsmatrizen für Rechteckscheibenelemente mit linearem Verschiebungsansatz und unterschiedlichen Spannungsansätzen, und zwar mit vollständigem linearen, mit zwei unvollständigen sowie dem vollständigen quadratischen Spannungsansatz, an. Die von ihm an gleicher Stelle getroffene Aussage, daß die Nutzung des kompletten kubischen Spannungsansatzes die resultierende Matrix steifer mache, trifft aber auf Grund der nachgewiesenen Identität der Steifigkeitsmatrizen nicht zu.

Von Todorow werden in [3] unterschiedliche Ergebnisse für hybride Rechteckscheibenelemente mit linearem Verschiebungsansatz und mit linearem bzw. kubischem Spannungsansatz vorgestellt. Diese unterschiedlichen Ergebnisse sind unreal, ihre Gleichheit analytisch erwiesen. Sie können nur aus numerischen Effekten erklärt werden.

## 4. Schlußbemerkungen

Bei der Entwicklung hybrider Gleichgewichtsmodelle ist es möglich, bei der Aufstellung des Spannungsansatzes mit Polynomen eines Unterraumes so zu arbeiten, daß Elementeigenschaften leichter ablesbar sind. Solche Eigenschaften sind z. B. die in [1] vorgestellten [H]-Matrizen oder die erhaltenen „Null-Zeilen" in der [T]-Matrix. Die Wahl des Polynomansatzes beeinflußt nicht die interessierenden Elementgrößen.

Für das hybride Rechteckscheibenelement mit linearen Randverschiebungen kann nachgewiesen werden, daß alle Spannungsterme über den vollständigen linearen Ansatz hinaus keinen Einfluß auf die Steifigkeitsmatrix besitzen. Andersgeartete Aussagen in der Literatur sind Ausdruck numerischer Ungenauigkeiten.

**LITERATUR**


[1] Huste, D.; Pfau, P.: Eine Möglichkeit zur a priori-Bandbreitenminimierung bei Verwendung des hybriden Gleichgewichtsmodells in der Methode der finiten Elemente. In: Technische Mechanik (10), Heft 2, 1989.

[2] Pian, T. H. H.: Element Stiffness-Matrices for Boundary Compatibility and for Prescibed Boundary Stresses. In: Matrix Methods in Structural Mechanics; Proceedings of the Conference held at Wright-Patterson; Air Force Base, Ohio, 1965, 457 – 477.

[3] Todorow, M.: Anwendung finiter hybrider Spannungselemente in der Elastostatik, Dissertation TH Magdeburg, 1978.



**Anschrift des Verfassers:**

Dipl.-Ing. Dieter Huste
Offiziershochschule der GT der DDR
PSF 79292/SB
Suhl
6023