TECHNISCHE MECHANIK 10 (1989) Heft 4
Manuskripteingang: 25. 5. 1989

Die differentielle Standardformulierung für einen speziellen Ansatz der kinematischen Verfestigung

Uwe Knauer

1. Einleitung

In den letzten Jahren wurde von verschiedenen Autoren die Modellierung des mechanischen Materialverhaltens bei großen Deformationen untersucht. Dabei nimmt die Beschreibung anisotroper Effekte, speziell der kinematischen Verfestigung, eine zentrale Stellung ein. Einerseits wurden dabei Untersuchungen mit einfachsten Ansätzen z. B. nach Prager [1], [9] und der Verwendung von verschiedenen objektiven Spannungsgeschwindigkeiten geführt. Auf der anderen Seite konnten Ansätze geschaffen werden, die eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment aufweisen (z. B. [2]). Diese müssen aber ebenfalls Objektivitätsbedingungen genügen. Bei der Aufstellung der entsprechenden Materialgleichungen wurden vorwiegend raumfeste Koordinaten verwendet, wodurch Drehglieder in den Gleichungen verbleiben.

Die Standardformulierung für Deformationsgesetze nach Bergander ermöglicht eine sehr einfache Realisierung von verschiedenen Materialklassen in Berechnungsprogrammen. Sie fordert eine Art Schnittstelle, mit der ohne Programmieraufwand in einem Bauteilprogramm Rechnungen mit verschiedenen Materialtypen erfolgen können. Die dafür benötigten Materialunterprogramme werden getrennt vom Feldproblem entwickelt und getestet. In [5] wurde für verschiedene Verfestigungsansätze gezeigt, daß sie durch Umformung bzw. durch sinnvolle Approximationen den Forderungen der Standardformulierung genügen. Diese Vorteile können natürlich auch bei der Betrachtung von großen Deformationen genutzt werden. Dazu sind aber für die Wahl des Koordinatensystems, in dem das Deformationsgesetz formuliert wird, bestimmte Bedingungen notwendig. In [7] wurden die Vorzüge der Verwendung einer konvektiven Metrik dargestellt. In dieser Metrik ist die materielle Objektivität auf besonders einfache Weise zu sichern: Die materiellen Zeitableitungen der Tensorkoordinaten gehören wieder zu objektiven Tensoren. Zur Anpassung von Deformationsgesetzen in konvektiver Metrik an Rechenprogramme mit anderen Bezugssystemen können spezielle Adapterprogramme [6] eingesetzt werden.

In dieser Arbeit werden einleitend die Grundgleichungen der Plastizitätstheorie großer Verformungen zusammengestellt. Im Anschluß daran wird für das objektive Deformationsgesetz nach Backhaus [2] gezeigt, daß sich diese Formulierung ebenfalls mit dem definierten Variablenvorrat der Standardformulierung beschreiben läßt.

2. Definition zur Kinematik

Der Zusammenhang zwischen der aktuellen Konfiguration und einer Bezugskonfiguration wird mit dem Deformationsgradienten $\underline{F}$ beschrieben. Dieser kann polar in den Links-Streck-Tensor $\underline{V}$ und in den Tensor der Starrkörperdrehung $\underline{R}$ zerlegt werden.

$$\underline{F} = \underline{V}\,\underline{R} \tag{2.1}$$

Es gilt $\underline{R}\,\underline{R}^T = \underline{R}^T\,\underline{R} = \underline{I}$, $\det(\underline{R}) = 1$. Dabei wird durch $\underline{I}$ der Einheitstensor 2. Stufe repräsentiert. Der Geschwindigkeitsgradient $\underline{L}$ wird mit

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}}\,\underline{F}^{-1} \tag{2.2}$$

gebildet. Mit $\underline{L}$ kann die Deformationsgeschwindigkeit

$$\underline{d} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^T) \tag{2.3}$$

und die Drehgeschwindigkeit der Hauptachsen von $\underline{d}$

$$\underline{W} = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^T) \tag{2.4}$$

dargestellt werden. In [11] wird zur Bildung einer objektiven Spannungsgeschwindigkeit noch die Drehgeschwindigkeit der Starrkörperrotation $\underline{\Omega}$ gemäß

$$\underline{\Omega} = \dot{\underline{R}}\,\underline{R}^T \tag{2.5}$$

eingeführt.

Mit dem Vektor $\vec{x}$ wird die Position des materiellen Teilchens im Momentanzustand beschrieben. Dabei ist jedes Teilchen durch die 3 Parameter Θ^1, Θ^2 und Θ^3 eindeutig festgelegt. Die partiellen Ableitungen nach Θ^α werden mit

$$\frac{\partial()}{\partial \Theta^\alpha} = (\,),_\alpha \tag{2.6}$$

gekennzeichnet. Die kovarianten Basisvektoren

$$\vec{g}_\alpha = \vec{x},_\alpha \tag{2.7}$$

beinhalten die Tangentenvektoren an die Linien materieller Koordinaten. Die reziproken kontravarianten Basisvektoren werden mit

$$\vec{g}^{\,\alpha} \cdot \vec{g}_\beta = \delta^\alpha_\beta \tag{2.8}$$

definiert. Mit den Skalarprodukten

$$g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta \tag{2.9a}$$

$$g^{\alpha\beta} = \vec{g}^{\alpha} \cdot \vec{g}^{\beta} \qquad (2.9b)$$

werden die ko- bzw. kontravarianten Koordinaten des Maßtensors gebildet. Mit griechischen Indizes werden im weiteren die Koordinaten von Tensoren in konvektiver Metrik dargestellt.

3. Die Standardformulierung für Deformationsgesetze

Die üblichen Deformationsgesetze des Festkörpers können als lineare Zuordnung zwischen Spannungs- und Deformationsgeschwindigkeit formuliert werden. Dabei wird wegen der Konjugation im Variationsprinzip die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha\beta} = \dot{\sigma}^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} d^{\mu}_{\mu} \qquad (3.1a)$$

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\mu\kappa} d_{\mu\kappa} + m^{\alpha\beta}_{T} \dot{T} + m^{\alpha\beta} \qquad (3.1b)$$

verwendet. Zusätzlich wird ein Satz interner Variabler eingeführt, der sich analog zur Spannung verändern soll. Dieser Satz kann dabei die Koordinaten von Tensoren verschiedener Stufe beinhalten.

$$\dot{h}_i = B^{\mu\kappa}_{i} d_{\mu\kappa} + e_{Ti} \dot{T} + e_i \qquad (3.2)$$

Die speziellen Materialeigenschaften sind durch die Tensoren $C^{\alpha\beta\mu\kappa}$, $m^{\alpha\beta}_{T}$, $m^{\alpha\beta}$, $B^{\mu\kappa}_{i}$, e_{Ti}, e_i bestimmt. Diese Tensoren können von der Metrik $g_{\alpha\beta}$, der Verzerrung $\epsilon_{\alpha\beta}$, der Spannung $\sigma^{\alpha\beta}$, den internen Variablen h_i und der Temperatur T abhängen.

Im weiteren wird der isotherme Fall betrachtet und die Temperaturänderung infolge Dissipation vernachlässigt. Folgende Annahmen werden der skleronomen Fließtheorie zugrunde gelegt.

– Es werden kleine elastische Deformationen vorausgesetzt. Die Deformationsgeschwindigkeit wird gemäß

$$d_{\alpha\beta} = d^{el}_{\alpha\beta} + d^{pl}_{\alpha\beta} \qquad (3.3)$$

in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespaltet.

– Die Einhaltung einer Fließbedingung ist notwendige Voraussetzung für das Fließen. Dabei wird im weiteren plastische Inkompressibilität vorausgesetzt. Mit der verwendeten Fließbedingung wird nur die kinematische Verfestigung berücksichtigt. Mit S^{α}_{β} werden die gemischtvarianten Koordinaten des Spannungsdeviators, mit a^{α}_{β} die entsprechenden Koordinaten des Verschiebungstensors und mit σ_F die Fließspannung dargestellt. Durch die gemischtvariante Formulierung ist die Fließbedingung metrikfrei. Mit der Abkürzung $J = \sqrt{g}/\sqrt{g_o}$ für $g = \det(g_{\alpha\beta})$ lautet die verwendete Fließbedingung

$$F = 3/2\, J^2 (S^{\beta}_{\alpha} - a^{\beta}_{\alpha})(S^{\alpha}_{\beta} - a^{\alpha}_{\beta}) - \sigma^2_F = 0 \qquad (3.4)$$

– Für den plastischen Anteil der Deformationsgeschwindigkeit gilt das assoziierte Fließgesetz.

$$d^{pl}_{\alpha\beta} = \frac{\partial F}{\partial \tau^{\alpha\beta}} \dot{\lambda} \qquad (3.5a)$$

Dabei gilt der Zusammenhang

$$\tau^{\alpha\beta} = J\, \sigma^{\alpha\beta} \qquad (3.5b)$$

zwischen den kontravarianten Koordinaten des wahren (oder Cauchyschen) Spannungstensors $\sigma^{\alpha\beta}$ und denen des Kirchhoffschen Spannungstensors $\tau^{\alpha\beta}$, der sich als arbeitskonjugierte statische Variable zu $\epsilon_{\alpha\beta}$ ergibt. Für die verwendete Fließbedingung gilt dann unter Beachtung von

$$\Phi^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial F}{\partial \tau^{\beta}_{\alpha}} = g^{\alpha\kappa} \Phi_{\kappa\beta} = g^{\alpha\kappa} \frac{\partial F}{\partial \tau^{\kappa\beta}} \qquad (3.5c)$$

die Gleichung

$$\Phi^{\alpha}_{\beta} = 3\, J\, (S^{\alpha}_{\beta} - a^{\alpha}_{\beta}) \qquad (3.5d)$$

– Die internen Variablen repräsentieren die Verfestigungsparameter. Sie genügen Differentialgleichungen 1. Ordnung und dürfen sich nur während des plastischen Fließens ändern. Die entsprechende Gleichung

$$\dot{h}_i = q_i (\tau^{\alpha}_{\beta}, h_j)\, \dot{\lambda} \qquad (3.6)$$

wird Normalform genannt.

Während des Fließens muß die Fließbedingung erfüllt sein (F = 0). Daraus ergibt sich die Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \tau^{\alpha}_{\beta}} \dot{\tau}^{\alpha}_{\beta} + \frac{\partial F}{\partial h_i} \dot{h}_i = 0 \qquad (3.7)$$

Unter Einführung der Verfestigungsfunktion

$$V = -1/J \frac{\partial F}{\partial h_i} q_i \qquad (3.8)$$

kann (3.7) in folgende Form gebracht werden.

$$\Phi_{\alpha\beta} \overset{\nabla}{\sigma}{}^{\alpha\beta} - V \dot{\lambda} = 0 \qquad (3.9a)$$

Dabei werden mit $\overset{\nabla}{\sigma}{}^{\alpha\beta}$ die kontravarianten Koordinaten der gewichteten Jaumannschen Spannungsgeschwindigkeit

$$\overset{\nabla}{\sigma}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\mu} d^{\beta}_{\mu} + \sigma^{\mu\beta} d^{\alpha}_{\mu} \qquad (3.9b)$$

bezeichnet. In (3.9a) ist mit

$$\Phi_{\alpha\beta} \overset{\nabla}{\sigma}{}^{\alpha\beta} \geqslant 0 \qquad (3.10)$$

auch die zweite Bedingung für plastisches Fließen, die Belastungsbedingung, enthalten.

Für die weitere Aufstellung des Formelapparates zur Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens ist eine konstitutive Annahme für den elastischen Deformationsanteil notwendig. Dabei hat sich die Verwendung der Jaumannschen Geschwindigkeit $\overset{\nabla}{\underline{\sigma}}$ bewährt. Hier kann in Verbindung mit einem konstanten Elastizitätstensor $\underline{E}$ bei hypoelastischer Formulierung eine gute Übereinstimmung mit dem Zugversuch gezeigt werden, da in orthogonaler Metrik die Ergebnisse dem „linearen" Hencky-Gesetz entsprechen.

$$\overset{\nabla}{\sigma}^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\mu\kappa} d^{el}_{\mu\kappa} \tag{3.11}$$

Im weiteren wird die Abkürzung

$$E^{\alpha\beta\mu\kappa} = \underset{el}{C}^{\alpha\beta\mu\kappa} + N^{\alpha\beta\mu\kappa} \tag{3.12a}$$

mit

$$N^{\alpha\beta\mu\kappa} = \frac{1}{2}\,(\sigma^{\alpha\mu}g^{\beta\kappa} + \sigma^{\alpha\kappa}g^{\beta\mu} + \sigma^{\beta\mu}g^{\alpha\kappa} + \sigma^{\beta\kappa}g^{\alpha\mu}) \tag{3.12b}$$

und dem Elastizitätstensor

$$E^{\alpha\beta\mu\kappa} = \frac{E}{2(1+\nu)}\,(g^{\alpha\mu}g^{\beta\kappa} + g^{\alpha\kappa}g^{\beta\mu} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\,g^{\alpha\beta}g^{\mu\kappa}) \tag{3.12c}$$

verwendet. Nach Rücksubstitution in die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}$ gemäß

$$\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} = \overset{\nabla}{\sigma}^{\alpha\beta} - N^{\alpha\beta\mu\kappa} d_{\mu\kappa} \tag{3.13}$$

ergibt sich mit den Gleichungen (3.3) und (3.5a) für die Gleichung (3.11) folgende Form

$$\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} = \underset{el}{C}^{\alpha\beta\mu\kappa}\,(d_{\mu\kappa} - \dot{\lambda}\,\Phi_{\mu\kappa}) \tag{3.14}$$

Damit erhält die Konsistenzbedingung die Gestalt

$$\Phi_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta\mu\kappa}d_{\mu\kappa} - \dot{\lambda}\,(\Phi_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta\mu\kappa}\Phi_{\mu\kappa} + V) = 0 \tag{3.15}$$

Mit den Abkürzungen

$$\Sigma^{\mu\kappa} = E^{\alpha\beta\mu\kappa}\Phi_{\alpha\beta} \tag{3.16}$$

und

$$\beta = \begin{cases} 0 & F < 0 \text{ und } \Phi_{\alpha\beta}\overset{\nabla}{\sigma}^{\alpha\beta} < 0 \\ (\Phi_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta\mu\kappa}\Phi_{\mu\kappa} + V)^{-1} & F = 0 \text{ und } \Phi_{\alpha\beta}\overset{\nabla}{\sigma}^{\alpha\beta} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

folgt für den skalaren Faktor des assoziierten Fließgesetzes

$$\dot{\lambda} = \beta\,\Sigma^{\mu\kappa}d_{\mu\kappa} \tag{3.18}$$

Nach Einsetzen von (3.18) in (3.14) wird der Anschluß zu (3.1) und (3.2) hergestellt.

$$\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} = (\underset{el}{C}^{\alpha\beta\mu\kappa} - \beta\,\Sigma^{\alpha\beta}\,\Sigma^{\mu\kappa})\,d_{\mu\kappa} \tag{3.19}$$

$$\dot{h}_i = \beta q_i\,\Sigma^{\mu\kappa}d_{\mu\kappa} \tag{3.20}$$

4. Allgemeine Forderungen an die kinematische Verfestigung bei großen Deformationen

Für die Änderung des Verschiebungstensors $\underline{a}$ in (3.4) muß bei großen Deformationen eine objektive Materialgleichung angegeben werden. Im einfachsten Fall wird dabei die Verschiebungsregel nach Prager durch Verwendung einer objektiven Spannungsgeschwindigkeit verallgemeinert. Mit c wird im weiteren die Prager-Konstante bezeichnet.

$$\overset{\blacksquare}{\underline{a}} = c\underline{d} \tag{4.1}$$

In [1] und [9] werden mögliche Spannungegeschwindigkeiten diskutiert. Für die Jaumannsche Spannungsgeschwindigkeit

$$\overset{\blacktriangledown}{\underline{a}} = \dot{\underline{a}} - \underline{W}\,\underline{a} + \underline{a}\,\underline{W} \tag{4.2}$$

konnte auf Grund ihrer speziellen Form [4] eine Oszillation der Spannungskomponenten während monotoner Laststeigerung beim einfachen Schub nachgewiesen werden. Physikalisch plausiblere Ergebnisse ergeben sich bei Verwendung der Z-Geschwindigkeit [i], [12]

$$\overset{z}{\underline{a}} = \dot{\underline{a}} - \underline{\Omega}\,\underline{a} + \underline{a}\,\underline{\Omega} \tag{4.3}$$

die auf Dienes [11] zurückgeht. Gegenüber (4.3) besitzt die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit den Vorteil, daß sie arbeitskonjugiert ist [7], [13].

$$\overset{\circ}{\underline{a}} = \dot{\underline{a}} + \underline{a}\,\mathrm{tr}(\underline{d}) - \underline{L}\,\underline{a} - \underline{a}\,\underline{L}^T \tag{4.4}$$

Die Verwendung der Truesdellschen Spannungsgeschwindigkeit führt ebenfalls zu nichtoszillierenden Lösungen. Die Gleichung (4.4) entspricht der gewichteten Oldroydschen Spannungsgeschwindigkeit, die bei Volumenkonstanz mit der Oldroydschen Geschwindigkeit („upper convected derivative") übereinstimmt.

$$\overset{\blacktriangle}{\underline{a}} = \dot{\underline{a}} - \underline{L}\,\underline{a} - \underline{a}\,\underline{L}^T \tag{4.5}$$

$$\overset{\blacktriangle}{\underline{a}} = \dot{a}^{\alpha\beta}\vec{g}_\alpha\vec{g}_\beta \tag{4.6}$$

Für die konstitutiven Annahmen (4.2), (4.3) bzw. (4.4) mit (4.1) konnten die entsprechenden Ergebnisse mit dem Programm NIMAG [7] ermittelt werden.

Die Gleichung (3.4) wird ebenfalls objektiv, wenn

$$\underline{a} = \underline{R}\,\underline{A}^*\underline{R}^T, \quad \underline{A}^* = \underline{R}^T\underline{a}\,\underline{R} \tag{4.7}$$

gilt. $\underline{A}^*$ muß dabei auf eine feste Bezugskonfiguration bezogen sein [4]. Gemäß den Forderungen der Standardformulierung wird $\underline{a}$ in differentieller Form als Satz von Differentialgleichungen benötigt. Die Differentation von (4.7) nach der Zeit ergibt die Z-Geschwindigkeit.

$$\overset{z}{\underline{a}} = \underline{R}\,\dot{\underline{A}}^*\underline{R}^T \tag{4.8}$$

Daraus leitet sich aber keine Bevorzugung der Z-Geschwindigkeit ab, denn eine zu (4.7) gleichwertige objektive Formulierung

$$\underline{a} = \frac{1}{J}\,\underline{F}\underline{A}^*\underline{F}^T \tag{4.9}$$

ergibt nach der Differentation die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit

$$\overset{o}{\underline{a}} = \frac{1}{J}\,\underline{F}\dot{\underline{A}}^*\underline{F}^T. \tag{4.10}$$

5. Das spezielle objektive Stoffgesetz nach Backhaus in Standardformulierung

Der Vorschlag von Backhaus in [2] für ein objektives Stoffgesetz lautet

$$\underline{S}(\epsilon_v) = \frac{2}{3}\,k_f\,\tilde{\underline{d}}(\epsilon_v) - \underline{R}(\epsilon_v)\left(\int_0^{\epsilon_v}\frac{2}{3}\,z(\bar{\epsilon}_v)k_f(\bar{\epsilon}_v)\varphi(\epsilon_v-\bar{\epsilon}_v)\underline{R}^T\underline{D}\,\underline{R}\,d\bar{\epsilon}_v\right)\underline{R}^T(\epsilon_v) \tag{5.1}$$

mit

$$\underline{D} = \tilde{\underline{d}}' - \tilde{\underline{W}}\tilde{\underline{d}} + \tilde{\underline{d}}\tilde{\underline{W}},\quad \tilde{\underline{d}} = \underline{d}\,\frac{dt}{d\epsilon_v}, \tag{5.2a}$$

$$\tilde{\underline{W}} = \underline{W}\,\frac{dt}{d\epsilon_v},\quad (\;)' = \frac{d}{d\epsilon_v}$$

und den Materialfunktionen 2z, φ und k_f. Dabei wird mit der Bauschinger-Kennzahl 2z der Zusammenhang mit der Fließspannung σ_F hergestellt.

$$\sigma_F(\epsilon_v) = k_f(\epsilon_v)\,(1 - z(\epsilon_v)) \tag{5.2b}$$

Balke hat in [4] gezeigt, daß der Integralausdruck von (5.1) unter Berücksichtigung von (5.2a) nur ein Funktional in $\underline{U}$ allein, d. h. unabhängig von $\underline{R}$ ist. Mit $\underline{U}$ wird der Rechts-Streck-Tensor bezeichnet. Zur Überführung von (5.1) in die Standardformulierung wird im weiteren die noch in der Gleichung enthaltene isotrope Verfestigung vernachlässigt, es wird nur der objektive Ausdruck für die kinematische Verfestigung benutzt. Dazu sind die in [5] aufgestellten Forderungen an die Funktion φ berücksichtigt worden. Um den Ansatz in Normalform zu bringen, muß die Funktion φ eine Exponentialreihe sein. Für die Verschiebung im Raum der Deviatorspannung ergibt sich dann aus (5.1) der Ausdruck

$$\underline{S}(\epsilon_v) = \frac{2}{3}\,\sigma_F\,\tilde{\underline{d}} + \underline{R}\sum_{n=0}^{N}\underline{A}_n^*\,\underline{R}^T \tag{5.3a}$$

mit den Abkürzungen

$$\underline{A}_n^* = \underline{R}^T\gamma\varphi_n\tilde{\underline{d}}\,\underline{R} - \int_0^{\epsilon_v}\gamma\varphi_n\exp(-\kappa_n(\epsilon_v-\bar{\epsilon}_v))\underline{D}^*d\bar{\epsilon}_v \tag{5.3b}$$

$$\gamma = \frac{2}{3}\,\frac{z(\epsilon_v)}{1-z(\epsilon_v)}\,\sigma_F(\epsilon_v) \tag{5.3c}$$

und der Funktion

$$\varphi = \sum_{n=0}^{N}\varphi_n\exp(-\kappa_n(\epsilon_v-\bar{\epsilon}_v)) \tag{5.3d}$$

Die Konstanten φ_n und κ_n werden dabei aus Experimenten gewonnen. Die Differentation von (5.3b) nach der Zeit und die anschließende Elimination des Integrals mit $\underline{A}_{nl}^*$ führt zu

$$\dot{\underline{A}}_n^* = \varphi_n(\gamma' + \kappa_n\gamma)\underline{d}^* - \kappa_n\underline{A}_{nl}^*\dot{\epsilon}_v \tag{5.4}$$

Unter Beachtung von (4.7) und (4.8) ergibt sich

$$\overset{z}{\underline{a}} = \varphi_n(\gamma' + \kappa_n\gamma)\underline{d} - \kappa_n\underline{a}_{nl}\dot{\epsilon}_v \tag{5.5}$$

Für $N = 0$ ist mit

$$\gamma = c\epsilon_v,\quad \varphi_o = 1 \quad\text{und}\quad \kappa_o = 0 \tag{5.6}$$

als Spezialfall natürlich auch die konstitutive Annahme nach Prager

$$\overset{z}{\underline{a}} = c\underline{d} \tag{5.7}$$

in (5.5) enthalten.

Um nun die materielle Ableitung im Koordinatensystem der Starrkörperdrehung (Z-Ableitung) mit dem definierten Variablenvorrat der Standardformulierung im konvektiven Koordinatensystem zu beschreiben, müssen die Drehterme durch diesen ersetzt werden. Eine drehfreie Tensorfunktion darf die Tensoren $\underline{R}$, $\underline{W}$, $\underline{\Omega}$ bzw. solche, die mit ihnen verbunden sind ($\underline{F}$ und $\underline{L}$) nicht enthalten. Es läßt sich zeigen, daß die Oldroyd-Ableitung des Links-Streck-Tensors eine drehfreie lineare Funktion der Deformationsgeschwindigkeit ist.

$$\underline{V}^{-1}\overset{\blacktriangle}{\underline{V}} + \overset{\blacktriangle}{\underline{V}}\underline{V}^{-1} = -2\underline{d} \tag{5.8}$$

Die Z-Ableitung eines Tensors ist eine Linearkombination aus einer Oldroyd-Ableitung und einer drehfreien linearen Funktion der Oldroyd-Ableitung des Links-Streck-Tensors. Damit ergibt sich für (4.3)

$$\overset{z}{\underline{a}} = \overset{\blacktriangle}{\underline{a}} - \underline{a}\,\underline{V}^{-1}\overset{\blacktriangle}{\underline{V}} - \overset{\blacktriangle}{\underline{V}}\underline{V}^{-1}\underline{a} \tag{5.9}$$

Die Standardformulierung verlangt von den internen Parametern, daß sie sich nur während des plastischen Fließens ändern. Mit der konstitutiven Annahme

$$\underline{V}^{pl} = \underline{V} \tag{5.10}$$

wird diese Forderung erfüllt. Somit gilt für (5.5)

$$\overset{\blacktriangle}{\underline{a}}_n = \varphi_n(\gamma' + \kappa_n\gamma)\underline{d} - \kappa_n\underline{a}_{nl}\dot{\epsilon}_v + \underline{a}_n\underline{V}^{-1}\overset{\blacktriangle}{\underline{V}} + \overset{\blacktriangle}{\underline{V}}\underline{V}^{-1}\underline{a}_n \tag{5.11}$$

Zur weiteren Aufbereitung der Gleichungen werden die Vergleichsdehnung und der plastische Anteil des Links-Streck-Tensors in den Satz der internen Variablen aufgenommen. Die Vergleichsdehnung wird dabei aus der 2. Invarianten der plastischen Deformationsgeschwindigkeit gemäß

$$\dot{\epsilon}_v = \sqrt{\frac{2}{3}\, d^{pl\,\alpha}_{\;\;\beta}\, d^{pl\,\beta}_{\;\;\alpha}} \tag{5.12}$$

berechnet. Mit dem assoziierten Fließgesetz (3.5) folgt für

$$h_1 = \epsilon_v \tag{5.13}$$

die Normalform

$$\dot{h}_1 = q_1\, \dot{\lambda} \tag{5.14}$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\, \Phi^{\alpha}_{\beta}\, \Phi^{\beta}_{\alpha}}\; \dot{\lambda}$$

Mit (5.8) wird in Tensorkoordinaten zur kovarianten Basis ein Tensor 4. Stufe definiert.

$$(\overset{-1}{V}_{\kappa\alpha} g_{\beta\Gamma} + g_{\kappa\alpha} \overset{-1}{V}_{\beta\Gamma})\, P^{\alpha\beta\mu\pi} = \delta^{\mu}_{\kappa}\, \delta^{\pi}_{\Gamma} \tag{5.15}$$

Damit läßt sich $\underline{V}^{pl}$ unter Beachtung von (4.6) bestimmen.

$$\dot{V}^{pl\,\alpha\beta} = -2P^{\alpha\beta\mu\kappa} d^{pl}_{\mu\kappa} \tag{5.16}$$

Unter nochmaliger Verwendung von (3.5) wird für

$$\underline{h}_2 = \underline{V}^{pl} \tag{5.17}$$

wieder die Normalform aufgestellt.

$$\dot{\underline{h}}_2 = \underline{q}_2\, \dot{\lambda}$$

$$h^{\alpha\beta}_2 = -2P^{\alpha\beta\mu\kappa}\, \Phi_{\mu\kappa}\, \dot{\lambda} \tag{5.18}$$

Die Gleichung (5.11) erhält mit den getroffenen Vereinbarungen und unter Beachtung der Normalenregel (3.5) die gewünschte Form

$$\begin{aligned} \dot{a}^{\mu\kappa}_{n} = {} & (\varphi_n(\gamma' + \kappa_n \gamma)\Phi^{\mu\kappa} - \kappa_n a^{\mu\kappa}_{nl}\, q_1 + \\ & + a^{\mu\alpha}_{n} \overset{-1}{V}{}^{pl}_{\alpha\beta}\, q^{\beta\kappa}_2 + q^{\mu\kappa}_2 \overset{-1}{V}{}^{pl}_{\alpha\beta}\, a^{\beta\kappa}_{n})\, \dot{\lambda} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \underline{h}_3 &= \underline{a}_n \\ \dot{h}^{\alpha\beta}_3 &= q^{\alpha\beta}_{3n}\, \dot{\lambda} \end{aligned} \tag{5.20}$$

Die kontravarianten Koordinaten des Verschiebungstensors $a^{\mu\kappa}_n$ werden als Spaltenmatrix im Programm NIMAG abgespeichert. Der Vektor $\underline{h}_3$ hat also in Abhängigkeit der benutzten Anzahl von Reihengliedern N im Ansatz (5.3b) einen um z (N+1) größeren Speicherplatzbedarf als der Spannungs- bzw. Verzerrungsvektor (im räumlichen Fall z = 6). Der Formelsatz wird durch die Angabe des Verfestigungsparameters

$$V = 3J\, q_{\alpha\beta 3n}(S^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta}) \tag{5.21}$$

vervollständigt. Der Tensor $\underline{V}^{pl}$ kann andererseits auch aus der isotropen Tensorfunktion des Eulerschen Verzerrungstensors bestimmt werden. Dazu sind aber statt der konstitutiven Annahme (5.10) neue Bedingungen für die Dekomposition des Deformationsgradienten notwendig. In [13], [15] wird mit der multiplikativen Zerlegung gearbeitet. Die Entscheidung wird letztlich durch den numerischen Aufwand getroffen.

6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß auch die Z-Geschwindigkeit mit der Standardformulierung in konvektiver Metrik erfaßt werden kann. Diese Eigenschaft teilt sie mit allen bisher untersuchten objektiven Geschwindigkeiten. Die Z-Geschwindigkeit ergab sich aus der speziellen konstitutiven Annahme von Backhaus (4.7). Mit (4.9) kann dagegen die arbeitskonjugierte Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit erzielt werden, die ebenfalls beim einfachen Schub und kinematischer Verfestigung z. B. nach Prager zu nichtoszillierenden Lösungen führt. Welche der beiden konstitutiven Annahmen geeigneter ist, kann letztlich nur durch einen Vergleich mit dem Experiment entschieden werden. Dabei führen alle Ansätze nach Prager bei kleinen Verzerrungen zu gleichen Ergebnissen, jedoch treten schon bei infinitesimalen Verzerrungen Abweichungen zum Experiment auf. Eine bessere Übereinstimmung kann mit dem Ansatz von Backhaus (5.1) erzielt werden, der eine genauere Erfassung des Bauschinger-Effektes ermöglicht.

Mit der Überführung dieses komplizierten Ansatzes in die Standardformulierung wurde die numerische Austestung dieses Deformationsgesetzes vorbereitet. Die Testrechnung erfolgt mit dem Programm NIMAG [7] losgelöst vom Feldproblem am homogenen Probekörper. Nach der Testphase können die fertigen Materialunterprogramme an solche Feldprogramme übergeben werden, in denen die Standardform implementiert ist (z. B. NISCHA82, FEMA). Die große Einsparung von Rechenzeit und Ingenieurarbeit bei der einmaligen Aufstellung des Unterprogrammsatzes ist offensichtlich. Die Art der Aufgabenstellung entscheidet, ob der hohe Rechenzeitaufwand, hervorgerufen durch den komplizierten Ansatz, im speziellen Fall gerechtfertigt ist. Bei monotonen Belastungsvorgängen wird die isotrope Verfestigung meist eine ausreichende Näherung sein. Lastzyklen hingegen verlangen die Modellierung des kinematischen Verhaltens.

Anmerkung

Um die Gleichung (5.3b) in eine differentielle Form zu überführen, mußte ein Differentialoperator vom Jaumann-Typ aufbereitet werden. Da bei Manuskripterstellung die aktuelle Arbeit von Backhaus [16] noch nicht vorlag, soll der Vergleich der beiden unterschiedlichen

Vorgehensweisen angefügt werden. Backhaus verwendet in [16] den Jaumann-Operator und erhält in Gleichung (5.4) ein Zusatzterm in Abhängigkeit der Differenz der Drehgeschwindigkeiten der Hauptachsen von $\underline{d}$ und der Drehgeschwindigkeit der Starrkörperrotation. In der vorliegenden Arbeit wurde dagegen der Green-Naghdi-Operator verwendet. Dieser eignet sich auf Grund seiner Definition (4.8) besser für die Betrachtung im Koordinatensystem, welches an die Starrkörperdrehung gebunden ist. Damit wird die partielle Integration der Gleichung (5.3b) analog zu den Arbeiten [3] und [5] ermöglicht. Im Ergebnis wird eine Gleichung hergeleitet, die ohne den von Backhaus erhaltenen Zusatzterm auskommt. Sie ist damit kompakt und anwendungsfreundlich. Die Differenz zwischen beiden Formulierungen kann in reiner Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit dargestellt und damit durch die Materialfunktionen (5.3c) und (5.3d) erfaßt werden.

LITERATUR

[1] Atluri, S. N.: On Constitutive Relations at Finite Strain: Hypo-Elasticity and Elasto-Plasticity with Isotropic or Kinematic Hardening, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 43(1984), S. 137 – 171.

[2] Backhaus, G.: Ein objektives Stoffgesetz des plastischen Materialverhaltens, ZAMM 65(1985)11, S. 525 – 535.

[3] Backhaus, G.: Deformationsgesetze, Akademie-Verlag, Berlin 1983.

[4] Balke, H.: Anisotropie bei großen Verformungen, Problemseminar „Plastizitätstheorie III" der TU Dresden, Altenberg 1986.

[5] Bergander, H.: Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung, ZAMM 60(1980), S. 509 – 519.

[6] Bergander, H.: Vergleich der Grundgleichungen der nichtlinearen Konstinuumsmechanik fester Körper in verschiedenen Bezugssystemen, Technische Mechanik 8(1987)3, S. 30 – 37.

[7] Bergander, H.: Deformationsgesetze der Standardform in konvektiver Metrik, Technische Mechanik 8(1987)2, S. 31 – 40.

[8] Bergander, H.: Kontinuumsmechanik, Karl-Marx-Stadt 1987.

[9] Dafalias, Y. F.: Corotational Rates for Kinematic Hardening at Large Plastic Deformations, Jour. of Appl. Mech., 50(1983), S. 561 – 565.

[10] Dafalias, Y. F.: The Plastic Spin, Jour. of Appl. Mech., 52(1985), S. 865 – 871.

[11] Dienes, J. K.: On the Analysis of Rotation and Stress Rate in Deforming Bodies, Acta Mechanica 32, S. 217 – 232.

[12] Dubey, R. N.: Co-Rotational Rates on Principal Axes, SM Archives 10(1985), S. 245 – 255.

[13] Haupt, P. and Tsakmakis, Ch.: On Kinematic Hardening and Large Plastic Deformations, Int. Jour. of Plast., Vol. 2(1986), S. 279 – 293.

[14] Truesdell, C.: The Elements of Continuum Meohanics, Springer Verlag, 1985.

[15] Metzger, D. R. and Dubey, R. N.: Corotational Rates in Constitutive Modeling of Elastic-Plastic-Deformation, Int. Jour. of Plast., Vol. 4(1987), S. 341 – 368.

[16] Backhaus, G.: On the Analysis of Kinematic Hardening at Large Plastic Deformations, Acta Mechanica 75(1988), S. 133 – 151.

Anschrift des Verfassers:
Dipl.-Ing. Uwe Knauer
Technische Universität Karl-Marx-Stadt
Sektion Maschinen-Bauelemente
PSF 964
Karl-Marx-Stadt
9010