Festigkeitsmäßige Dimensionierung von Siebkorbfiltergehäusen unter Einbeziehung des Programmsystems COSAR

Uwe Krieg, Eckart Weiß, Dietmar Strumpf

0. Einleitung

Mit einer materialökonomischen Zielstellung war das Erzeugnissortiment Siebkorbfilter festigkeitsmäßig zu untersuchen.

Siebkorbfilter (Bild 1) werden zur Eliminierung von Feststoffpartikeln in Rohrleitungen eingebaut. Der Einsatz erfolgt in der chemischen und Lebensmittelindustrie sowie vor Flüssigkeitsmengenzählern (u. a. Wasserzähler). Aufgrund der Aggressivität sehr vieler Flüssigkeiten kommt überwiegend der hochwertige Werkstoff GS-X12CrNiMoTi18.10 zum Einsatz. Als Betriebsparameter werden Drücke von 1,6 und 4,0 MPa sowie Temperaturen von maximal 150 °C gefordert.



Bild 1

Prinzipskizze eines Siebkorbfilters in Gußausführung

1. Lösungsweg

Das Siebkorbfiltergehäuse ist aus praktischen Erwägungen heraus durch folgende Besonderheiten gekennzeichnet:

- Ein- und Austrittsstutzen sind in der Rohrachse angeordnet,
- Deckel und Gehäuse sind so konstruiert, daß der Filtereinsatz problemlos zur Reinigung entfernt werden kann,

 Abmessungen sind bestimmt durch den Volumenstrom, Aufnahmefähigkeit des Filters und seine Durchlaßfähigkeit im beladenen Zustand.

Die genannten Forderungen bestimmten die Formgebung der Gußkonstruktion.

Aufgrund der Stutzenanordnung ist die Geometrie für die Festigkeitsberechnung als kompliziert einzuordnen.

Folgender Lösungsweg ist beschritten worden:

- Verformungs- und Spannungsanalyse mit dem Programmsystem COSAR für den Ist-Zustand zur Lokalisierung von Beanspruchungsspitzen für Deckel und Gehäuse. Erstellung einer beanspruchungsgerechteren und materialökonomischen Konstruktion.
- Kontrollrechnungen auf der Grundlage von bauelementspezifischen Berechnungsmodellen für den Tragfähigkeitsnachweis in Anlehnung an TGL 32903 [3], dem gültigen Regelwerk für Behälter und Apparate.

Als maßgebende Belastungszustände wurden ein Betriebsdruck von 4,0 MPa bei einer Betriebstemperatur von 150 °C sowie ein Prüfzustand von p = 6,0 MPa bei 20 °C zugrunde gelegt.

Um den materialökonomischen Forderungen gerecht zu werden, wurde von der bisherigen Konzeption, d. h. einer konstanten Wanddicke, dahingehend abgewichen, daß die Wanddicken weitgehend der Beanspruchung angepaßt wurden.

2. Festigkeitsberechnung mit dem Programmsystem COSAR

Die Ermittlung des Verformungs- und Spannungszustandes für den Deckel und das Gehäuse des Siebkorbfilters wurde unter Nutzung der elastostatischen Version des Finite-Elemente-Programmsystems COSAR auf einem ESER-Rechner vom Typ EC 1056 durchgeführt. Die Dateneingabe und -korrektur erfolgte mit dem Programmier- und Testsystem des Großrechners über Bildschirm. Die rechenzeitintensiven Arbeitsschritte wurden im Stapelbetrieb realisiert.

2.1. Deckel

Der Deckel wurde zuerst mit dem vom Hersteller angegebenen Geometrie untersucht. Bei Vernachlässigung der Flanschschraubenlöcher ist dieses Bauteil rotationssymmetrisch. Dadurch konnte ein zweidimensionales Berechnungsmodell verwendet werden. Die lokale Verschwächung durch die Schraubenlöcher besitzt nach [15] keinen entscheidenden Einfluß auf die Tragfähigkeit des Bauteils. Das Bild 2a zeigt die gewählte Vernetzung. Die Unterteilung in die Finiten Elemente erfolgte unter Nutzung von 2 Standardstrukturen (Typ 902 bzw. 970), die durch eine entsprechende Hyperstruktur miteinander verbunden wurden. Insgesamt kamen 49 Elemente mit 183 Knoten zum Einsatz. Bei der Vernetzung wurden die Bereiche, in denen Spannungsspitzen zu erwarten waren, entsprechend feiner unterteilt.

Folgende Randbedingungen sind berücksichtigt (siehe Bild 2a):

- Verhinderung der Verschiebung senkrecht zur Mittellinie,
- Verhinderung der Starrkörperbewegung mit einem entsprechenden Loslager im Bereich des mittleren Dichtungsdurchmessers.

Die Belastung des Deckels erfolgte durch den inneren Überdruck p und die erforderliche Schraubenkraft F_S . Die verschiedenen Lastfälle wurden in einem Rechnerlauf abgearbeitet. Für eine vollständige Spannungsberechnung war eine CPU-Zeit von 4.35 min, erforderlich.

In den Bildern 2b und 2c sind für den Betriebsdruck von 4 MPa die Ergebnisse der Verformungs- und Spannungsberechnung grafisch dargestellt. Bei der Auswertung der Berechnungsergebnisse wurde die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese verwendet. Im Bereich des Deckelmittelteiles kommt es zur Ausbildung einer gleichmäßigen Spannung, die in Richtung Flansch kontinuierlich ansteigt. Im Übergangsradius zum Flanschteller tritt eine Spannungspitze von 354 MPa auf. Damit ist die höchstbeanspruchte Stelle des Deckels lokalisiert. Das Niveau der Vergleichsspannungen ist im erweiterten Flanschbereich so hoch ($\sigma_V > 3$ [σ]), daß ein Versagen des Bauteiles für den untersuchten Belastungszustand zu erwarten ist.

Auf der Grundlage der Berechnungsresultate erfolgte die Entwicklung einer optimierten Deckelgeometrie (Bild 3a). Dabei wurden die folgenden Aspekte berücksichtigt:

- Abbau der Spannungsspitze durch einen entsprechenden Übergang zum Flanschteller.
- Verringerung des Spannungsniveaus im Flansehbereich durch eine entsprechende Verstärkung (z. B. Vergrößerung der Höhe des Flanschtellers von 18 auf 31 mm). Damit wird gleichzeitig die Steifigkeit des Flanschtellers erhöht, die außerdem die Dichtwirkung wesentlich verbessert.
- Erreichen einer möglichst gleichmäßigen Auslastung des gesamten Deckels unter Betriebsbedingungen durch Reduzierung der Wandstärke im Mittelteil von 15 auf 7,5 mm.

Die Substrukturierung der optimierten Deckelgeometrie erfolgte mit den gleichen Teilstrukturen wie im Originalzustand.

Für den Strukturtyp 902 konnte die Topologie übernommen werden. Alle anderen Eingabewerte des Vernetzungsmodelles wurden geändert. Für die Modellierung wurden insgesamt 47 Elemente mit 185 Knoten verwendet.

Die Bilder 3b und 3c stellen die Berechnungsresultate für den Betriebszustand dar. Der optimierte Deckel zeigt ein deutlich steiferes Verhalten als die Ausgangsgeometrie. Die Formänderungen haben sich wesent-





Bild 2 Deckel im Originalzustand



lich verringert. So wurden die Verschiebungen um ca. 80 % gegenüber dem Ausgangszustand verkleinert.

Der Verlauf der Vergleichsspannungen ist über dem gesamten Bauteil gleichmäßig. Die größte Vergleichsspannung beträgt 85 MPa und tritt im Übergang zum Flanschteller auf. Sie ist nicht in Form einer Spannungsspitze vorhanden. Die übrigen Spannungen auf der Außenkontur liegen im Bereich von 60 MPa.

Am Lochkreisdurchmesser des Flansches kommt es zur Ausbildung einer Störung im Spannungsverlauf, die auf die Einleitung der Schraubenkraft zurückzuführen ist. Mit den dargestellten Berechnungsergebnissen ergibt sich für den gesamten Deckel eine nahezu konstante Auslastung.

Als Qualitätsmaßstab zum Abschätzen der Genauigkeit der mit der Methode der finiten Elemente näherungsweise ermittelten Spannungswerte wird die in [16] definierte Klaffung verwendet.

$$F_{\sigma} = \frac{|\Delta \sigma_{ij}| \max}{|\overline{\sigma}_{ij}| \max} \cdot 100 \, (\%) \tag{1}$$

 F_{σ}

 Klaffung (Fehler der berechneten Spannungskomponente)

 $|\Delta \sigma_{ij}|_{max}$ – maximale Spannungsdifferenz an einem Knoten

 $|\overline{\sigma}_{ij}|_{max}$ größter gemittelter Spannungswert der Gesamtstruktur

Für den Betriebszustand des Originaldeckels ergibt sich nach der obigen Beziehung ein maximaler Fehler der Spannungen von 4,5 %.

2.2. Gehäuse

Das Siebkorbfiltergehäuse ist einfach symmetrisch, so daß für die dreidimensionale FE-Untersuchung die Modellierung einer Hälfte ausreicht. Bei der Vernetzung wurden die folgenden geometrischen Vereinfachungen vorgenommen, um den Aufwand für die Datenerfassung zu senken:





Tabelle	1			
Vernetz	ungsparameter	des	Gehäuses	

Struktur Nr.	Struktur- typ	Anzahl der Elemente	Anzahl der lokalen Knoten	Anzahl der externen Knoten
1	803	40	305	43
2	105	24	140	86
3	105	24	138	83
4	803	72	450	87
5	105	18	141	33
6	105	18	141	33
7	100	30	202	66
8	0	10	20	78
9	803	10	17	96
10	100	24	155	66
11	0	46	228	105
12	105	20	98	90
13	0	41	221	101
14 (H)	0	13	4'73	_

Flanschschraubenlöcher wurden nicht modelliert.

- Vernachlässigung der Halterung für den Filter,

- Vereinfachung der Geometrien der Stutzen.

Bei der Zerlegung des Gehäuses in Substrukturen konnten größtenteils Standardstrukturen genutzt werden. Nur im Bereich der Stutzen mußten Nicht-Standardstrukturen Verwendung finden' (Bild 4). Die Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Aufteilung der Teilstrukturen in die einzelnen Elemente und Knoten.

Für die Modellierung des Gehäuses wurden 377 Vollkörperelemente mit insgesamt 2256 Knoten eingesetzt. Im Bild 5 ist die vollständige Vernetzung als Glaskörpermodell dargestellt.

Die Datenermittlung, Eingabe und Kontrolle war aufgrund der komplizierten Geometrie sehr arbeitszeitaufwendig.

Die verschiedenen Lastfälle für die Festigkeitsberechnung wurden zu einer COSAR-Rechnung zusammengefaßt. Dabei kamen die folgenden Lastarten zur Anwendung:

- Innendruck als gleichmäßig verteilte Flächenlast auf der gesamten Innenkontur des Gehäuses und bis zum mittleren Dichtungsdurchmesser der Stutzen wirkend,
- erforderliche Schraubenkräfte als konstante Linienlasten über den Lochkreisdurchmessern der beiden Anschlußflansche und des Deckelflansches,
- Dichtungskräfte als konstante Linienlasten über den mittleren Dichtungsdurchmessern des Eintrittsstutzens und des Deckelflansches.

Im Bereich des mittleren Dichtungsdurchmessers des Austrittsstutzens wurde zur Verhinderung einer Starrkörperbewegung in x1-Richtung eine entsprechende Lagerung angebracht. Die Starrkörperbewegung in x3-Richtung wurde durch 3 Loslager in der Mitte des Austrittsstutzens unterbunden. Zur Realisierung der Symmetrierandbedingungen erfolgte in der Schnittfläche des Gehäuses die Verhinderung der Verschiebungen in x2-Richtung.

In der Tabelle 2 sind die Rechenzeiten für die wesentlichen Arbeitsschritte der COSAR-Rechnung enthalten.



Bild 5 Vernetzungsmodell

Tabelle 2

Zusammenstellung der Rechenzeiten

Arbeitsschritt	CPU-Zeit [min]	
1. Vollständige Datengenerierung	35	
2. Grafische Darstellung der Gesamtvernetzung	108	
3. FE-Rechnung	428	
Gesamt:	571	

Die FE-Rechnung wurde wegen des großen Rechenzeitbedarfes in mehreren Etappen durchgeführt. Als Externspeicherplatz waren 58 MByte notwendig.

Das Siebkorbfiltergehäuse zeigt für alle Berechnungszustände ein Beanspruchungsverhalten, das die zulässigen Größen wesentlich unterschreitet. Im Durchdringungsbereich treten lokale Spannungsspitzen auf, die jedoch schnell abklingen und nicht zu einem Versagen des Gehäuses führen.

Im Bereich des Bodens und in der Zylinderschale prägt sich ein gleichmäßiger Spannungsverlauf aus, der zu einer etwa 60 %igen Auslastung des Bauteiles im kritischsten Beanspruchungszustand führt. Damit ist in diesem Bereich eine Verminderung der Wandstärke möglich.

3. Bauelementspezifische Tragfähigkeitsnachweise

Die Tragfähigkeitsnachweise wurden nach TGL 32903 [3] durchgeführt. Diese TGL gilt für Chemieausrüstungen und Druckgefäße gemäß TGL 30330 [7]. Die Nachweise sind für den Montage-, Prüf- und Betriebszustand zu führen und basieren auf Traglastberechnungen. Die materialspezifische, temperaturabhängige und traglastbestimmende Berechnungsgröße $[\sigma]$ wird wie folgt ermittelt:

$$[\sigma] = \eta \cdot \operatorname{Min.} \left\{ \frac{\operatorname{R}_{e} \operatorname{od.} \operatorname{R}_{p0,2}}{\operatorname{n}_{T}}; \frac{\operatorname{R}_{m}}{\operatorname{n}_{B}} \right\} .$$
(2)

Die Größe $[\sigma]$ hat den Charakter der herkömmlichen zulässigen Spannung. Sie ist bei Traglastberechnungen nicht als solche zu verstehen, weil im Bauteil Spannungen vorliegen können, die größer sind als $[\sigma]$. Weiterhin bedeuten:

$$\eta$$
 – Korrekturbeiwert für den Werkstoff
0,7 (Guß) $\leq \eta \leq 1$ (Walzstahl)

n_T=1,5 – Sicherheitsabstand gegen die Streckgrenze

Für den Prüf- und Montagezustand gilt $[\sigma] = \frac{R_e \text{ od. } R_{p0,2}}{1,1}$



Bild 6

Modelle und Ergebnisse für den Tragfähigkeitsnachweis nach [3], Belastung: pp = 6,0 MPa, ϑ = 20 °C, pB = 4,0 MPa, ϑ = 150 °C Die Berechnungen sind Nachrechnungen einer vorher fixierten Konstruktion. Sie werden hinsichtlich zulässiger Belastungen und des Auslastungsgrades

$$\emptyset = \frac{\text{vorhandene Belastung}}{\text{zulässige Belastung}} = \frac{B}{[B]}$$
(3)

ausgewertet. Die Berechnung erfolgte mit Hilfe des Programmsystems EPF [5].

Bild 6 zeigt die Zerlegung des kompletten Apparates in Teilmodelle und die Ergebnisse sowohl für die bisherige Konstruktion mit der dominierenden Wanddicke für das Gehäuse $s_1 = 12$ mm als auch für den Konstruktionsvorschlag mit $s_2 = 8,5$ mm bzw. $s_1 = 15$ mm und $s_2 =$ 7,5 mm für den Deckel. Die Berechnung berücksichtigt eine gußtechnisch bedingte Minustoleranz von 1,5 mm.

Auffallend ist die Überbeanspruchung der Deckelkonstruktion und die ungenügende Auslastung der übrigen Bereiche für die bisherige Konstruktion, was mit den Ergebnissen der FE-Rechnung übereinstimmt. Mit dem Konstruktionsvorschlag wird eine wesentlich höhere Materialauslastung erreicht.

4. Bewertung der Ergebnisse

Die TGL 32903 schreibt für die festigkeitsmäßige Dimensionierung den Tragfähigkeitsnachweis für statische Lasten und den Ermüdungsfestigkeitsnachweis für zeitlich veränderliche bzw. zyklische Lasten vor.

Der Tragfähigkeitsnachweis wird bauelementspezifisch durchgeführt und beruht in der Regel auf Traglastberechnungen. Bei geometrisch komplizierten Gebilden, wie im vorliegenden Fall für den Durchdringungsbereich und den Deckel, ist diese Vorgehensweise nur mit erheblichen Modellvereinfachungen möglich und nicht voll aussagefähig. Aus diesem Grunde wurde die FE-Rechnung durchgeführt.

Die FEM (COSAR 84) wiederum basiert größtenteils auf der Elastizitätstheorie, was im Bereich von Kerben und Singularitäten zu Beanspruchungsspitzen führt, die sich bei Überschreiten der Streckgrenze aufgrund des plastischen Verformungsvermögens praktisch nicht ausbilden können. Überelastische Beanspruchungen in diesem Sinne sind wegen ihres lokalen Charakters meist selbstbegrenzend und im bestimmten Umfang für das Bauteil ertragbar.

Die Ergebnisse der Beanspruchungsberechnung sind deshalb zu bewerten. Bezüglich der Bewertung bieten sich folgende Möglichkeiten an:

4.1. Bewertung nach Spannungskategorien

Im Zusammenhang mit FE-Rechnungen wird bei der Bewertung der Spannungen im allgemeinen auf das Bemessungskonzept nach dem ASME-Code [8] zurückgegriffen, dem eine Bewertung nach Spannungskategorien zugrunde liegt (Bild 7). Diese Methode ist als Näherungsverfahren anzuschen, das es gestattet, elastoplastische Werkstoffkriterien auf eine elastizitätstheoretische Spannungsanalyse anzuwenden. Die Methode macht eine eindeutige Zuordnung von Spannungskomponenten in die einzelnen Kategorien erforderlich, was bei FEM-Rechnungen nicht ganz problemlos ist.

kate- gorien	allgern. Mernbran Spannung.	lokale Membran Spannung	Biege- spannun- gen	lokalwirken de Membrar -u.Biegespan	Spannungs konzentra- tion
Kennzeich er Belastung Beispiel	•6;=f(z)=konst •mech. Last •Schale unter Innendrud	• Gij-f(z)-kanst (Makrokerben) •mech Last • Schale / Ring	• 65= <u>Mb</u> · z • mech.Last • Platte u.a.	Selbstbegren - zend mech.Last Schale (Ring Schale (Stutzen	-Spannungs- spitze •mech. Last •Δ&f(x,y,z) •Mikro- kerbe
symbol	Pm	PL	Pb	Q	F
	Pm=S			Prop.	
		P(Pm)+Pb	23	P_(Pm)+P_b+Q	<u>+</u> 35,

Bild 7

Beanspruchungsbewertung nach Spannungskategorien

Die Berücksichtigung der mittragenden Wirkung für lokale Membranspannungen und des Selbstbegrenzungseffektes bei lokalen plastischen Verformungen sowie der Außerachtlassung der Spannungskonzentration für den Tragfähigkeitsnachweis stimmen mit den Erfahrungen überein. Die Begrenzung für die als mittragend angenommenen Bereiche ist als konservativ zu bezeichnen

 $(P_L > 1,1 S_m \text{ für } 0,5 \sqrt{R \cdot s}).$

Gefährdungen können sich für derartige Konstruktionen aus zyklischen Beanspruchungen ergeben, deshalb ist in diesen Fällen ein alle Beanspruchungen erfassender Ermüdungsfestigkeitsnachweis zu führen.

4.2. Ermittlung realer Dehnungswerte

In der Beurteilung von überelastischen Beanspruchungen im Bereich von Kerben wird unter Anwendung verschiedener Hypothesen versucht, vom fiktiven elastischen Berechnungszustand auf reale Verzerrungswerte zu schließen. Die Ansätze lassen sich auf die allgemeine Gleichung

$$\epsilon_{\text{vreal}} = \frac{\sigma_{\text{v}}}{E} \cdot \mathbf{f}_{\text{p}} \leq [\epsilon]$$
(4)

bringen, wobei der Korrekturfaktor f_p durch komplizierte funktionelle Zusammenhänge gekennzeichnet ist.

$$f_{p} = f$$

$$F_{$$

Ansätze für f_p resultieren aus empirischen Ansätzen (u. a. [12], [13]), aus energetischen Betrachtungen [9] und aus Überlegungen zur strukturbedingten Stützwirkung [2]. Diese Betrachtungsweisen konzentrieren sich stark auf Kerben im Sinne der Kerbspannungslehre. Für die globalen Bewertungen von Kerbspannungen sind die Methoden bisher zu ungenau.

4.3. Bewertung auf der Basis mittragender Querschnitte

Eine solide und eine mit den Erfahrungen übereinstimmende Basis bei der Tragfähigkeitsbewertung ist gegeben, wenn man die mittragende Wirkung geringer beanspruchter Einflußzonen einbezieht [14]. Die konkrete Festlegung derartiger mittragender Breiten ist problematisch sowie geometrie- und werkstoffabhängig.

Zusammenfassend muß festgestellt werden, daß es generelle Richtlinien für die Beurteilung von Ergebnissen der FE-Berechnung hinsichtlich Tragfähigkeit nicht gibt. Der Ingenieur hat hier verantwortungsbewußt und materialökonomisch zu entscheiden, wobei er sich an den positiven Erfahrungen, die auf der Basis der Traglasttheorie gemacht wurden, zu orientieren hat. Kriterien zur Bewertung müssen zukünftig bereitgestellt werden.

5. Zusammenfassung

Anforderungen der Praxis machten die Beanspruchungsanalyse von Siebkorbfiltern, einer vielfach eingesetzten Rohrleitungsausrüstung, erforderlich.

Der in dieser Arbeit beschrittene Weg FE-Rechnung, formale Bewertung, konstruktive Konsequenzen und Tragfähigkeitsberechnungen auf der Grundlage der Traglast hat sich bewährt. Das Programmsystem COSAR erwies sich hierbei als zuverlässiges Instrumentarium. Die Ergebnisse gestatten konstruktive Konsequenzen, die zu Materialeinsparungen von ca. 30 % an hochlegiertem CrNiMo-Stahlguß führen.

LITERATUR

- Nutzerhandbuch COSAR/84. TH Magdeburg, Methodisch-Diagnostisches Zentrum "Finite Elemente", 1985.
- [2] Richtlinienkatalog. Festigkeitsberechnungen Behälter und Apparate; Teil 1 bis 6, VEB KCA Dresden.
- [3] TGL 32903. Behälter und Apparate, Festigkeitsberechnungen.
- [4] Weiß, E.; Strumpf, D.: Beitrag zur Ergebnisbewertung bei der Anwendung numerischer Methoden in der Festigkeitsberechnung.
 7. Fachtagung "Fortschritte bei der Konstruktion und Berechnung von Ausrüstungen des Chemieanlagenbaus", Magdeburg 1987.
- [5] Einheitliches Programmsystem Festigkeitsberechnungen (EPF). Programmdokumentation Teil 1 – 3, Berechnungen nach TGL 32903. VEB KCA Dresden.
- [6] TGL 22160. Rohrleitungen aus Stahl, Festigkeitsberechnungen.
- [7] TGL 30330. Gesundheits- und Arbeitsschutz, Druckgefäße.
- [8] ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section III 1965, Section VIII, 1971.
- [9] Kühnapfel, K.-F.: Kerbdehnungen und Kerbspannungen bei elastoplastischer Beanspruchung, rechnerischer Ermittlung, Vergleich mit Versuchsergebnissen. Diss., RWTH Aachen, 1976.
- [10] Neuber, H.: Kerbspannungslehre, Akademie-Verlag Berlin 1985.
- [11] Gabbert, U.; Berger, H.: Universelles FEM-System CO-SAR – Erfahrungen bei der industriellen Applikation. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 30 (1986) 7, S. 90 – 101.
- [12] Neuber, H.: Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen.

- [13] Hoffmann, M.; Seeger, T.: Mehrachsige Kerbbeanspruchungen bei proportionaler Belastung. Konstruktion 38 (1986) 2, S. 63 - 70.
- [14] Strumpf, D.; Weiß, E.: Bericht über Berstversuche an Schiebergehäusen PN 40, DN 100. TU Magdeburg, Sektion Apparate- und Anlagenbau, 1987, unveröff.
- [15] Steimel, J.: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Verformungen, Spannungen und Dehnungen in Rohrund Apparateflanschen, entwickelt mit der Methode der Finite Elemente. Dissertation, TH Darmstadt, 1980.
- [16] Schnack, E.: Beitrag zur Berechnung rotationssymmetrischer Spannungskonzentrationsprobleme mit der Methode der Finiten Elemente. Dissertation, TU München, 1973.