

# Zur mathematischen Modellierung turbulenter Strömungen bei kleiner Reynoldszahl

Jochen Brechling

## 0. Einleitung

Die Erkenntnis, daß die turbulente Strömungsform infolge einer bei bestimmten kritischen Reynoldszahlen auftretenden Instabilität der laminaren Strömungsform auftritt, ist etwa 100 Jahre alt.

An der theoretischen Begründung dieser zunächst nur vermuteten Ursache ist mehrere Jahrzehnte gearbeitet worden. Während die Stabilität gegen kleine Störungen seit langem als geklärt angesehen werden kann, trifft das für den Umschlag zu turbulenten Strömungen und ausgebildete turbulente Strömungen nicht zu.

Eine zusammenfassende Übersicht zum gegenwärtigen Bearbeitungsstand, vor allem des Übergangs laminar-turbulent wird in [8] gegeben. Die in [8] zitierten Untersuchungen verwenden zumindest zur Darstellung der Ergebnisse vielfach solche Ausdrucksmittel wie Wirbelfäden und Turbulenzflecken. Diese Begriffe stehen einer mathematischen Modellierung des Strömungsfeldes dadurch im Wege, daß diese stets den gesamten Raum der Strömung erfassen und das Feld durch kontinuierliche Funktionen ausdrücken muß.

In diesem Aufsatz sollen Gedanken zur mathematischen Modellierung einiger Einzelheiten turbulenter Strömungen bei Reynoldszahlen in der Nähe der kritischen Reynoldszahl diskutiert und rechnerisch bewertet werden. Diese Modelle verwenden zur Entwicklung der Strömungselemente in Abhängigkeit von den wandparallelen Koordinaten stets Fourieransätze, die die obige Forderung erfüllen. Es ist unstrittig, daß solche Ansätze bei Mitnahme hinreichend vieler Fourierglieder auch die Darstellung örtlich stark veränderlicher Details zulassen. Die angedeutete Beschränkung der Reynoldszahlen soll so verstanden werden, daß dieser Bereich mit den durch die verfügbare Rechentechnik naturgemäß begrenzten Möglichkeiten noch am ehesten brauchbare Ergebnisse erwarten läßt.

## 1. Bezeichnungen

- x — Kartesische Koordinate in Hauptströmungsrichtung
- y — Kartesische Koordinate normal zur Hauptströmungsrichtung und zur Wand
- z — Kartesische Koordinate normal zur Hauptströmungsrichtung, parallel zur Wand
- $\xi$  — „mitlaufende“ x-Koordinate, in der die Strömung quasistationär wird,  
 $\xi = \alpha x - \beta t$

- $c_x, c_y, c_z$  — Geschwindigkeitskomponenten in angegebener Richtung
- $\alpha$  — Wellenzahl der Störbewegung in x-Richtung
- $\lambda$  — Wellenzahl der Störbewegung in z-Richtung
- $\beta$  — Kreisfrequenz der Störbewegung
- $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  — Komponenten der Rotation
- $\delta$  — Zeitlicher Anregungs- bzw. Dämpfungsterm
- b — Kanalbreite (Wand bis Mitte), Grenzschichtdicke
- t — Zeit
- $\psi$  — Stromfunktion einer ebenen Strömung
- $A_x, A_y, A_z$  — Komponenten des Vektorpotentials einer räumlichen Strömung
- f, g — von y und gegebenenfalls von t abhängige Funktionen zur Entwicklung einer Strömung in Fourierglieder
- $\rho, \nu$  — Dichte und Zähigkeit des Fluids
- p — statischer Druck
- $\Delta$  — Laplaceoperator
- A — Amplitude (einer Störbewegung), maximaler Betrag der Geschwindigkeitsabweichung vom zeitlichen Mittel am gleichen Ort

## 2. Grundlegende Gleichungen

Das Verhalten einer reibungsbehafteten Strömung eines inkompressiblen Fluids wird durch die Navier-Stokes'schen Gleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung beschrieben [1]. Die Einführung der Rotation<sup>1)</sup> gestattet die Elimination des statischen Druckes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + c_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} - \gamma_x \frac{\partial c_x}{\partial x} \\ - \gamma_y \frac{\partial c_y}{\partial x} - \gamma_z \frac{\partial c_z}{\partial x} = \nu \Delta \gamma_x \\ \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + c_x \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial \gamma_y}{\partial z} - \gamma_x \frac{\partial c_x}{\partial y} \\ - \gamma_y \frac{\partial c_y}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial c_z}{\partial y} = \nu \Delta \gamma_y \end{aligned} \quad (1)$$

1)  $\gamma_x = \frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z}$ ,  $\gamma_y = \frac{\partial c_x}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial x}$ ,  $\gamma_z = \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y}$

$$\frac{\partial \gamma_z}{\partial t} + c_x \frac{\partial \gamma_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial \gamma_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} - \gamma_x \frac{\partial c_x}{\partial z} - \gamma_y \frac{\partial c_y}{\partial z} - \gamma_z \frac{\partial c_z}{\partial z} = \nu \Delta \gamma_z .$$

Zur Ableitung von (1) sei auf [1] verwiesen (Helmholtzsche Gleichungen).

Zur Integration der Gleichungen ist vielfach die Einführung eines Vektorpotentials der Geschwindigkeiten nach

$$c_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad c_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad c_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (2)$$

zweckmäßig. Dann wird

$$\gamma_x = -\Delta A_x, \quad \gamma_y = -\Delta A_y, \quad \gamma_z = -\Delta A_z. \quad (3)$$

Es ist ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich, das Vektorpotential  $A$  im gesamten Gebiet divergenzfrei zu machen.

Für zweidimensional ebene Strömungen verschwinden  $c_z, \gamma_x, \gamma_y, A_x, A_y$ . Die Komponente  $A_z$  entspricht dann bis auf das Vorzeichen der Stromfunktion  $\psi$ .

### 3. Zielstellungen

An ein brauchbares mathematisches Modell turbulenter Strömungen sollte die richtige Berechnung folgender Eigenschaften unter Verzicht auf die Einführung empirisch gewonnener Daten gefordert werden:

- Umschlagpunkt, beeinflusst von Turbulenz der Außenströmung,
- Wandschubspannung,
- Profil der zeitlich gemittelten Strömung,
- Gegebenenfalls der Ablösungspunkt,
- Verhalten von Sekundärströmungen einschließlich der Rand- und Spaltverluste,
- Richtiges Verhalten gegenüber Druckanstieg und -abfall.

Jedes derartige mathematische Modell besteht letztlich aus einer bestimmten Anordnung von Wirbelfeldern. In diesem Sinn wird in [1] eine Vielzahl von mathematischen Modellen entwickelt und hinsichtlich der Rückwirkungen auf die Hauptströmung untersucht. Im vorliegenden Aufsatz wird gegenüber [1] zusätzlich die Bedingung gestellt, daß jeder Anteil des Wirbelfeldes – jedes Fourierglied – entweder selbsterhaltend oder zumindest unter vergleichbaren Anteilen am schwächsten gedämpft ist – Abschnitt 6. – oder der Integration über die Zeit unterworfen wird.

Die vorstehend zusammengestellten Forderungen sind gegenwärtig noch zu hoch gestellt. Deshalb werden die vereinfachenden Annahmen im Abschnitt 4. getroffen.

### 4. Übersicht über verwendete Lösungsverfahren

Es sollen folgende Voraussetzungen getroffen werden:

- Zugrundegelegt wird eine Grundströmung parallel zur  $x$ -Achse, deren Geschwindigkeit nur von  $y$  abhängt,
- die zugelassenen Störströmungen sollen periodisch über  $x$  sein und können deshalb als Fourierreihe entwickelt werden,
- wenn eine dreidimensionale Störströmung angenommen wird, soll diese periodisch über  $z$  sein,

- die in der realen Strömung infolge Anregung oder Dämpfung entstehende Intensitätsänderung über  $x$  wird durch eine über  $t$  ersetzt; wird in [2] diskutiert,
- die in den Gleichungen des Abschnittes 2 auftretenden Ableitungen nach  $x$  und evtl.  $z$  werden anhand der Fourierentwicklung, die Ableitungen nach  $y$  durch geeignete Differentiationspolynome ausgedrückt; damit können die Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen ausgedrückt und durch die Lösung von Gleichungssystemen integriert werden [2].

Die Lösungsverfahren können nach folgenden Gesichtspunkten geordnet werden:

- Lineare Verfahren für geringe Störampplituden bzw. nichtlineare Verfahren für beliebig große Störampplituden,
- das Verhalten über die Zeit kann durch Integration als Anfangswertaufgabe bzw. durch die Integration einer Eigenwertaufgabe ausgedrückt werden,
- die Störung kann zwei- oder dreidimensional sein.

Die analytische Näherungslösung der Orr-Sommerfeldschen Gleichung von Tollmien [9] ordnet sich in diese Systematik als lineare Eigenwertaufgabe für zweidimensionale Störung ein.

Allen späteren Untersuchungen lagen numerische Rechenverfahren zugrunde, die im wesentlichen durch die Entwicklung leistungsfähiger Digitalrechner ermöglicht wurden.

Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß insbesondere dreidimensionale Aufgaben auch derzeit noch einen beträchtlichen Rechen(-zeit-)aufwand erfordern.

Als typische Grundströmungen für die numerischen Auswertungen werden

- die Poiseuilleströmung und
  - die laminare Grenzschichtströmung
- verwendet.

Die Poiseuilleströmung besitzt den Vorzug der restlosen Einhaltung der Bewegungsgleichungen auch unter den Voraussetzungen zu Anfang des Abschnitts, was bei der Grenzschichtströmung nicht der Fall ist. Die bei dieser Strömung vorhandene Breitenänderung über die Lauflänge bzw. Zeit widerspricht der Annahme einer über  $x$  unveränderlichen Geschwindigkeit und muß durch geeignete Zusatzmaßnahmen korrigiert werden. Deshalb wird in diesem Aufsatz meist die Poiseuilleströmung als Rechenbeispiel verwendet.

Als Randbedingung für Grund- und Störströmung wird  $c_x, c_y, c_z = 0$  auf der Wand bzw. beiden Wänden verlangt. Bei der Poiseuilleströmung ist durch Einführung von Symmetriebedingungen in der Kanalmitte die Beschränkung auf eine Hälfte möglich.

Als typische Länge wird die halbe Kanalbreite  $b$ , als typische Geschwindigkeit die 1,5-fache über die Kanalbreite gemittelte Geschwindigkeit, d. h. die Mittengeschwindigkeit der Poiseuilleströmung verwendet. Alle Angaben erfolgen der Einfachheit halber unter der Annahme, daß beide Bezugsgrößen = 1 seien.

Wenn im folgenden eine Grenzschichtströmung als Rechenbeispiel verwendet wird, so handelt es sich um ein aus einem Pohlhausenpolynom

$$c_x = 2 \frac{y}{b^*} - 2 \left( \frac{y}{b^*} \right)^3 + \left( \frac{y}{b^*} \right)^4 + \Lambda \cdot \left( \frac{y}{b^*} - 3 \left( \frac{y}{b^*} \right)^2 + 3 \left( \frac{y}{b^*} \right)^3 - \left( \frac{y}{b^*} \right)^4 \right) \quad (4)$$

für  $y < b^*$  bzw.

$c_x = 1$  für  $y \geq b^*$

zusammengesetztes Grundprofil. Als Randbedingung für die Störbewegung wird Drehungsfreiheit im Außenraum und Verschwinden im Unendlichen verlangt. Bezugslänge ist die Grenzschichtdicke  $b^*$ , Bezugsgeschwindigkeit die Außengeschwindigkeit.

### 5. Einschätzung der Ergebnisse des Modells „ebene Störung“

Die Lösungen der – homogenen – Orr-Sommerfeldschen Gleichung ergeben beim Vergleich mit experimentellen Ergebnissen folgende Aussagen:

- die berechneten kritischen Reynoldszahlen stimmen nur in der Größenordnung (Poiseuilleströmung  $Re_{krit} \sim 1500$  gegenüber rechnerisch  $Re_{krit} = 5772$ ),
- die Abhängigkeit der kritischen Reynoldszahl vom Druckanstieg bzw. -abfall wird gut wiedergegeben,
- die Größenordnung der berechneten Anregungskoeffizienten ist zu gering, als daß der experimentell beobachtete schnelle Umschlag – „Umschlagpunkt“ – erklärbar wäre.

Abhängigkeiten vom Turbulenzgrad der Außenströmung und Rückwirkungen auf die Grundströmung sind entsprechend dem Charakter der Lösungen nicht vorhanden. In [3] wird nachgewiesen, daß die kritischen Reynoldszahlen für Störungen mit z-Abhängigkeit stets höher liegen als für z-unabhängige, ebene Störungen.

Daraus wäre zu schlußfolgern, daß die Komponente  $c_z$  bzw. die Längsrotation  $\gamma_x$  zumindest in der Nähe der kritischen Reynoldszahl unwesentlich sind.

Auch diese Aussage widerspricht Meßergebnissen. Da dieser Sachverhalt im folgenden noch wesentlich wird, sei der Hinweis eingefügt, daß das in [3] verwendete Modell für räumliche Störungen, das auch z. B. in [4] angesetzt wurde, nur Störungen zuläßt, die in y-Richtung drehungsfrei sind ( $\gamma_y = 0$ ). Durch diese stillschweigende Voraussetzung ist es in [3], [4] möglich, die Störung durch nur eine y-abhängige – komplexe – Funktion auszudrücken, während es im echt räumlichen Fall entsprechend (3) 2 Komponenten des Vektorpotentials wären.

Als erste Verallgemeinerung wird die ebene Störbewegung mit endlicher Amplitude betrachtet. Möglich sind sowohl die Eigenwertrechnung mit einer Eigenfunktion vorgegebener Amplitude unter Berücksichtigung der Rückwirkung der Eigenfunktion auf die Grundströmung und des Aufbaus einer Oberschwingung doppelter Wellenzahl – ausgeführt in [5] – als auch die Integration als Anfangswertaufgabe ausgehend von einer Anfangsstörung angenommener Intensität, Verteilung und Wellenzahl.

Die Lösung als Anfangswertaufgabe wurde mit einem Rechenprogramm ausgeführt, das das Spektrum bis zur 24-fachen Wellenzahl der angenommenen Grundschwin-

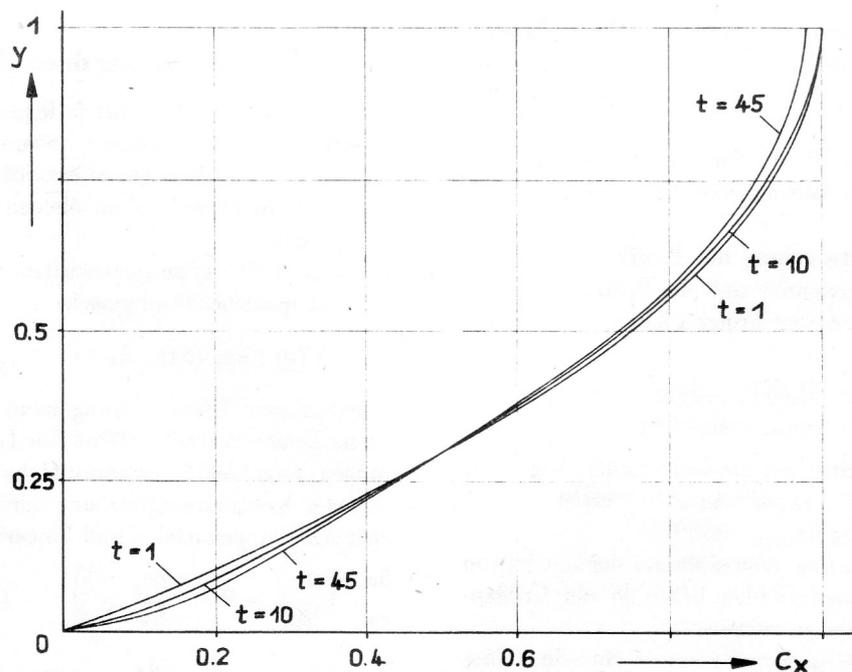
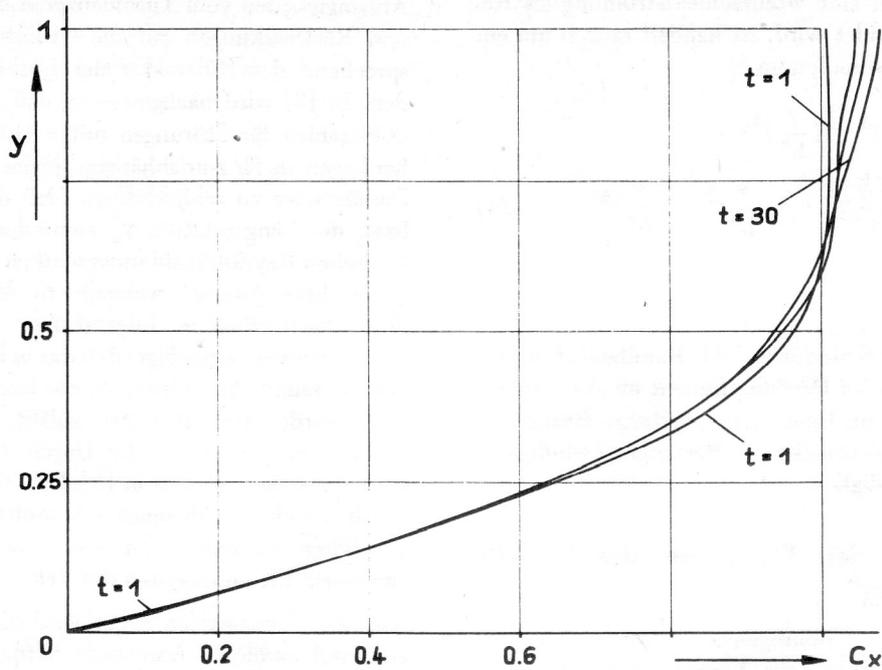


Bild 1  
Entwicklung des Profils einer Poiseuilleströmung mit  $Re = 8000$  ausgehend von einer Anfangsstörung mit  $\alpha = 1$ ,  $\beta/\alpha = 0.25$ ,  $A = 0.24$ , berücksichtigte Wellenzahlen  $\alpha = 0.2$  bis  $4.8$ ,  $t = 1, 10, 45$



**Bild 2**  
 Entwicklung des Profils einer Grenzschichtströmung  $\Lambda = 0$ ,  
 $b^* = 2/3$ ,  $Re = 3333$  ( $Re\delta^* = 1000$ ) ausgehend von einer An-  
 fangsstörung mit  $\alpha = 1.8$ ,  $\beta/\alpha = 0.35$ ,  $A = 0.24$ , berücksichtigte  
 Wellenzahlen  $\alpha = 0.6$  bis  $14.4$ ,  $t = 1, 10, 20, 30$

gung zuläßt. Durch diese hohe Zahl berücksichtigten Oberschwingungen ist es möglich, die Wellenzahl der Grundschwingung weit kleiner als die als Lösung der Eigenwertaufgabe erhaltene stärkstangeregte Wellenzahl zu wählen und damit dem Verlauf der Integration zu überlassen, welche Wellenzahlen besonders stark auftreten.

Eine derartige Integration wurde ausgeführt für eine Poiseuilleströmung von  $Re = 8000$  unter Annahme einer Grundwellenzahl  $\alpha_0 = 0.2$ . Als Anfangsstörung wurden Funktionen für  $\alpha = 5\alpha_0$ ,  $6\alpha_0$  mit einer Amplitude  $A = 0.24$  eingeführt. Die Verformung des Grundprofils dieser Strömung in Abhängigkeit von der Zeit zeigt Bild 1.

Bild 2 zeigt die Entwicklung des Profils einer Grenzschichtströmung. Gezeichnet sind die Profile für  $t = 1, 10, 20, 30$ , größere Zeiten bringen keine wesentlichen Änderungen mehr.

Als Gesamtaussage des Modells „ebene Störung mit endlicher Amplitude“ wird zusammengefaßt:

- die erhaltenen kritischen Reynoldszahlen liegen erheblich näher an den experimentellen Werten (Poiseuilleströmung  $Re_{krit} \sim 2380$ ) [5],
- die anzusetzenden bzw. sich während der Integration einstellenden Störampplituden liegen in der Größenordnung turbulenter Störungen,
- die berechneten Grundprofile entsprechen in keiner Weise dem experimentell bekannten Aussehen turbulenter Strömungen; selbst wenn den aus der Literatur bekannten Meßergebnissen in Wandnähe ein erheblicher Fehler unterstellt werden muß – insbesondere verstoßen viele dieser Ergebnisse gegen den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsgradient an der

Wand, Wandschubspannung und Druckverlust in Strömungsrichtung –, kann nur ausgesagt werden, daß das Modell weder zur angenäherten Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung noch zur Berechnung der Widerstandserhöhung verwendbar ist.

## 6. Modell einer Störung durch Längswirbel

Die Aussagen in Abschnitt 5. legen nahe, daß in turbulenten Strömungen weitere Störungselemente wirksam sind. Dafür kommen vor allem Störungen durch Längswirbel  $\gamma_x$  in Frage, die im ebenen Modell ausgeschlossen wurden.

Um diesen Effekt zu untersuchen, wurde zunächst eine reine Längswirbelstörung nach

$$\gamma_x = f(y) \cdot \exp(\delta t) \cdot \sin \lambda z, \quad \gamma_y = 0 \quad (5)$$

angenommen. Diese Störung kann nur gedämpft sein, da sie keinen Antrieb erfährt. Die Lösung für kleine Störungen folgt aus Eigenwertaufgabe aus Gleichung (1a) und der Kontinuitätsgleichung durch Streichung sämtlicher Ableitungen nach  $x$  und Linearisierung

$$\frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z} = f$$

$$c_z = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad c_y = -\frac{\partial g}{\partial z}, \quad g'' - \lambda^2 g = f$$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial z^2} \right); \quad \delta f = \nu (f'' - \lambda^2 f) \quad (6)$$

$$\delta (g'' - \lambda^2 g) = \nu (g^{(IV)} - 2\lambda^2 g'' + \lambda^4 g);$$

Als Randbedingungen werden für die Kanalströmung  $g, g' = 0$  bei  $y = 0, 2$  verlangt. Für die Grenzschichtströmung gilt  $g, g' = 0$  bei  $y = 0$  und  $g = 0$  für  $y \rightarrow \infty$ . Die konstanten Koeffizienten gestatten eine geschlossene Lösung. Die Eigenwerte nichttrivialer Lösungen werden durch die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\lambda \tanh \lambda = -\sqrt{-\frac{\delta}{\nu} - \lambda^2} \cdot \tan \sqrt{-\frac{\delta}{\nu} - \lambda^2}$$

mit  $-\frac{\delta}{\nu} - \lambda^2 > 0$ , d. h.  $\frac{\delta}{\nu} < -\lambda^2$  ausgedrückt.

Die Berechnung des Eigenwertes  $\delta$  gelingt numerisch.

Bei großem  $\lambda$  gilt näherungsweise

$$\delta = -\nu \lambda^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4(\lambda - 1)^2}\right) \quad (7)$$

Entsprechend der Erwartung sind die Störungen durch Längswirbel gedämpft. Eine derartige Störung kann nur infolge eines entsprechenden Antriebs entstehen und existieren. Wenn diese Frage zunächst offen gelassen wird, kann die nichtlineare Wechselwirkung mit der Grundströmung berechnet werden.

Dazu wird die x-Komponente der Navier-Stokesschen Gleichungen mit

$$c_x = c_{x0}(y) + c_{x1}(y) \cdot \cos \lambda z \quad (8)$$

und den aus der Eigenlösung (6) folgenden Komponenten  $c_y, c_z$  integriert. Der Druckgradient  $\frac{\partial p}{\partial x}$  muß bei der

Kanalströmung so korrigiert werden, daß der geforderte Durchsatz eingehalten wird. Dagegen darf bei der Grenzschichtströmung  $\frac{\partial p}{\partial x}$  nicht verändert werden, jedoch muß

eine entsprechende Änderung der Grenzschichtdicke vorgesehen werden. Zusätzlich können im Rechenschema die durch Einwirkung der Störung (5) auf sich selbst entstehenden Oberschwingungen berücksichtigt werden.

Die nach diesem Schema berechneten Geschwindigkeitsverteilungen für die Kanalströmung  $Re = 3333$ , die Längswirbelwellenzahlen  $\lambda = 2; 5; 10$  und einige Amplituden zeigt Bild 3.

Das Bild belegt anschaulich, daß durch die Einwirkung der Längsverwirbelung die Geschwindigkeitsprofile leicht zu den typischen turbulenten Profilen verformt werden. Besonders sei auf die geringen Amplituden hingewiesen, die bereits erhebliche Verformungen hervorrufen.

Für Grenzschichtströmungen wurden Proberechnungen mit demselben Algorithmus bei geänderten Randbedingungen und Verzicht auf Korrektur des Druckgradienten  $\frac{\partial p}{\partial x}$  angestellt. Die Rechnungen brachten ebenfalls

eine erhebliche Zunahme des Geschwindigkeitsgradienten an der Wand. Andererseits muß unbedingt die stärkere Zunahme der Grenzschichtdicke berücksichtigt werden, was nur im Rahmen eines vollständigen Grenzschichtrechenverfahrens möglich ist. Das wurde mit Rücksicht auf den ohnehin nur qualitativen Charakter dieses Modells unterlassen.

Es verbleibt die Aufgabe, die diese Längswirbel anregenden Ursachen zu finden.

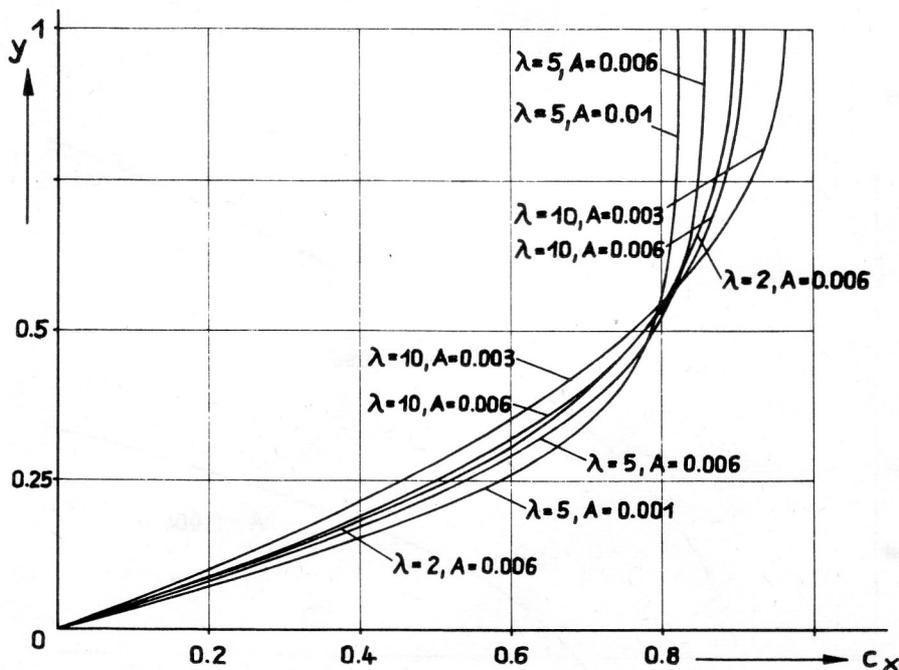


Bild 3  
Profile einer durch Längswirbel gestörten Poiseuilleströmung mit  $Re = 3333$

## 7. Verhalten einer räumlichen Störung in einer bereits durch ebene Störung verformten Grundströmung

Eine Strömung sei bereits durch eine ebene Störung verformt.

In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, daß diese Störung für sich im Gleichgewicht sei und zeitlich unverändert erhalten bleibt.

Hinzu kommt eine räumliche Störung, deren zeitliche Anfachung oder Dämpfung als Eigenwertaufgabe untersucht werden soll.

Als grundlegender Ansatz werde das Vektorpotential

$$A_z(\xi, y, z, t) = \sum_{i=0}^2 (f'_{i0}(y) \cos i\xi + g'_{i0}(y) \sin i\xi) + (f'_{01}(y) + f'_{11}(y) \cos \xi + g'_{11}(y) \sin \xi) \cos \lambda z \cdot \exp(\delta t) \quad (9a)$$

$$A_x(\xi, y, z, t) = (\bar{f}'_0(y) + \bar{f}'_1(y) \cos \xi + \bar{g}'_1(y) \sin \xi) \sin \lambda z \cdot \exp(\delta t) \quad (9b)$$

verwendet. Aus der vorausgesetzten Quellenfreiheit folgt damit

$$A_y = (\alpha (\bar{f}'_1 \sin \xi - \bar{g}'_1 \cos \xi) + \lambda (f_{01} + f_{11} \cos \xi + g_{11} \sin \xi)) \sin \lambda z \cdot \exp(\delta t) \quad (10)$$

Aus diesem Vektorpotential folgen nach (2) und (3) die Geschwindigkeits- und die Rotationskomponenten. Diese werden in (1) eingesetzt. Die quadratischen Terme liefern Produkte der trigonometrischen Funktionen von  $\xi$  bzw.  $\lambda z$ , die mittels der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen entwickelt werden.

Die gesamte Entwicklung ist an sich elementar, aber außerordentlich langwierig und soll deshalb hier übergangen werden. Als Ergebnis der Linearisierung und Beschränkung auf die  $\exp(\delta t)$  enthaltenden Funktionen entstehen 6 gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen 5. Ordnung — der Ansatz (9) enthält die erste Ableitung der Eigenfunktionen — für die 6 Funktionen  $f_{01}, f_{11}, g_{11}, \bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{g}_1$  und den Eigenwert  $\delta$ . Die Integration der Differentialgleichungen über  $y$  erfolgt wieder numerisch mittels Ersatz durch entsprechende Differenzgleichungen.

Die ungerade Ordnung fordert ein System von Differenzkoeffizienten, das die jeweiligen Ableitungen für die Mitten zwischen den Stützstellen ausdrückt, andernfalls wird die Integration instabil.

Zur Stabilitätsuntersuchung werden die Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$  und die Funktionen  $f_{00}, f_{10}, g_{10}, f_{20}, g_{20}$  vorgegeben. Die (Quer-)Wellenzahl  $\lambda$  der räumlichen Störung wird zunächst beliebig angenommen.

Als Beispiel zeigt Bild 4 das Anregungsverhalten einer räumlichen Störung mit  $\lambda = 1$  in einer Kanalströmung, die durch eine ebene Störung mit  $\alpha = 1; \frac{\beta}{\alpha} = 0.35$  und

den Amplituden  $A = 0.004$  bzw.  $0.006$  verformt wurde. Das Ergebnis der Rechnung überrascht vor allem durch die Beträge des Faktors  $\delta$ , die stark von der Amplitude der ebenen Störung abhängen und verhältnismäßig groß sind. Daraus ist zu schlußfolgern, daß die räumliche Störung ihre Energie aus der ebenen Störung entnimmt. Derartige Rechnungen wurden auch für Grenzschichten nach dem Pohlhausenansatz (4) mit  $b^* = b$  für  $\Lambda = 0$  — Plattengrenzschicht — und die verzögerte Strömung  $\Lambda = -1$  angestellt. Es wurde eine ebene Störung

$$\psi = \left(\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{b}\right)^4\right) \cdot \cos \xi$$

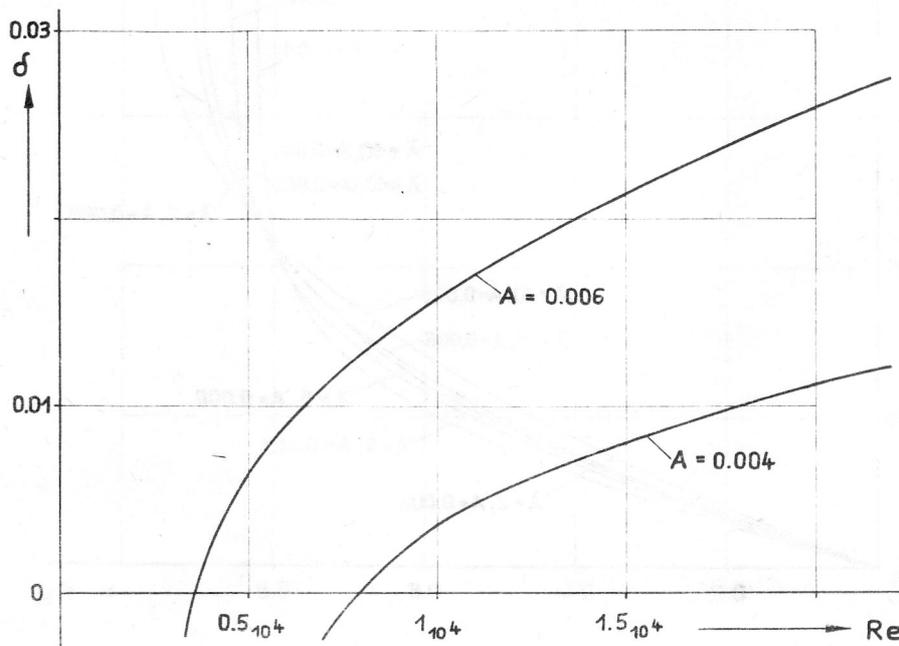
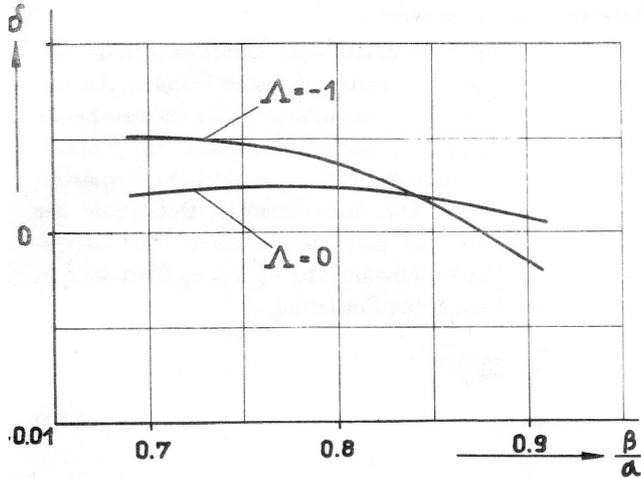


Bild 4  
Anregung einer räumlichen Störung  $\lambda = 1$  in einer bereits gestörten ebenen Kanalströmung; ebene Störung  $\alpha = 1, \beta/\alpha = 0.35$

mit  $\alpha = 1$ ,  $\frac{\beta}{\alpha} = 0.7 \dots 0.9$ ,  $A = 0.01$

angenommen. Die Querwellenzahl der räumlichen Störung war  $\lambda = 1$ . Die erhaltenen Anregungsfaktoren zeigt Bild 5. Die Abhängigkeit der Anregung von der Phasengeschwindigkeit der ebenen Störung und der Form des Grundprofils ist gering.



**Bild 5**  
Anregung einer räumlichen Störung  $\lambda = 1$  in Grenzschichtströmungen  $\Lambda = 0, -1$ ,  $Re = 3333$ ; ebene Störung  $\alpha = 1$ ,  $A = 0.01$ ,  $\beta/\alpha = 0.7 \dots 0.9$

Das Ergebnis des in diesem Abschnitt untersuchten Modells wird zusammengefaßt durch die Aussagen

- die durch ebene Störung verformte Strömung wird bereits bei ganz geringen Amplituden instabil gegen räumliche Störungen mit identischer Längswellenzahl und Phasengeschwindigkeit,
- die Grenzwerte der Amplituden liegen in der Größenordnung der Turbulenzgrade, die im Experiment die Beobachtung der Anregung Tollmischer Wellen unmöglich machen [7],
- bei Amplituden der ebenen Störung in der Größenordnung der gemessenen Turbulenzgrade turbulenter Strömungen wird die Anregung der räumlichen Störung derart groß, daß ein umgehendes Zerfallen der ebenen Störung erwartet werden muß,
- das Modell kann zumindest qualitativ der Erfassung des Einflusses des Turbulenzgrades auf die Grenzschichtentwicklung zugrundegelegt werden, indem die willkürlich angenommene oder als Tollmische Schwingung aufgefaßte ebene Störung ersetzt wird durch aus der Turbulenz der Außenströmung zu erwartende Störungen,
- Zur Gestalt der als Eigenlösungen gefundenen Wirbelverteilungen sei bemerkt, daß es ringartige Strukturen vorrangig in der x-z-Ebene sind mit deutlich ausgeprägten Intensitätsmaxima in der Nähe des Wandabstandes, in dem die Phasengeschwindigkeit der ebenen Störung gleich der Geschwindigkeit der Grundströmung ist.

## 8. Entwicklung einer räumlichen Störung über die Zeit

Das Modell gemäß Abschnitt 7. gestattet einige qualitative Aussagen über die zu erwartende Existenz räumlicher Störungen. Es gestattet keine quantitativen Aussagen über die Rückwirkung dieser räumlichen Störung auf die Grundströmung und die ebene Störung, da die räumliche Störung als von geringer Amplitude vorausgesetzt werden mußte.

Gerade diese Kopplung zwischen ebener und räumlicher Störung muß jedoch als wesentliches Element der turbulenten Strömung angesehen werden. Diese Forderung kann nur im Rahmen einer Anfangswertintegration der vollständigen räumlichen Strömung über die Zeit erfüllt werden.

Dieses Vorgehen besitzt die Nachteile, daß unmittelbare Stabilitätsaussagen nicht möglich sind und daß die Anfangsbedingungen und zugrundezulegenden Wellenzahlen angenommen werden müssen. Diese Nachteile können durch hinreichend große Integrationsdauer überwunden werden.

Der zugrundezulegende Ansatz wird wieder als Vektorpotential ähnlich (9), (10) ausgedrückt.

$$A_z(\xi, y, z, t) = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^3 (f_{ij}(y, t) \cos i \xi + g_{ij}(y, t) \sin i \xi) \cos j \lambda z \quad (11)$$

$$A_x(\xi, y, z, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=0}^3 (\bar{f}_{ij}(y, t) \cos i \xi + \bar{g}_{ij}(y, t) \sin i \xi) \sin j \lambda z$$

Aus der Quellenfreiheit folgt für  $A_y$

$$A_y(\xi, y, z, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 (f(j\lambda f_{ij} - i\alpha \bar{g}_{ij}) \cos i \xi + f(j\lambda g_{ij} + i\alpha \bar{f}_{ij}) \sin i \xi) \sin j \lambda z^2 \quad (12)$$

Im folgenden sollen die Komponenten der Geschwindigkeit und der Rotation für jeweils ein Reihenglied  $i, j$  angegeben werden ( $\kappa^2 = (i\alpha)^2 + (j\lambda)^2$ , Ableitungen partiell nach  $y$ ):

$$c_x = ((f'_{ij} - j\lambda f(j\lambda f_{ij} - i\alpha \bar{g}_{ij}) \cos i \xi + (g'_{ij} - j\lambda f(j\lambda g_{ij} + i\alpha \bar{f}_{ij}) \sin i \xi) \cos j \lambda z) \quad (13)$$

$$c_y = ((j\lambda \bar{f}_{ij} + i\alpha g_{ij}) \cos i \xi + (j\lambda \bar{g}_{ij} - i\alpha f_{ij}) \sin i \xi) \cos j \lambda z$$

$$c_z = ((i\alpha f(j\lambda g_{ij} + i\alpha \bar{f}_{ij}) \cos i \xi - \bar{f}'_{ij}) \cos i \xi + (-i\alpha f(j\lambda f_{ij} - i\alpha \bar{g}_{ij}) \sin i \xi - \bar{g}'_{ij}) \sin i \xi) \sin j \lambda z$$

$$\gamma_x = -((\bar{f}''_{ij} - \kappa^2 \bar{f}_{ij}) \cos i \xi + (\bar{g}''_{ij} - \kappa^2 \bar{g}_{ij}) \sin i \xi) \sin j \lambda z$$

2) Im Gegensatz zum Ansatz (19) wird in (11) von den Funktionen anstelle der Ableitungen ausgegangen. Zwar tritt in (12) das störende Integral auf, dafür bleibt das gesamte System aber von 4. Ordnung über  $y$  und kann leichter integriert werden.

$$\begin{aligned} \gamma_y = & -((j\lambda f'_{ij} - i\alpha \bar{g}_{ij} - \kappa^2 \cdot \int (j\lambda f_{ij} - i\alpha \bar{g}_{ij}) dy) \cos i\xi \\ & + (j\lambda g'_{ij} + i\alpha \bar{f}_{ij} - \kappa^2 \int (j\lambda g_{ij} + i\alpha \bar{f}_{ij}) dy) \sin i\xi) \sin j\lambda z \\ \gamma_z = & -((f''_{ij} - \kappa^2 f_{ij}) \cos i\xi + (g''_{ij} - \kappa^2 g_{ij}) \sin i\xi) \cos j\lambda z. \end{aligned} \quad (14)$$

Ein beliebiger Momentzustand wird für  $j = 0 \dots 2$ ,  $i = 0 \dots 3$ , d. h. einschließlich der Grundströmung durch die insgesamt 20 Funktionspaare  $\bar{f}_{ij}, \bar{g}_{ij}$  bzw.  $f_{ij}, g_{ij}$  ausgedrückt. Damit kann ein Rechenablauf begonnen werden, der in folgenden Schritten zu den Änderungen der vorgenannten Funktionen mit der Zeit führt:

- Für jede der insgesamt 40 Funktionen werden die 1. bis 4. Ableitung und das Integral über  $y - ay = 0 -$  für jede Stützstelle über  $y$  berechnet.
- Anhand dieser Werte können für jede Stützstelle die Fourierkoeffizienten der Entwicklungen

$$F = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^3 (R_{ij} \cos i\xi + I_{ij} \sin i\xi) \cos j\lambda z \quad (15a)$$

für die Terme

$$c_x, c_y, \frac{\partial c_x}{\partial x}, \frac{\partial c_y}{\partial x}, \gamma_z, \frac{\partial \gamma_z}{\partial x}, \frac{\partial \gamma_z}{\partial y}, \Delta \gamma_z;$$

$$F = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=0}^3 (R_{ij} \cos i\xi + I_{ij} \sin i\xi) \sin j\lambda z \quad (15b)$$

für die Terme

$$c_z, \frac{\partial c_z}{\partial x}, \frac{\partial c_x}{\partial z}, \frac{\partial c_y}{\partial z}, \gamma_x, \gamma_y, \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \frac{\partial \gamma_x}{\partial y}, \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}, \Delta \gamma_x;$$

$$F = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=0}^3 (R_{ij} \cos i\xi + I_{ij} \sin i\xi) \cos j\lambda z \quad (15c)$$

für die Terme  $\frac{\partial c_z}{\partial z}, \frac{\partial \gamma_x}{\partial z}$

berechnet und abgespeichert werden.

- Aus der Verknüpfung der vorstehenden Fourierkoeffizienten entsprechend den Bewegungsgleichungen für  $\frac{\partial \gamma_x}{\partial t}$  (1a) und  $\frac{\partial \gamma_z}{\partial t}$  (1c) entstehen anhand der Additionstheoreme für jede  $y$ -Stützstelle Fourierentwicklungen der Art (15b) für  $\frac{\partial \gamma_x}{\partial t}$  und der Art (15a) für  $\frac{\partial \gamma_z}{\partial t}$ .

Eine der Gleichungen (1) ist redundant und wird ohnehin durch die Bedingung  $\text{div } \gamma = 0$  ausgedrückt. Entsprechend Ansatz (11) wird (1b) gestrichen.

- Die Umwertung der Größen  $\frac{\partial \gamma_x}{\partial t}$  und  $\frac{\partial \gamma_z}{\partial t}$  in  $\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t}$  erfordert die Integration der Differentialgleichungen (14a) und (14c) unter Einhaltung der an die Funktionen zu stellenden Randbedingungen. Das geschieht wieder durch Ersatz der Differentialgleichungen durch entsprechende Differenzgleichungen, die als linke Seite eines linearen Gleichungssystems eingeführt werden. Diese linken Seiten sind für jeweils ein Wertepaar  $i, j$  identisch. Die Umwertung geschieht für jeweils ein Fourierglied, in dem dieses

als rechte Seite eingeführt und das Gleichungssystem gelöst wird.

Die so berechneten Anstiege  $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t}$  werden in ein Anfangswertaufgaben-Integrationsverfahren eingesetzt und durch entsprechend häufige Wiederholung die Entwicklung der Störung über die gewünschte Zeit berechnet. Praktisch bewährt hat sich dafür nur das Runge-Kutta-Verfahren mit automatischer Fehlerkontrolle und Schrittweiten-Korrektur.

Als Randbedingungen müssen das Verschwinden der Geschwindigkeitskomponenten auf festen Wänden, das Abklingen der Störung im Unendlichen oder entsprechende Symmetriebedingungen gefordert werden. Im Rechenprogramm wurde nur der Fall „symmetrische Kanalströmung“ ausgeführt. Die formelmäßige Definition der Randbedingungen soll auch nur für diesen Fall angegeben werden. Die Randbedingung  $c_x, c_y, c_z$  führt anhand (13) unmittelbar zu den Forderungen

$$\begin{aligned} f'_{ij}, g'_{ij}, \bar{f}'_{ij}, \bar{g}'_{ij} &= 0 \\ j\lambda \bar{f}_{ij} + i\alpha \bar{g}_{ij}, j\lambda \bar{g}_{ij} - i\alpha \bar{f}_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\int_0^y (j\lambda f_{ij} - i\alpha \bar{g}_{ij}) dy, \int_0^y (j\lambda g_{ij} + i\alpha \bar{f}_{ij}) dy = 0$$

bei  $y = 0$  auf der Wand bzw. auf beiden Wänden.

Das System (16) ergibt für jedes Fourierglied genau die 16 Gleichungen, die zur eindeutigen Festlegung der jeweils 4 Funktionen bei 4. Ordnung der Differentialgleichungen notwendig sind.

Praktisch ergeben sich einige Schwierigkeiten. Bei der Ausführung der Integration (16c) stellen sich Fehler ein, die korrigiert werden müssen. Bei Ausnutzung der Symmetriebedingungen in Kanalmitte, was zur Rechenzeitersparnis sehr sinnvoll ist, wird die Endrandbedingung durch die Mittenbedingungen bei  $y = 1$

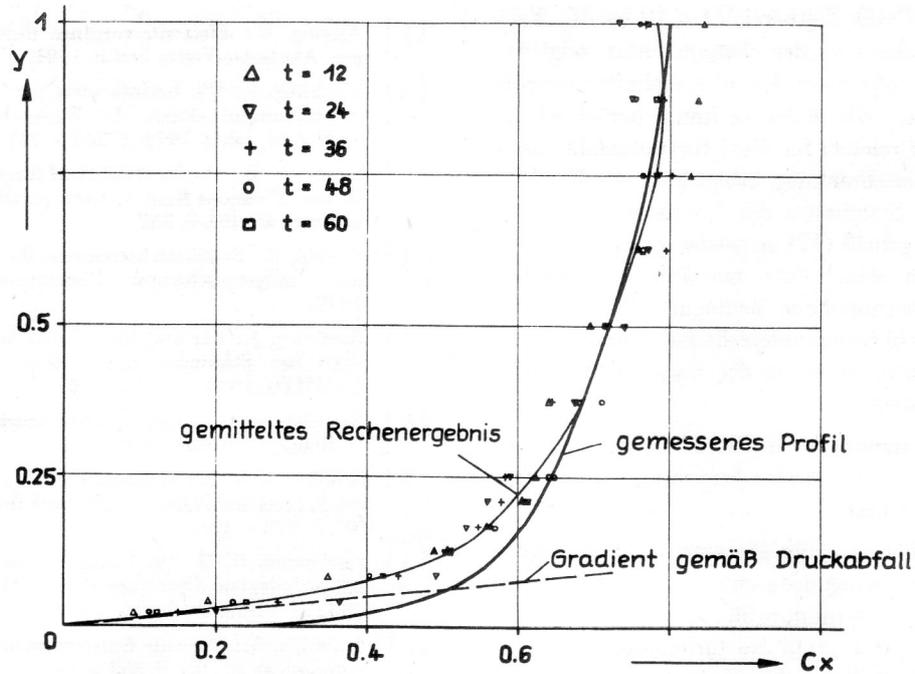
$$\begin{aligned} f_{ij}, g_{ij}, \bar{f}_{ij}, \bar{g}_{ij} &\text{ geradesymmetrisch, wenn } i+j \text{ ungerade,} \\ f_{ij}, g_{ij}, \bar{f}_{ij}, \bar{g}_{ij} &\text{ ungeradesymmetrisch, wenn } i+j \text{ gerade,} \end{aligned} \quad (17)$$

ersetzt. Diese Mittenbedingungen führen zu einer entsprechenden Bedingung für die Integrale (16c). Diese Integrale sollen für die Fälle  $i+j = \text{ungerade}$  bei  $y = 1$  verschwinden. Da das bei der Integration nicht eintritt, müssen die betreffenden Funktionen bzw. ihre Änderungen mit der Zeit entsprechend korrigiert werden.

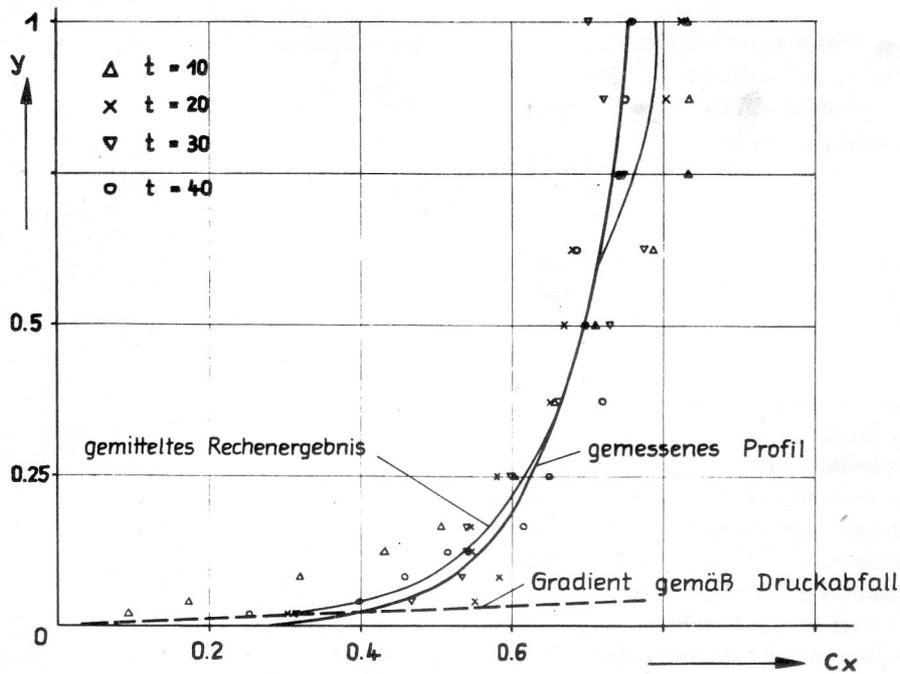
Mit dem in diesem Abschnitt beschriebenen Verfahren wurde die Entwicklung räumlicher Störungen in Kanalströmungen integriert. Es werden zwei Rechenfälle dargestellt. Beide beginnen zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit einer Poiseuilleströmung, in der sich eine Störbewegung mit der Längswellenzahl  $\alpha = 1.2$ , Phasengeschwindigkeit  $\beta = 0.3$  und  $A = 0.16$  und der Querwellenzahl  $\lambda = 1.5$  und  $A = 0.12$  befindet.

Die Wellenzahlen liegen etwa an der Stelle größter Anregungen im Modell ebene Störung – für  $\alpha$  – und im Modell nach Abschnitt 7. – für  $\lambda$  –.

Die Integration über  $y$  erfolgte mit 48 Stützstellen.



**Bild 6**  
 Grundprofil einer Kanalströmung  $Re = 3333$  für  $t = 12$  bis  $60$ ;  
 gemessenes Profil einer Rohrströmung  $Re_{vergl.} = 9000$



**Bild 7**  
 Grundprofil einer Kanalströmung  $Re = 10400$  für  $t = 10$  bis  $40$ ;  
 gemessenes Profil einer Rohrströmung  $Re_{vergl.} = 27000$

Bild 6 zeigt das Grundprofil einer Kanalströmung mit  $Re = 3333$  für den Bereich  $t = 12$  bis  $60$  in Schritten von  $t = 12$ . Die berechneten Funktionswerte wurden zur Verbesserung der Übersichtlichkeit nicht mit Kurvenzügen verbunden.

Da in der Literatur keine gemessenen Kanalströmungen passender Reynoldszahl zu finden war, wurde das Profil

einer turbulenten Rohrströmung mit anhand des hydraulischen Radius vergleichbarer  $Re$ -Zahl eingezeichnet. In Wandnähe zeigt sich der immer viel zu groß gemessene Geschwindigkeitsgradient.

Deshalb wurde der aus dem Druckabfall zu erwartende Gradient mit eingetragen. Insgesamt ist eine befriedigende Übereinstimmung des Grundprofils und eine sehr gute Übereinstimmung des Wandgradienten zu erkennen.

Bild 7 zeigt denselben Sachverhalt für eine Kanalströmung mit  $Re = 10400$ , Zeitbereich  $t = 10$  bis  $40$ . Während der Wandgradient wieder übereinstimmt, zeigt das Geschwindigkeitsprofil besonders in Kanalmitte wesentliche Abweichungen. Die in der Rechnung berücksichtigten Fourierglieder reichen für diese Reynoldszahl kaum noch aus. Eine Einschränkung bringt auch die Randbedingung über die Symmetrie der Fourierglieder. Jedes Fourierglied muß gemäß (17) entweder gerade- oder ungeradesymmetrisch sein. Diese aus dem linearisierten ebenen Modell übernommene Bedingung stört bei der hohen Reynoldszahl insbesondere deshalb, weil sich die Intensität der Störbewegung in der Kanalmitte verhältnismäßig groß einstellt.

Die Gesamteinschätzung des in diesem Abschnitt dargelegten Modells einer turbulenten Strömung wird im folgenden zusammengefaßt:

- Trotz der verhältnismäßig geringen Anzahl berücksichtigter Oberschwingungen entsteht ein den Meßergebnissen ähnliches Grundprofil.
- Die Berechnung des durch die turbulente Bewegung entstehenden zusätzlichen Druckabfalls erscheint mit guter Genauigkeit möglich.
- Die Amplituden der sich während der Integration einstellenden Störbewegung entsprechen etwa den in turbulenten Strömungen gemessenen Turbulenzgraden.
- Der Rechenaufwand ist sehr groß. Die in Bild 6 und 7 dargestellten Ergebnisse erforderten jeweils ca.  $4 \times 10^9$  Rechenoperationen. Mit höheren Reynoldszahlen steigt diese Zahl weiter an.

## 9. Zusammenfassung

Der Aufsatz stellt fünf mathematische Modelle für turbulente Strömungen vor und vergleicht deren Ergebnisse vor allem anhand der berechneten Profile der Grundströmung.

Das ebene Modell gibt keine befriedigende Erklärung für die Entstehung des Profils einer turbulenten Strömung und für die Widerstandserhöhung. Diese Erklärung gibt nur ein Modell, das eine allgemeine räumliche Störung zugrundelegt und dessen wesentliche Parameter aus dem ebenen Modell und aus einer Untersuchung der Stabilität gegen zusätzliche räumliche Störungen entnommen wurden. Andererseits beweisen die Ergebnisse des räumlichen Modells, daß die Nachbildung zumindest der zeitgemittelten Eigenschaften der turbulenten Strömung möglich ist.

## LITERATUR:

- [ 1 ] Albring, W.: Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen. Akademie-Verlag Berlin, 1981.
- [ 2 ] Brechling, J.: Die Beeinflussung der Stabilität von Laminarströmungen durch die Eigenschaften der Wände. ZAMM 54, Jahrg. 1974, S. 247 – 257.
- [ 3 ] Squire, H. B.: On the stability of three-dimensional distribution of viscous fluid between parallel walls. 1933; entnommen aus [6], S. 357.
- [ 4 ] Strehle, E.: Stabilitätsberechnung dichtgeschichteter ebener Wandgrenzschichten. Dissertation B, TU Dresden 1979.
- [ 5 ] Brechling, J.: Zur Stabilität ebener Schichtenströmungen gegenüber Störungen mit endlich großer Amplitude. ZAMM 60, 1980, S. 663 – 668.
- [ 6 ] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. 3. Aufl. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958.
- [ 7 ] Schubauer, G. B.; Skramstad, H. K.: Laminar boundary oscillations and stability of laminar flows. entnommen aus [6], S. 372 – 376.
- [ 8 ] Hackeschmidt, M.: Die heutigen Anschauungen zur laminar-turbulenten Übergangsschicht. Maschinenbautechnik 35 (1986) Heft 12, S. 553 – 559.
- [ 9 ] Tollmien, W.: Über die Entstehung der Turbulenz. 1929, entnommen aus [6], S. 363 – 367.