

Ein numerisches Verfahren zur Ermittlung elastischer Charakteristika von zylindrischen Paneelen aus hochelastischem Material

Teil II: Numerische Ergebnisse für Aufgaben der ebenen und dreidimensionalen Deformation hochelastischer Paneele¹⁾

Sergej Anatol'evic Gluchich

Die Geometrie des Paneels kann im Falle der ebenen Deformation durch den Öffnungswinkel 2α und den dimensionslosen Innenradius ρ beschrieben werden. Für den Außenradius wird der Wert 1 genommen. Die Größe $\kappa = 1 - \rho$ kennzeichnet die dimensionslose Dicke (Bild 5).

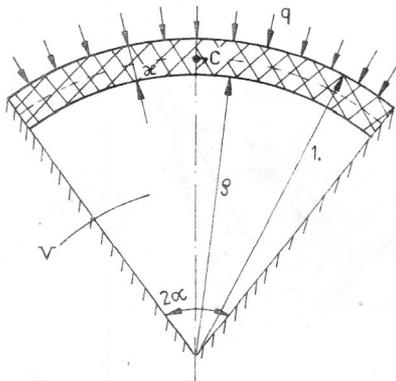


Bild 5
Querschnittsgeometrie des Paneels

Um eine bequemere Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen nach der Schalentheorie zu sichern, wird in Ergänzung zu den eingeführten geometrischen Parametern ein verallgemeinerter Krümmungsparameter verwendet

$$K = 2\alpha^2 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (30)$$

Die wichtigsten Ergebnisse werden für ein Paneel unter hydrostatischem Druck der Intensität q als Kraft-Verchiebungsdiagramme in den dimensionslosen Koordinaten

$$\hat{p} = 3\alpha^2 \left(\frac{\rho_0}{\kappa}\right) \frac{q}{\mu}, \quad (31)$$

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{u_0}{\rho_0}$$

dargestellt, wobei $\rho_0 = (1 + \rho)/2$ – der Radius der Mittelfläche und u_0 – die Radialverschiebung des Schwerpunkts ist (Punkt C auf Bild 5).

1) Formeln und Bildnummern sind für die Teile I (Technische Mechanik 8 (1987) 4, S. 61) und II fortlaufend. Alle Literaturangaben sind im Teil I angegeben.

Ein Teil der Ergebnisse ist in den Koordinaten $p = q/\mu$ und $\tau = \Delta V/V$ dargestellt. Dabei ist ΔV – die Änderung des Volumens des eingeschlossenen Hohlraums bei der Deformation des Paneels entsprechend der Beziehung (17) und V – das Anfangsvolumen des Hohlraums (Bild 5).

Die Steifigkeit des Paneels wird durch die dimensionslose Größe

$$D = \hat{p} / \hat{u}_0 \quad (32)$$

gekennzeichnet. Beim Grenzübergang $\hat{u}_0 \rightarrow 0$ erhält man D_0 – der Anfangswert der Steifigkeit.

Die elastischen Eigenschaften des Materials werden als einfachstes, nichtlineares physikalisches Gesetz, welches auf dem Treloare-Potential beruht, vorgegeben. Die Anwendung anderer physikalischer Gesetze wird für jeden Fall einzeln angegeben.

Die Konvergenz der numerischen Lösung wird am Beispiel der symmetrischen Deformation eines Paneels gezeigt, wobei beide verwendeten Approximationsvarianten (24) und (25) zu befriedigenden Ergebnissen führen (Bilder 6 und 7). Die Verwendung Čebyševscher Polynome führt im Vergleich zu trigonometrischen Funktio-

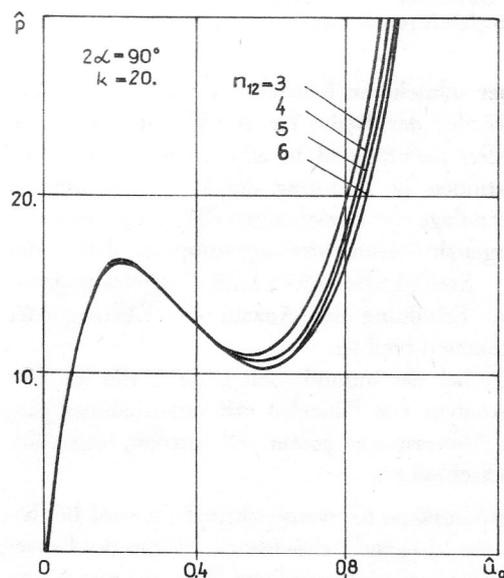


Bild 6
Numerische Konvergenz der Lösung für den Fall der Verschiebungsapproximation in der Winkelkoordinaten durch Čebyšev-Polynome

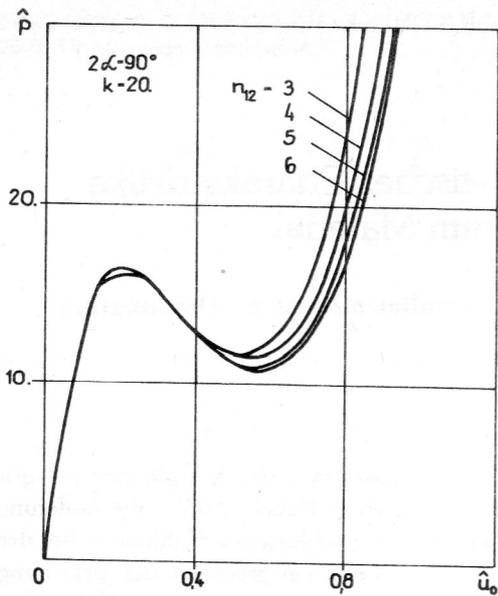


Bild 7
Numerische Konvergenz der Lösung für den Fall der Verschiebungsapproximation in der Winkelkoordinaten durch trigonometrische Funktionen

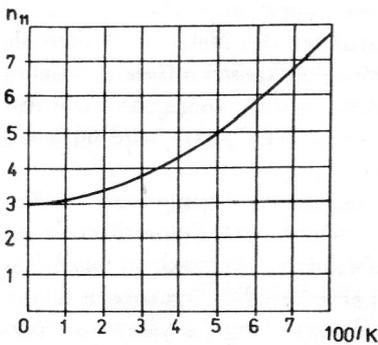


Bild 8
„Optimale“ Anzahl der Koordinatenfunktionen in radialer Richtung in Abhängigkeit von der bezogenen Dicke des Paneels

nen zu einer schnelleren Konvergenz (bei gleicher Zahl n_{k2} der Glieder der Reihe für die Winkelkoordinate). Daher werden nachfolgend in allen Berechnungen die Approximationen in Richtung der Winkelkoordinaten auf der Grundlage der Beziehungen (24) vorgenommen. Als Konvergenzkriterium wird angenommen, daß in der integralen Steifigkeitscharakteristik (Belastungsdiagramm) bei Erhöhung der Anzahl der Reihenglieder 3 Ziffern konstant bleiben.

Erfahrungen bei der numerischen Lösung, die im Verlaufe der Analyse von Paneelen mit verschiedenen geometrischen Abmessungen gesammelt wurden, lassen folgenden Rückschluß zu:

- Das angenommene Konvergenzkriterium wird bei beliebigen, nachfolgend betrachteten Dicken der Paneele für 8 Reihenglieder in radialer Richtung und 6 Reihenglieder in Umfangsrichtung erreicht.
- Bei der Analyse nichtsymmetrischer Deformationen verdoppelt sich die Anzahl der Reihenglieder in Umfangsrichtung.

– Die Verringerung der bezogenen Dicke gestattet eine Verringerung der notwendigen Zahl der Reihenglieder in radialer Richtung (vergl. Bild 8).

Vom Standpunkt der nichtlinearen Theorie für dünne flache Schalen sollen verschiedenen Öffnungswinkeln 2α bei ein und dem selben Wert des Krümmungsparameters K die gleichen Belastungsdiagramme in den dimensionslosen Koordinaten p und u_0 entsprechen [13]. Die numerischen Ergebnisse, die nach dem Programm „VOLUME“ für einige 2α bei fixiertem Wert K erhalten wurden, gestatten die Abschätzung der Grenze des Übergangs von flachen Paneelen zu nichtflachen (Auseinandergehen der Belastungsdiagramme – vergl. Bild 9). Im Bereich $2\alpha < 41^\circ$ ist die Abweichung zwischen der oberen und unteren kritischen Belastung (p_1^* und p_2^*) kleiner als 5% (Bild 10). Dieser Bereich unterscheidet sich von der bekannten Abschätzung nach A. S. Volmir [5].

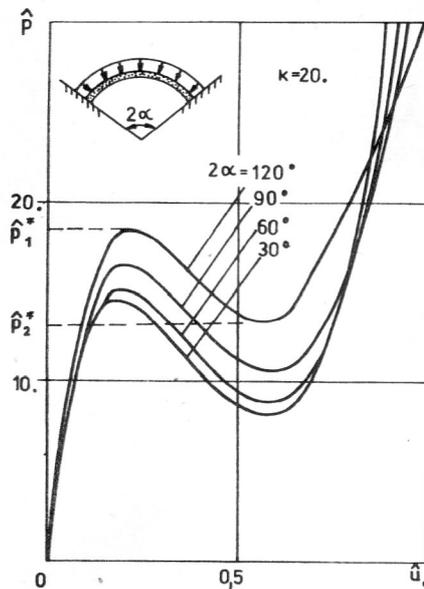


Bild 9
Belastungsdiagramm für dünne Paneele bei verschiedenen Öffnungswinkeln

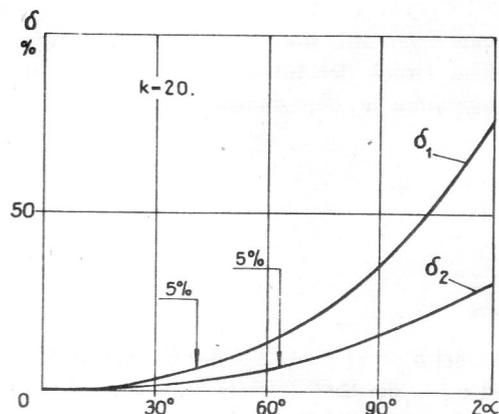


Bild 10
Relative Abweichung der Belastungsdiagramme für die jeweils oberen bzw. unteren kritischen Belastungswerte bei dünnen Paneelen (δ_1 entspricht den oberen Werten, δ_2 – den unteren)

Zum Vergleich mit den Ergebnissen der bereits erwähnten Arbeiten [13], [14] wurde die symmetrische Deformation einer Serie von flachen (vom Standpunkt der erhaltenen Abschätzungen aus) Paneelen mit einem Öffnungswinkel $2\alpha = 30^\circ$ und einem Wert für den Krümmungsparameter $K < 20,2$ betrachtet.

Die Belastungsdiagramme, die numerisch für Paneele geringer Dicke ermittelt wurden, überschneiden sich in den 2 Knotenpunkten A und B (Bild 11). Die Koordinaten dieser Punkte stimmen befriedigend mit der Lösung in [13] (Tabelle 2) überein.

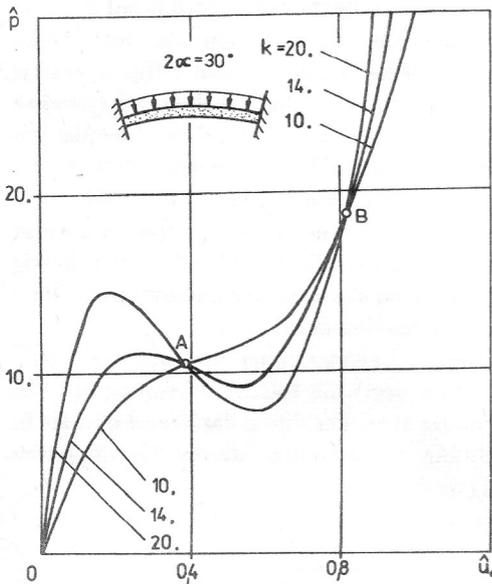


Bild 11
Symmetrische Deformation flacher, dünner Paneele

Tabelle 2
Vergleich mit den Ergebnissen aus [13] (Theorie flacher, dünner Schalen)

Knotenpunkte im Diagramm	Koordinaten der Knotenpunkte	VOLUME	[13]	Abweichung d. Ergebnisse
A	\hat{u}_0	0,390	0,405	4 %
	\hat{p}	10,50	9,87	6 %
B	\hat{u}_0	0,830	0,811	2 %
	\hat{p}	18,60	19,74	6 %

Zur Abschätzung der Anwendungsgrenzen der Theorie dünner, flacher Schalen [17] und der Theorie flacher Schalen mittlerer Dicke [2] für die Berechnung elastomerer Paneele wurden die Ergebnisse in [13], [14] und des Programms „VOLUME“ für einen großen Wertebereich der bezogenen Dicken verglichen. Die Belastungsdiagramme, die für kleine Werte des Parameters K (große Dicke) ermittelt wurden, sind praktisch linear (Bild 12). Damit ist es zulässig, einen Vergleich mit dem Wert der Anfangssteifigkeit durchzuführen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 dargestellt, wobei der Dickegrad des Paneels durch das Verhältnis der Dicken κ zur Bogenlänge der

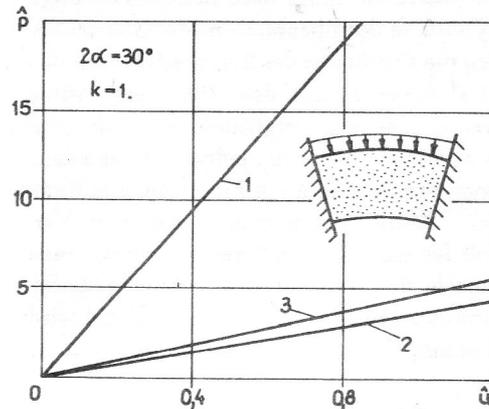


Bild 12
Belastungsdiagramm für flache, dicke Paneele (1 – Theorie flacher, dünner Schalen [13], 2 – Theorie flacher Schalen mittlerer Dicke [14], 3 – Elastizitätstheorie für inkompressibles, hochelastisches Material – Programm „VOLUME“)

Tabelle 3
Steifigkeitsparameter für flache, dicke Paneele ($2\alpha = 30^\circ$) nach „VOLUME“, [13] (Theorie flacher, dünner Schalen) und [14] (Theorie flacher Schalen mittlerer Dicke)

K	$\frac{\kappa}{2\alpha\rho_0}$	\bar{D}_0		
		VOLUME	[13]	[14]
10	0,052	64,5	63,1	63,9
6	0,087	38,4	35,8	36,6
4	0,131	30,4	24,8	25,8
2	0,262	25,5	12,2	13,0
1,5	0,350	24,9	8,25	9,94
1	0,524	24,4	4,32	5,78
0,5	1,053	24,2	1,21	1,58

Tabelle 4
Parameter der Anfangssteifigkeit bei einem Öffnungswinkel $2\alpha = 30^\circ$, ermittelt nach „VOLUME“ unter Einbeziehung der Hypothesen des Ebenbleibens des Querschnitts

K	$\kappa / 2\alpha\rho_0$	D_0
10	0,052	64
6	0,087	36,8
4	0,131	26,4
2	0,262	13,8
1,5	0,350	9,6
1	0,524	5,22
0,63	1,194	2,4
0,5	1,053	1,67
0,42	1,256	1,28
0,33	1,572	0,97

Mittelfläche $2\alpha\rho_0$ gekennzeichnet wird. Der Vergleich der Ergebnisse läßt folgende Schlußfolgerungen zu:

- Die Anwendung der Theorie dünner, flacher Schalen auf die Berechnung elastomerer Paneele ergibt für den Bereich $\kappa/2\alpha\rho_0 < 0,09$ eine Abweichung von weniger als 5 %, womit man im Bereich der ingenieurmäßigen Genauigkeit liegt.
- Der analoge Bereich für die verbesserte Theorie flacher Schalen (Berücksichtigung des Querschubs nach dem Timoschenko-Modell) ist doppelt so groß, d. h. $\kappa/2\alpha\rho_0 < 0,18$.

Weiterhin interessierte die Frage nach den Anwendungsgrenzen der Hypothese des Ebenbleibens der Querschnitte. Dazu werden die Ergebnisse der Berechnung nach dieser Hypothese (Tabelle 4) mit den früher ermittelten Ergebnissen (vergl. Tabelle 3) verglichen, wobei der gleiche Algorithmus betrachtet wird, jedoch verschiedene Approximationen der unbekannt Funktionen in Richtung der radialen Koordinate auftreten. Aus dem Vergleich folgt, daß für einen großen Bereich der bezogenen Dicken der Paneele der Unterschied zur Anfangssteifigkeit in der Größenordnung von 10 % liegt. Dabei wird eine ingenieurmäßige Genauigkeit von 5 % für $\kappa/2\alpha\rho_0 < 0,22$ erreicht.

Die nichtsymmetrische Deformation flacher Paneele wird am Beispiel eines Kreiszylinderpaneels mit den geometrischen Parametern $2\alpha = 30^\circ$, $K = 40$ ermittelt. Dieses Beispiel ist auch in einer früheren Arbeit [12] analysiert worden, wobei dort der Ausgangspunkt die Theorie dünner, flacher Schalen war.

Die Ergebnisse entsprechend den Lösungen nach dem Programm „VOLUME“ für verschiedene Parameterwerte e sind auf Bild 13 angeführt. e kennzeichnet eine kleine Anfangsasymmetrie des Paneels in der Form (29). Zum Vergleich ist auch das Diagramm für die symmetrische Deformation dargestellt. Es muß angemerkt werden, daß das Diagramm für die nichtsymmetrische Deformation stark vom Wert des „Anfangseffektes“ der Geo-

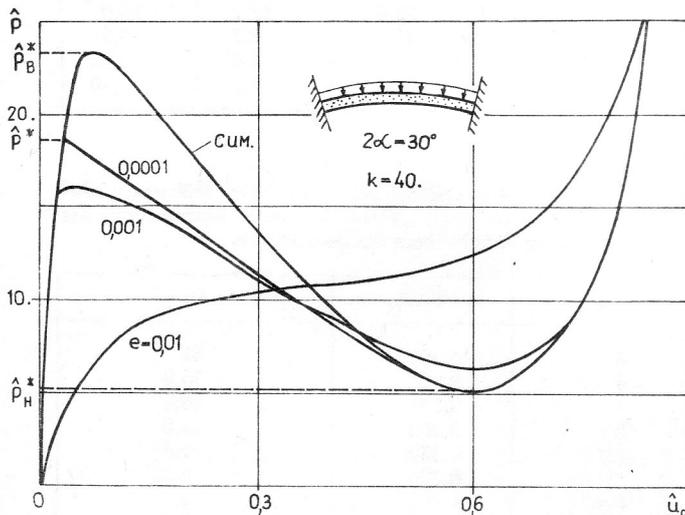


Bild 13
Nichtsymmetrische Deformation flacher, dünner Paneele bei verschiedenen Asymmetrien (Parameter e)

Tabelle 5
Vergleich der Werte für die kritischen Belastungen nach „VOLUME“ und [12]

Belastungsparameter	VOLUME		[12]
	hydrostatisch	radial	
\hat{p}_1^*	23,2	22,8	22,7
\hat{p}^*	18,7	19,2	19,1
\hat{p}_2^*	5,2	4,9	4,8

metrie abhängt. Dabei kommt es bei einer Abweichung von der anfänglichen Kreisform um mehr als 1 % beim Belastungsprozeß nicht mehr zum Durchschlagen.

Der Vergleich mit den Ergebnissen der bereits erwähnten Arbeiten [12] wurde für den Wert des Belastungsparameters in den charakteristischen Punkten des Belastungsdiagramms (Tabelle 5) durchgeführt. Um einen korrekteren Vergleich zu haben, wurden zusammen mit der Lösung für die hydrostatische Belastung auch die Werte für radialen Druck (entsprechend der Arbeit [12]) angeführt. Unterschiede im Charakter der einwirkenden Belastungen wirkten sich hauptsächlich auf den Wert des unteren kritischen Drucks \hat{p}_2^* aus: die Abweichungen in den Ergebnissen verringerten sich von 8 % auf 2 %.

Die nichtsymmetrische Deformation für nichtflache Paneele geringer Dicke wurde für den Öffnungswinkel $2\alpha = 180^\circ$ analysiert. Die dabei erhaltenen Ergebnisse (Bild 14) zeugen von einem stabilen Charakter der anfänglichen überkritischen Deformationen. Dies ist ein qualitativer Unterschied zum Verhalten von flachen Paneelen (vergl. Bild 13). Ein analoger Effekt wurde in [24] bei der Analyse nichtflacher Paneele mit gelenkig gelagerten Rändern im Rahmen der nichtlinearen Theorie dünner Schalen beschrieben.

Hier und nachfolgend kennzeichnet der Parameter τ (wie bereits früher festgelegt) die relative Änderung des Volumens des Hohlraumes, der durch das Paneel und die in radialer Richtung verlaufenden starren Grundplatten gebildet wird (vergl. Bild 14).

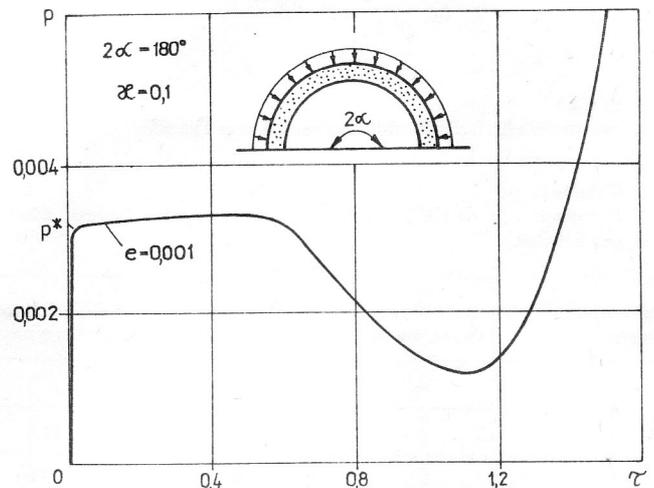


Bild 14
Nichtsymmetrische Deformation flacher Paneele mit stabilem nachkritischen Verhalten

Der Einfluß des Dickenparameters auf den Wert der kritischen Belastung p^* wurde mit Hilfe von Verbesserungen für die Lage des kritischen Lösungspunktes (Bild 15) am Beispiel der Berechnung verschiedener Paneele mit dem Winkel $2\alpha = 180^\circ$ (Tabelle 6) untersucht. Hier sind zum Vergleich auch Werte angeführt, die nach der technischen Theorie [9] ermittelt wurde. Für den Bereich der bezogenen Dicken $\kappa/\rho_0 < 0,16$ betrug der Unterschied in den Ergebnissen weniger als 5 %, womit auch die Anwendungsgrenzen der technischen Stabilitätstheorie für

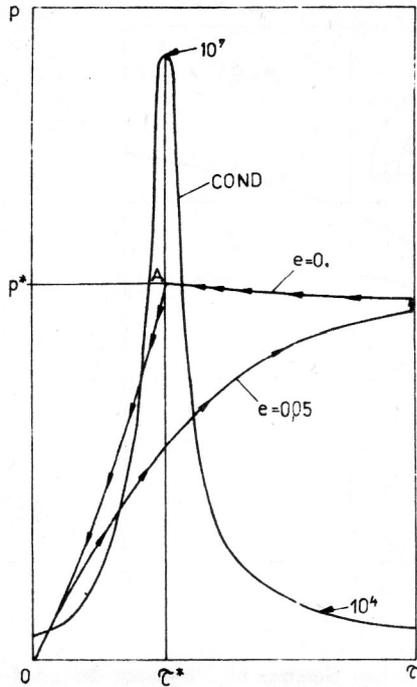


Bild 15
 Schema zur Verbesserung der kritischen Belastung nach dem Wert der Kondition des zu lösenden Gleichungssystems (COND). Die Pfeile geben die Bewegungsrichtung auf dem Belastungsdiagramm an.

Tabelle 6
 Parameter der kritischen Belastung für die nichtsymmetrische Deformation eines Paneels mit einem Öffnungswinkel $2\alpha = 180^\circ$, ermittelt nach „VOLUME“ und [20] (technische Theorie)

K	ρ	κ / ρ_0	p^*	
			VOLUME	[20]
100	0,906	0,099	$2,63 \cdot 10^{-3}$	$2,57 \cdot 10^{-3}$
50	0,820	0,197	$2,19 \cdot 10^{-2}$	$2,05 \cdot 10^{-2}$
30	0,718	0,333	$1,10 \cdot 10^{-1}$	$9,51 \cdot 10^{-2}$
20	0,604	0,494	$4,23 \cdot 10^{-1}$	$3,21 \cdot 10^{-1}$

nichtflache Bogenstreifen [20] auf die Berechnung des kritischen Drucks für hochelastische Paneele definiert sind.

In der Einleitung wurde erwähnt, daß in der Theorie dünner, flacher Schalen das geometrische Gebiet der Paneele bestimmt wird, welches sich symmetrisch deformiert ($K < 20,2$). Es sei hier angemerkt, daß der Begriff „flach“ auf Paneele mit einem Öffnungswinkel $2\alpha < 41^\circ$ ausgedehnt wird. Jetzt wird das Gebiet der symmetrisch deformierten Paneele ohne Beschränkung des Öffnungswinkels ermittelt. Dazu wurden numerische Berechnungen für Paneele mit Öffnungswinkeln $2\alpha = 90^\circ/120^\circ/150^\circ/170^\circ$ bei verschiedenen Krümmungsparametern durchgeführt.

Auf Bild 16 ist das Belastungsdiagramm für eine Serie von Paneelen mit $2\alpha = 150^\circ$ dargestellt, wobei qualitative Unterschiede der Diagramme für $K = 25$ und 27 sowie $K = 28$ und 30 auftreten. Nachfolgend wurden die Intervalle halbiert, um die Grenzen zu verbessern (Bild 17). Der Kurve $K = 27,5$ entspricht die symmetrische Defor-

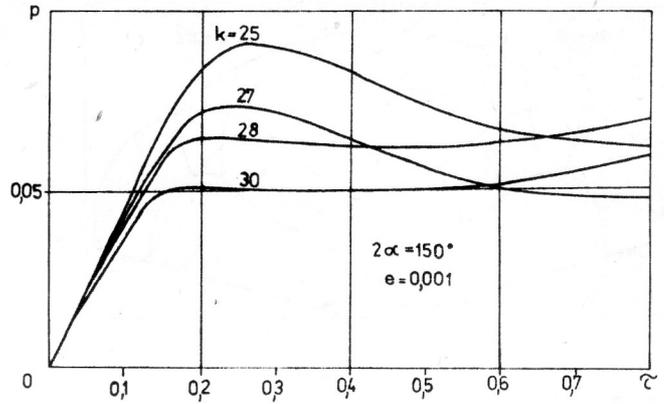


Bild 16
 Qualitative Unterschiede in den Belastungsdiagrammen für verschiedene Krümmungsparameter

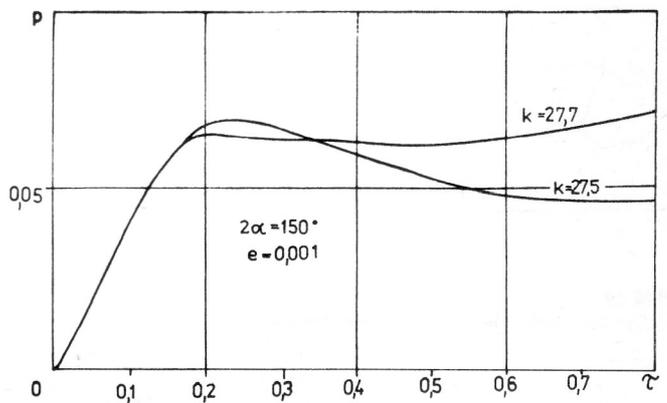


Bild 17
 Symmetrische und unsymmetrische Deformation von Paneelen bei nahezu gleichen Krümmungsparametern

mationsform (Bild 18). Auf Bild 19 ist die unsymmetrische Deformationsform dargestellt. Die Grenze der symmetrischen Deformation des Paneels, die mit einer analogen Vorgehensweise auch für andere Öffnungswinkel des Paneels ermittelt wurde, ist auf Bild 20 gezeigt. Hier ist zum Vergleich eine Kurve dargestellt, die dem Wert $K = 20,2$ für die Theorie dünner Schalen entspricht. Wie zu sehen ist, stimmt das numerische Ergebnis nach der Elastizitätstheorie für inkompressible hochelastische Körper gut mit dem Ergebnis nach der technischen Theorie im Bereich der bezogenen Dicken $\kappa < 0,05$ und des Öffnungswinkels $2\alpha < 60^\circ$ überein. Im aufgezeigten Bereich beträgt der Unterschied nicht mehr als 10%.

Alle bisher angeführten Ergebnisse, die mit der Berechnung zylindrischer Paneele verbunden sind, wurden für neohookesches Material (Treloaresches Potential) erhalten. Die Anwendung anderer nichtlinearer physikalischer Gesetze führt auf folgende Ergebnisse:

- Bei der Aufgabe über das „Aufblähen“ des Paneels durch Innendruck erhält man qualitative Unterschiede in den Belastungsdiagrammen für verschiedene elastische Potentiale. Beispielsweise zeigt das numerische Ergebnis für das Potential von Bartenev-Chasanovič, daß das Paneel mit einem Öffnungswinkel $2\alpha = 180^\circ$ und einer bezogenen Dicke $\kappa = 0,3$ keine zusätzlichen

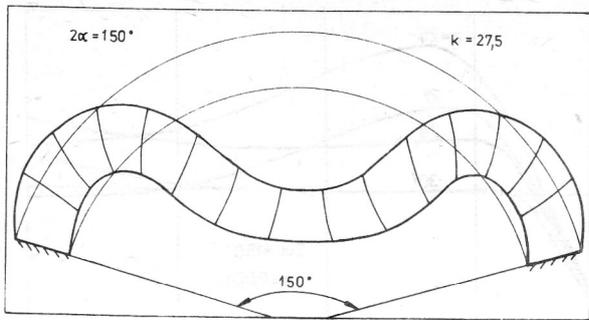


Bild 18
Symmetrische Deformation eines Panels

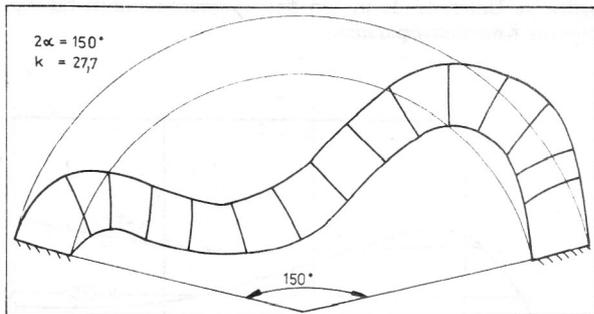


Bild 19
Unsymmetrische Deformation eines Panels

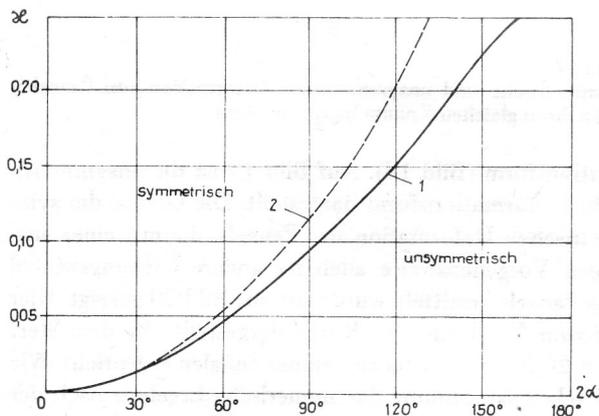


Bild 20
Grenze des Gebietes der symmetrischen Deformation des Panels: 1 – nach „VOLUME“, 2 – nach der Theorie flacher, dünner Schalen ($K = 20,2$)

Belastungen bei einer Erhöhung des eingeschlossenen Volumens um das 5 – 6fache aufnehmen kann (Bild 21).

Das Zusammendrücken eines nichtflachen Panels ($2\alpha = 120^\circ$) bei Außendruck für den Fall recht großer bezogener Dicken ($\kappa = 0,71$) führt zu keinen qualitativen Unterschieden in den Belastungsdiagrammen bei Verwendung elastischer Potentiale des Typs (11) bei verschiedenen Exponenten α für die relativen Verlängerungen λ (vergl. Bild 22). Dabei beträgt der maximale quantitative Unterschied für die Belastung weniger als 20%. Damit

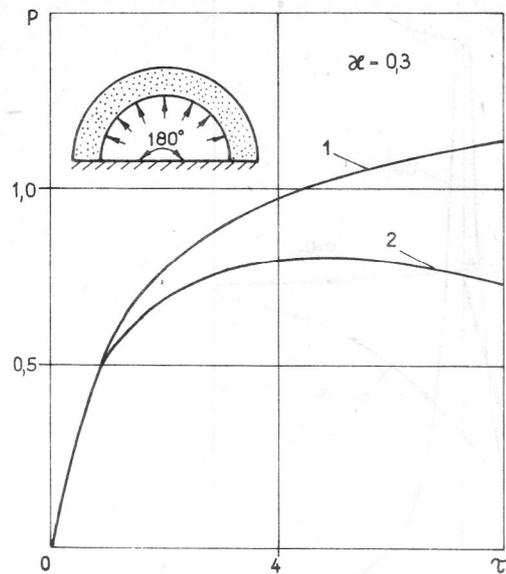


Bild 21
Einfluß des physikalischen Gesetzes im Diagramm des „Aufblähens“ eines nichtflachen Panels (1 – Treloare-Potential, 2 – Potential von Bartenev-Chasanovic)

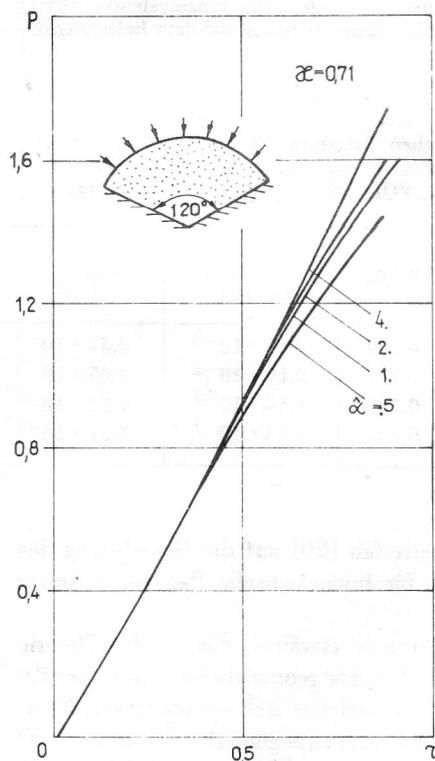


Bild 22
Diagramm des Zusammendrückens nichtflacher Paneele für elastische Potentiale mit verschiedenen Exponenten α bei relativen Verlängerungen λ

liegt das Ergebnis im Bereich der Genauigkeitsgrenzen für den Schubmodul des Materials. Folglich ist für die betrachtete Aufgabenklasse des Zusammendrückens von Paneelen die Anwendung des einfachsten nichtlinearen physikalischen Gesetzes, welches dem neohookeschen Material entspricht, gerechtfertigt.

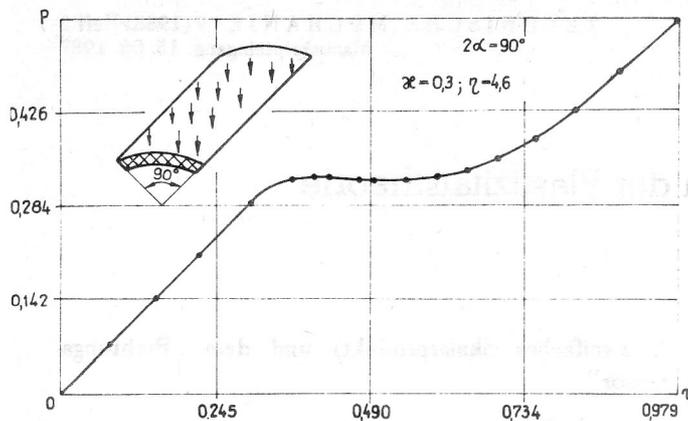


Bild 23
Belastungsdiagramm für ein Paneel endlicher Länge (dreidimensionale Deformation)

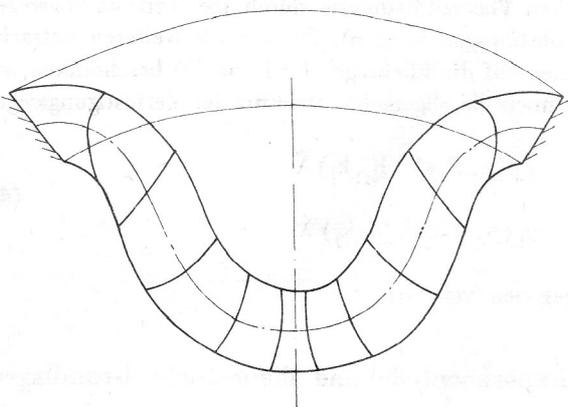


Bild 24
Querschnitt durch die Mitte (in Längsrichtung) des Paneels (Belastungsniveau $p = 0,568$, relative Volumenänderung $\tau = 0,980$)

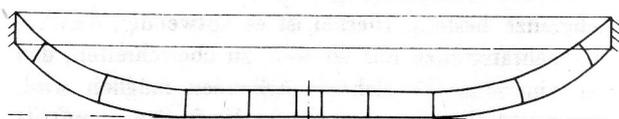


Bild 25
Längsschnitt durch die Mitte (in Querrichtung) des Paneels (Belastungsniveau und relative Volumenänderung s. Bild 24)

Eine dreidimensionale Deformation für ein Paneel wird an einem Beispiel berechnet, um die Möglichkeiten des numerischen Verfahrens zu demonstrieren. Wie in den vorhergehenden Fällen werden die Längsränder als unbeweglich angesehen. In der Schalentheorie wird dieser Typ der Randbedingungen als Einspannung bezeichnet. Folgendes Paneel soll betrachtet werden: Öffnungswinkel $2\alpha = 90^\circ$, Verhältnis der Dicke zum äußeren Radius $\kappa = 0,3$ und Verhältnis der Länge zum äußeren Radius $\eta = 4,6$. Es war bereits gezeigt worden, daß die ebene Deformation des Paneels mit diesen geometrischen Abmessungen des Querschnitts symmetrische Form hat. Daher wird auch hier nur die symmetrische Deformationsform (in Querschnittsrichtung und in Längsschnittsrichtung)

betrachtet. Die Belastung des Paneels erfolgt durch äußeren hydrostatischen Druck.

Alle Rechnungen wurden auf der Grundlage des Programms „VOLUME“ auf der EDVA ES-1045 mit dem Betriebssystem OS realisiert. Eine Abschätzung der numerischen Konvergenz ermöglichte die Begrenzung der Anzahl der Koordinatenfunktionen in der Approximation (23):

$$n_{11} = 3, n_{12} = 4, n_{13} = 4, n_{21} = 2, n_{22} = 3, n_{23} = 4, \\ n_{31} = 2, n_{32} = 4, n_{33} = 4, n_{41} = 2, n_{42} = 4, n_{43} = 5.$$

Die Gesamtanzahl der Unbekannten ist damit 145. Die Berechnungszeit für ein vollständiges Belastungsdiagramm, wie es auf Bild 23 zu sehen ist, liegt unter 30 Minuten. Die Anzahl der Schritte nach dem Fortsetzungsparameter (sie sind im Diagramm durch Punkte gekennzeichnet) ist gleich 17. Der Berechnungsablauf ist einschließlich der Wahl des Anfangsschrittes bzw. der weiteren Schritte vollständig automatisiert. Auf den Bildern 24 und 25 sind deformierte Konfigurationen für einen Quer- und einen Längsschnitt des Paneels gezeigt. Außerdem sind im Programm Ausdruck der Wertetabellen und Verschiebungs-, Deformations- und Spannungsverläufe in den Knotenpunkten des Integrationsnetzes vorgesehen. Im vorliegenden Beispiel liegt die Gesamtknotenanzahl für die Integration eines Viertels des Paneels (aufgrund der Symmetrie genügt dies) bei 108. Alle Rechnungen wurden mit doppelter Genauigkeit ausgeführt.