

# Zur Verifikation der Normalenregel in der Plastizitätstheorie

Reiner Kreißig, Joachim Schindler

## 1. Konstitutive Gleichungen der klassischen Plastizitätstheorie

Das Postulat der Fließgrenze, d. h. die Annahme der Existenz einer Fließfläche im  $\underline{\sigma}$ ,  $\vartheta$ -Spannungs-Temperatur-Raum, dargestellt durch die Fließfunktion (Fließbedingung)

$$F(\underline{\sigma}, \vartheta, \underline{h}_i, k_j) = 0 \quad (1)$$

bildet die fundamentale Basis der klassischen Plastizitätstheorie [1]. Die durch (1) definierte Fließfläche begrenzt den konvexen Fließkörper, dessen innere Punkte ( $F < 0$ ) Spannungszustände im elastischen Bereich und dessen Randpunkte ( $F = 0$ ) Spannungszustände an der jeweiligen Fließgrenze repräsentieren [2]. Im Rahmen des Konzepts der inneren Variablen wird mit den in  $F$  als Argumente auftretenden Funktionen  $\underline{h}_i$  und  $k_j$  der Einfluß der Belastungsgeschichte im plastischen Bereich erfaßt (vgl. [3]). Dabei sind die inneren Variablen  $k_j$  Skalare und die  $\underline{h}_i$  symmetrische Tensoren zweiter Stufe, aus denen sich durch Tensormultiplikation mit und ohne Verjüngung Tensoren beliebiger Stufe bilden lassen.

Aus der Verallgemeinerung des einachsigen Zug-Druck-Versuches im plastischen Bereich (Zusammenhang zwischen dem plastischen Anteil der Deformations- und der Spannungsgeschwindigkeit) entsteht eine weitere Grundgleichung, die Fließregel

$$\underline{d}^{pl} = \dot{\lambda} \underline{p} \quad (2)$$

Während  $\dot{\lambda}$  eine skalare Funktion des augenblicklichen Zustands und der Belastungsgeschwindigkeit

$$\dot{\lambda} = f(\underline{\sigma}, \vartheta, \underline{h}_i, k_j, \dot{\underline{\sigma}}, \dot{\vartheta})$$

verkörpert, legt der Einheitstensor  $\underline{p}$  die „Richtung“ des plastischen Anteils des Deformationsgeschwindigkeitstensors  $\underline{d}^{pl}$  fest. Wird die Gültigkeit des Prinzips vom Maximum der plastischen „Arbeit“ vorausgesetzt, stimmen die Richtungen von  $\underline{d}^{pl}$  und der Normalen zur Fließfläche  $F = 0$  im momentanen Belastungspunkt  $\underline{\sigma}$  überein. Daraus folgt eine spezielle Form von (2), die sogenannte Normalenregel oder assoziierte Fließregel

$$\underline{d}^{pl} = \frac{\dot{\lambda}}{q} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3)$$

mit

$$q = \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(. . zweifaches Skalarprodukt) und dem „Richtungstensor“

$$\underline{p} = \frac{1}{q} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}$$

Entsprechend (3) ist die Fließfunktion (1) gleichzeitig eine plastische Potentialfunktion.

Vervollständigt werden die Grundgleichungen der klassischen Plastizitätstheorie durch die Verfestigungsregel (Evolutionsgleichungen). Da sich die weiteren Betrachtungen auf die Fließregel der Form (3) beschränken, sei nur noch die allgemeine Struktur der Verfestigungsregel

$$\dot{\underline{h}}_i = \underline{f}_i(\underline{\sigma}, \vartheta, \underline{\epsilon}^{pl}, \underline{h}_i, k_j) \dot{\lambda} \quad (4)$$

$$\dot{k}_j = g_j(\underline{\sigma}, \vartheta, \underline{\epsilon}^{pl}, \underline{h}_i, k_j) \dot{\lambda}$$

angegeben (vgl. [4]).

## 2. Experimentelle und theoretische Grundlagen

Zur Erfassung der Anfangs- und Verformungsanisotropie des Tiefziehblechs StTZuA2 wurden im zweiachsigen Hauptspannungszustand Fließortkurven experimentell ermittelt [5]. In allen Versuchen erfolgte die Definition der Fließgrenze mittels der Prandtl-Idealisierung, welche in der Gleichsetzung von Proportionalitäts- und Fließgrenze besteht. Hierbei ist es notwendig, die Proportionalitätsgrenze nur so weit zu überschreiten, daß zwar einerseits ihr sicheres Erkennen möglich wird, andererseits aber keine zu große Verfestigung auftritt (Bild 1). Auf Grund der sehr kleinen Verzerrungen in diesen Versuchen bestehen zwischen den wahren Hauptspannungen  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$  (Koordinaten des Cauchyschen Spannungstensors) sowie den technischen Spannungen keine signifikanten Unterschiede. Nach dem Aufbringen der Vorverformungen als Voraussetzung

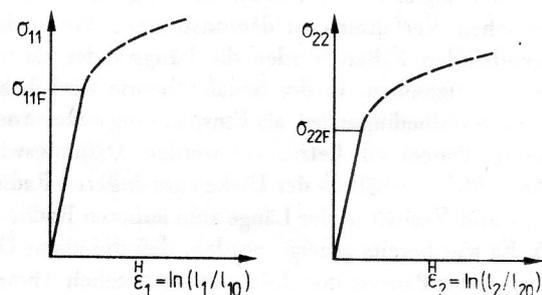


Bild 1  
Annahme der Identität von Proportionalitäts- und Fließgrenze

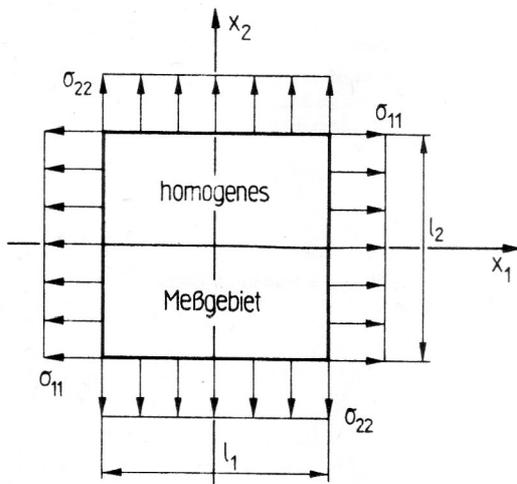
für die Messung von Folgefließortkurven müssen jedoch bei der Berechnung der Spannungen die aktuellen Querschnittsflächen der entsprechenden Verformungsstufe erfasst werden.

Unter Verwendung raumfester, kartesischer Koordinaten (Eulersche Betrachtungsweise) lauten die Koordinaten des Deformationsgeschwindigkeitstensors

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

( $v_i$  Koordinaten des augenblicklichen Geschwindigkeitsfeldes  $\underline{v}(x, t)$ ). Mit  $v_1(x_1 = l_1/2) = \dot{l}_1/2$  und  $v_2(x_2 = l_2/2) = \dot{l}_2/2$  erhält man im Bereich der Gleichmaßdehnung (Bild 2)

$$d_{11} = \dot{l}_1/l_1, \quad d_{22} = \dot{l}_2/l_2. \quad (5)$$



**Bild 2**  
Homogenes Meßgebiet unter zweiachsiger Zugbelastung

Da es sich bei der Überschreitung der Fließgrenze zwecks ihrer Definition lediglich um kleine Änderungen im gleichen Zeitintervall handelt, können  $d_{11}$  und  $d_{22}$  durch die Zuwächse des Henckyschen Verzerrungsmaßes

$$\Delta \epsilon_1^H = \Delta l_1/l_1, \quad \Delta \epsilon_2^H = \Delta l_2/l_2 \quad (6)$$

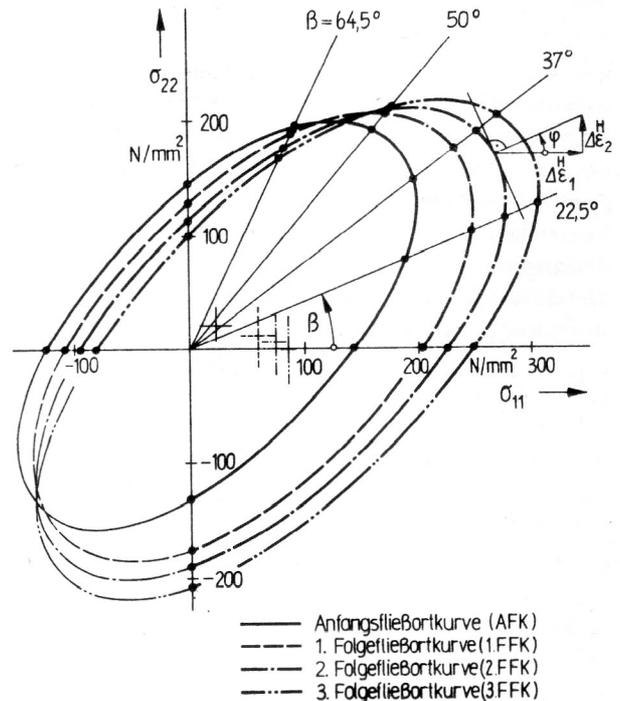
mit den Längen  $l_1$  und  $l_2$  zu Beginn des Belastungsschrittes genähert werden. In den Experimenten lassen sich natürlich nur die Änderungen der Gesamtverzerrungen messen, so daß ihre Trennung der konstitutiven Annahme

$$\Delta \epsilon_i^{Hpl} = \Delta \epsilon_i^H - \Delta \epsilon_i^{Hel} \quad (7)$$

bedarf. Es erscheint als gerechtfertigt, die sehr kleinen, elastischen Verzerrungsänderungen mit Hilfe des erweiterten Hookeschen Gesetzes zu berechnen. Eine Elimination der  $\Delta \epsilon_i^{Hel}$  durch Wegnahme der Belastungssteigerung war infolge der beim Entlastungsvorgang undefinierten Reibungsverhältnisse der eingesetzten Prüfmaschine nicht möglich.

### 3. Versuchsauswertung

Von den vorliegenden, experimentellen Ergebnissen [5], [6] wurde hinsichtlich der Gültigkeit der Normalenregel nur der Vorbelastungsweg einachsiger Zug in Walzrichtung ( $x_1$ -Richtung) ausgewertet, weil hier neben der Anfangsfließortkurve drei Folgefließortkurven vorlagen (Bild 3). Zur Approximation der Meßpunkte der Fließortkurven auf der Basis eines vollständigen, quadratischen Ansatzes der Fließfunktion



**Bild 3**  
Anfangsfließortkurve und Folgefließortkurven bei einachsiger Vorbelastung in Walzrichtung

**Tabelle 1**  
Theoretische und experimentelle Neigungswinkel  $\varphi$  der Fließortkurven nach Bild 3 (Angaben in Grad)

$\beta$	AFK		1.FFK		2.FFK		3.FFK	
	$\varphi_{th}$	$\varphi_{ex}$	$\varphi_{th}$	$\varphi_{ex}$	$\varphi_{th}$	$\varphi_{ex}$	$\varphi_{th}$	$\varphi_{ex}$
0	-35,5	-36,1	-32,0	-29,4	-33,4	-35,7	-33,4	-35,1
22,5	-18,7	-21,5	-6,7	-9,5	-8,5	-9,4	-7,5	-11,6
37	18,1	15,7	39,1	39,4	46,4	48,9	60,6	63,5
50	68,2	64,8	87,8	83,6	102,7	98,1	108,0	104,0
64,5	107,5	102,9	114,6	111,1	120,6	124,0	124,2	120,1
90	126,7	125,2	130,7	132,1	132,8	136,7	134,5	137,4

$$F(\bar{\sigma}_{ij}) = K_1 \bar{\sigma}_{11}^2 - 2\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} + K_3 \bar{\sigma}_{22}^2 + 2K_4 \bar{\sigma}_{11} + 2K_5 \bar{\sigma}_{22} + K_6 = 0 \quad (8)$$

( $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_{11FO}$ ,  $\sigma_{11FO}$  Anfangsfließspannung in Walzrichtung) dienten verschiedene Methoden [6].

Mit den nunmehr bekannten Materialkennwerten konnten die theoretischen Neigungswinkel  $\varphi_{th}$  der Normalen der Fließortkurven ermittelt werden. Für die Festlegung der experimentellen Werte  $\varphi_{ex}$  in den Schnittpunkten der Fließortkurven mit den unter den Winkeln  $\beta$  geneigten Belastungsgeraden bildete die in 2. beschriebene Vorgehensweise die Grundlage.

Wie der Vergleich dieser in der Tabelle 1 gegenübergestellten Winkel ergibt, erreichen die Abweichungen nur in 20 % der untersuchten Punkte den Bereich  $\Delta\varphi = 4,0$  bis  $4,6^\circ$ . Auf Grund der Genauigkeitsgrenzen des eingesetzten Meßverfahrens [6] und der unterschiedlichen Vorzeichen der Fehler dürfen die Ergebnisse als eine Bestätigung der Gültigkeit der Normalenregel für das Tiefziehblech StZuA2 und den betrachteten Belastungsweg gewertet werden.

## LITERATUR

- [1] Phillips, A.: The foundations of plasticity. In: Massonet, Ch., Olszak, W., Phillips, A.: Plasticity in structural engineering. Fundamentals and applications. (CISM, No. 241). Wien - New York: Springer 1979.
- [2] Kreißig, R.: Some considerations on the yield condition in the theory of plasticity. Acta Mechanica 55, 41 - 53 (1985).
- [3] Lubliner, J.: On the structure of the rate equations of materials with internal variables. Acta Mechanica 17, 109 - 119 (1973).
- [4] Axelsson, K.: On constitutive modelling in metal plasticity. Göteborg: University of Technology. Publication 79:2 (1979).
- [5] Kreißig, R., J. Schindler: Some experimental results on yield condition in plane stress state. Acta Mechanica 65, 169 - 179 (1986).
- [6] Schindler, J.: Experimentelle Ermittlung von Anfangs- und Folgefließortkurven für ein Tiefziehblech. TU Karl-Marx-Stadt, Dissertation A 1985.