

# Die Schubstabilität rechteckiger Sandwichplatten mit weichem Kern beliebiger Dicke

Kurt Eschke und Franciszek Romanow

## 1. Einleitung

Die üblichen Berechnungsverfahren für Sandwichkonstruktionen gehen von der Kirchhoff-Love-Hypothese aus und vernachlässigen die Querdehnungen des Kerns. Das damit erhaltene Verformungsgesetz der gebrochenen Normalen gilt nur für dünne Konstruktionen, die die Bedingung

$$\pi^2 E_c / G_c (1 - \nu_c^2) a^2 < 1$$

erfüllen.

Bei dickem Kern muß man die Querdehnung berücksichtigen.

So wird in [5] der dreiaxige Verformungszustand des Kerns direkt aus den allgemeinen Navierschen Gleichungen der Elastizitätstheorie berechnet. Es zeigt sich, daß die Kernverschiebungen in Abhängigkeit von der Dickenkoordinate einem hyperbolischen Gesetz folgen, das durch experimentelle Untersuchungen voll bestätigt wird. Mit dieser verallgemeinerten Theorie wird in [6] die Druckstabilität dreischichtiger Sandwichplatten berechnet und nachgewiesen, daß die Theorie auf Konstruktionen beliebiger Kerndicke anwendbar ist.

Unter Verwendung des hyperbolischen Verformungsgesetzes wird in der vorliegenden Arbeit der für die Praxis wichtige Anwendungsfall der Stabilität bei Schubbeanspruchung untersucht. Das Material der einzelnen Schichten wird als homogen und elastisch-isotrop vorausgesetzt. Die dünnen festen Deckschichten, die die äußere Belastung aufnehmen, sind durch einen Kern beliebiger Dicke aus leichtem Material miteinander verbunden. Die Ableitung der Stabilitätsgleichungen erfolgt mit der Energiemethode.

## 2. Die potentielle Energie der Sandwichplatte beim Ausbeulen

Für konservative Systeme gilt das energetische Stabilitätskriterium

$$\delta(\Delta\Pi) = 0 \quad (1)$$

$\Delta\Pi$  ist die Änderung des Gesamtpotentials der Sandwichplatte beim Übergang vom ebenen Grundzustand zum ausgebeulten Nachbarzustand. Sie setzt sich zusammen aus den elastischen Anteilen des Kerns und der Deckschichten sowie aus dem Anteil der äußeren Schubkräfte, die gleichmäßig verteilt an beiden Deckschichten angreifen.

$$\Delta\Pi = \Delta\Pi_c^{(i)} + \Delta\Pi_d^{(i)} + \Delta\Pi^{(a)} \quad (2)$$

Es gilt das verallgemeinerte Hookesche Gesetz, die Materialkonstanten sind  $E_c, G_c, \nu_c$  für den Kern und  $E, G, \gamma$  für die Deckschichten

u. v. w Verschiebungen beim Ausbeulen in Richtung der Koordinaten x, y, z

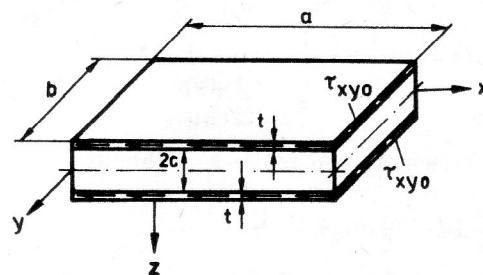


Bild 1  
Beispiel einer Sandwichplatte mit Bezeichnungen

Für die Potentialänderung im Kern erhält man

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_c^{(i)} = & G \int_0^a \int_0^b \int_{-c}^c \left[ \frac{\nu_c}{1-2\nu_c} (\epsilon_{xc}^2 + \epsilon_{yc}^2 + \epsilon_{zc}^2) \right. \\ & \left. + \epsilon_{xc}^2 + \epsilon_{yc}^2 + \epsilon_{zc}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{yzc}^2 + \gamma_{zxc}^2) \right] dx dy dz \quad (3) \end{aligned}$$

mit den Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen

$$\epsilon_{xc} = u_{c,x}, \quad \epsilon_{yc} = v_{c,y}, \quad \epsilon_{zc} = w_{c,z},$$

$$\gamma_{xyc} = u_{c,y} + v_{c,x},$$

$$\gamma_{yzc} = v_{c,z} + w_{c,y}, \quad \gamma_{zxc} = w_{c,x} + u_{c,z}.$$

Potentialänderung beider Deckschichten

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_d^{(i)} = & \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_{xd} \epsilon_{xd} + \sigma_{yd} \epsilon_{yd} \\ & + \tau_{xyd} \gamma_{xyd}) dx dy dz \quad (4) \end{aligned}$$

mit

$$\epsilon_{xd} = u_{d,x}, \quad \epsilon_{yd} = v_{d,y}, \quad \gamma_{xyd} = u_{d,y} + v_{d,x}.$$

Änderung des Potentials der äußeren Kräfte

$$\Delta \Pi^{(a)} = -2 \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy0} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (5)$$

mit

$$\gamma_{xy} = w_{d,x} w_{d,y} - 2\tau_{xy0} \quad t = q.$$

Für die Verschiebungen wird das in [5] abgeleitete hyperbolische Verformungsgesetz benutzt. Die Querver-schiebungen der beiden Deckschichten sind einander gleich, aber ungleich der Mittelflächenverschiebung des Kerns.

$$w_1 = w_2 = w(x, y) > w_0$$

Deckschichten

$$\begin{aligned} u_{d\alpha} &= u_\alpha - (z \pm c \pm \frac{t}{2}) w_{,x} \\ v_{d\alpha} &= v_\alpha - (z \pm c \pm \frac{t}{2}) w_{,y} \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2 \quad (6)$$

1 oben  
2 unten

mit  $u_\alpha, v_\alpha$ , Verschiebungen der Deckschichtmittelflächen

$$\begin{aligned} u_c &= u^+ - \frac{z}{c} (u^- - \frac{t}{2} w_{,x}) F(z) \\ v_c &= v^+ - \frac{z}{c} (v^- - \frac{t}{2} w_{,y}) S(z) \\ w_c &= w T(z) \end{aligned} \quad (7)$$

mit

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad u^- = \frac{u_1 - u_2}{2} \\ v^+ &= \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad v^- = \frac{v_1 - v_2}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

und

$$\begin{aligned} F(z) &= H_1 \cosh(\lambda z) + H_2 \frac{\sinh(\lambda z)}{z} \\ S(z) &= H_3 \cosh(\lambda z) + H_4 \frac{\sinh(\lambda z)}{z} \end{aligned}$$

$$T(z) = H_5 \cosh(\lambda z) + H_6 z \sinh(\lambda z)$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$m, n$  Zahl der Beulwellen in  $x, y$ -Richtung

Die Konstanten  $H_1 \dots H_6$  ergeben sich aus den Randbedingungen.

$$F(c) = S(c) = T(c) = 1, F_{,z}(0) = S_{,z}(0) = T_{,z}(0) = 0.$$

Nach Einsetzen der Verformungsgleichungen in (3), (4) und (5) läßt sich die Integration in  $z$ -Richtung ausführen. Im weiteren werden die Mittelflächenverschiebungen  $u^+, v^+$  der Sandwichplatte gegenüber der Querver-schiebung  $w$  und den „Verdrehungen“  $u^-, v^-$  vernach-lässigt (Theorie 2. Ordnung). Mit  $u^- \rightarrow u, v^- \rightarrow v$  erhält man aus (2) die Änderung des Gesamtpotentials

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \int_0^a \int_0^b [A_2 u_{,x}^2 + A_3 v_{,y}^2 + A_4 w_{,xx}^2 + A_5 w_{,yy}^2 + A_6 u_{,x} w_{,xx} \\ &+ A_7 v_{,y} w_{,yy} + A_8 w^2 + A_{10} u_{,x} v_{,y} \\ &+ A_{11} (u_{,x} w_{,yy} + v_{,y} w_{,xx}) + A_{12} v_{,y} w + A_{13} u_{,x} w \\ &+ A_{14} w w_{,yy} + A_{15} w w_{,xx} + A_{17} w_{,xy}^2 + A_{18} w_{,x}^2 \\ &+ A_{19} w_{,y}^2 + A_{20} v w_{,y} + A_{21} u w_{,x} + A_{31} u_{,y} w_{,xy} \\ &+ A_{32} v_{,x} w_{,xy} + A_{34} w_{,xx} w_{,yy} + A_{35} u_{,y}^2 + A_{37} v_{,x}^2 \\ &+ A_{39} u_{,y} v_{,x} + A_{40} u^2 + A_{41} v^2 - q w_{,x} w_{,y}] dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

Hierin bedeuten:

$$\begin{aligned} A_2 &= G_c (1 + k_1) \frac{F_1}{c^2} + B \\ A_3 &= G_c (1 + k_1) \frac{F_3}{c^2} + B \\ A_4 &= G_c (1 + k_1) \frac{t^2}{4c^2} F_1 + D \\ A_5 &= G_c (1 + k_1) \frac{t^2}{4c^2} F_3 + D \\ A_6 &= -G_c (1 + k_1) \frac{t}{c^2} F_1 \\ A_7 &= -G_c (1 + k_1) \frac{t}{c^2} F_3 \\ A_8 &= G_c (1 + k_1) F_5 \\ A_{10} &= G_c \frac{2k_1}{c^2} F_6 + 2\nu B \\ A_{11} &= -G_c \frac{k_1 t}{c^2} F_6 \\ A_{12} &= -G_c \frac{2k_1}{c} F_8 \\ A_{13} &= -G_c \frac{2k_1}{c} F_9 \\ A_{14} &= G_c \frac{k_1 t}{c} F_8 \\ A_{15} &= G_c \frac{k_1 t}{c} F_9 \\ A_{17} &= G_c \frac{t^2}{8c^2} (F_1 + F_3 + 2F_6) + G \frac{t^3}{3} \\ A_{18} &= G_c \left( \frac{t^2}{8c^2} F_{10} + \frac{1}{2} F_{11} + \frac{t}{2c} F_{12} \right) \\ A_{19} &= G_c \left( \frac{1}{2} F_{11} + \frac{t^2}{8c^2} F_{13} + \frac{t}{2c} F_{14} \right) \\ A_{20} &= -G_c \left( \frac{t}{2c^2} F_{13} - \frac{1}{c} F_{14} \right) \\ A_{21} &= -G_c \left( \frac{t}{2c^2} F_{10} + \frac{1}{c} F_{12} \right) \\ A_{31} &= -G_c \frac{t}{2c^2} (F_1 + F_6) \\ A_{32} &= -G_c \frac{t}{2c^2} (F_3 + F_6) \end{aligned}$$

$$A_{34} = G_c k_1 \frac{t^2}{2c^2} F_6 + 2\nu D$$

$$A_{35} = G_c \frac{1}{2c^2} F_{10} + G t$$

$$A_{37} = G_c \frac{1}{2c^2} F_3 + G t$$

$$A_{39} = G_c \frac{1}{c^2} F_6 + 2 G t$$

$$A_{40} = G_c \frac{1}{2c^2} F_{10}$$

$$A_{41} = G_c \frac{1}{2c^2} F_{13}$$

mit

$$k_1 = \frac{\nu_c}{1-2\nu_c}, \quad B = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

und

$$F_1 = \int_{-c}^c (zF)^2 dz, \quad F_2 = \int_{-c}^c (zF) dz, \quad F_3 = \int_{-c}^c (zS)^2 dz,$$

$$F_4 = \int_{-c}^c (zS) dz, \quad F_5 = \int_{-c}^c (T_{,z})^2 dz, \quad F_6 = \int_{-c}^c T_{,z} dz,$$

$$F_7 = \int_{-c}^c (zF)(zS) dz, \quad F_8 = \int_{-c}^c zFT_{,z} dz,$$

$$F_9 = \int_{-c}^c zST_{,z} dz, \quad F_{10} = \int_{-c}^c (zF)_{,z}^2 dz,$$

$$F_{11} = \int_{-c}^c T^2 dz, \quad F_{12} = \int_{-c}^c (zF)_{,z} T dz,$$

$$F_{13} = \int_{-c}^c (zS)_{,z}^2 dz, \quad F_{14} = \int_{-c}^c (zS)_{,z} T dz.$$

### 3. Beulbedingungen

Die Lösung des Beulproblems erfolgt mit dem Verfahren von Ritz. Für die allseitig unverschieblich und momentenfrei gelagerte Rechteckplatte erfüllt der Ansatz

$$\begin{aligned} U &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \\ V &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \\ W &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \end{aligned} \quad (9)$$

die Randbedingungen.

Nach Einsetzen in (8) und Integration erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (E_{mn} B_{mn}^2 + G_{mn} C_{mn}^2 \\ &+ H_{mn} D_{mn}^2 + K_{mn} B_{mn} D_{mn} \\ &+ L_{mn} C_{mn} D_{mn} + M_{mn} B_{mn} C_{mn}) \\ &- 4q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} D_{mn} D_{kl} \frac{mnkl}{(m^2 - k^2)(n^2 - l^2)} \end{aligned} \quad (10)$$

mit  $\begin{matrix} m \pm k \\ n \pm l \end{matrix}$  ungerade und  $\begin{matrix} m + n \\ k + l \end{matrix}$  gerade

Hierin bedeuten

$$E_{mn} = \frac{ab}{4} (A_2 \beta^2 + A_{35} \rho^2 + A_{40})$$

$$G_{mn} = \frac{ab}{4} (A_3 \rho^2 + A_{37} \beta^2 + A_{41})$$

$$\begin{aligned} H_{mn} &= \frac{ab}{4} (A_4 \beta^4 + A_5 \rho^4 + A_8 - A_{14} \rho^2 - A_{15} \beta^2 + A_{17} \beta^2 \rho^2 \\ &+ A_{18} \beta^2 + A_{19} \rho^2 + A_{34} \beta^2 \rho^2) \end{aligned}$$

$$K_{mn} = \frac{ab}{4} (-A_6 \beta^3 - A_{11} \beta \rho^2 + A_{13} \beta - A_{21} \beta - A_{31} \beta \rho^2)$$

$$L_{mn} = \frac{ab}{4} (-A_7 \rho^3 - A_{11} \beta^2 \rho + A_{12} \rho - A_{20} \rho - A_{32} \beta^2 \rho)$$

$$M_{mn} = \frac{ab}{4} (A_{10} \beta \rho + A_{39} \beta \rho)$$

$$\text{mit } \beta = \frac{m \pi}{a}, \quad \rho = \frac{n \pi}{b}$$

Das Stabilitätskriterium (1) liefert damit das homogene Gleichungssystem für die Freiwerte

$$\begin{aligned} 2 E_{rs} B_{rs} + M_{rs} C_{rs} + K_{rs} D_{rs} &= 0 \\ M_{rs} B_{rs} + 2 G_{rs} C_{rs} + L_{rs} D_{rs} &= 0 \quad (11) \\ K_{rs} B_{rs} + L_{rs} C_{rs} + 2 H_{rs} D_{rs} \\ - 8q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \frac{mnrs}{(m^2 - r^2)(n^2 - s^2)} &= 0 \end{aligned}$$

mit  $\begin{matrix} m \pm r \\ n \pm s \end{matrix}$  ungerade und  $\begin{matrix} m + n \\ r + s \end{matrix}$  gerade

Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante erhält man die Eigenwerte; die maßgebende Beullast  $q_{kr}$  ist dem untersten Eigenwert zugeordnet. Die Struktur der Determinante hat folgendes Aussehen:

mn \ rs	B <sub>11</sub>	B <sub>12</sub>	B <sub>21</sub>	B <sub>22</sub>	C <sub>11</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>21</sub>	C <sub>22</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>21</sub>	D <sub>22</sub>	...
11	2E <sub>11</sub>	0	0	0	M <sub>11</sub>	0	0	0	K <sub>11</sub>	0	0	0	...
12	0	2E <sub>12</sub>	0	0	0	M <sub>12</sub>	0	0	0	K <sub>12</sub>	0	0	
21	0	0	2E <sub>21</sub>	0	0	0	M <sub>21</sub>	0	0	0	K <sub>21</sub>	0	
22	0	0	0	2E <sub>22</sub>	0	0	0	M <sub>22</sub>	0	0	0	K <sub>22</sub>	
11	M <sub>11</sub>	0	0	0	2G <sub>11</sub>	0	0	0	L <sub>11</sub>	0	0	0	
12	0	M <sub>12</sub>	0	0	0	2G <sub>12</sub>	0	0	0	L <sub>12</sub>	0	0	
21	0	0	M <sub>21</sub>	0	0	0	2G <sub>21</sub>	0	0	0	L <sub>21</sub>	0	
22	0	0	0	M <sub>22</sub>	0	0	0	2G <sub>22</sub>	0	0	0	L <sub>22</sub>	
11	K <sub>11</sub>	0	0	0	L <sub>11</sub>	0	0	0	2H <sub>11</sub>	0	0	$-\frac{32}{9}q$	
12	0	K <sub>12</sub>	0	0	0	L <sub>12</sub>	0	0	0	2H <sub>12</sub>	$\frac{32}{9}q$	0	
21	0	0	K <sub>21</sub>	0	0	0	L <sub>21</sub>	0	0	$\frac{32}{9}q$	2H <sub>21</sub>	0	
22	0	0	0	K <sub>22</sub>	0	0	0	$L_{22} - \frac{32}{9}q$	0	0	0	2H <sub>22</sub>	
...	...												

= 0

Für die Berechnung der kritischen Schubkräfte wurde ein Rechenprogramm erarbeitet, mit dem eine beliebige Anzahl von Ansatzfunktionen berücksichtigt werden kann.<sup>1)</sup>

Die allgemeine Lösung wird besonders dadurch erschwert, daß die Koeffizienten des Gleichungssystems (11) auch noch die unbekanntenen Amplitudenverhältnisse  $B_{rs}/D_{rs}$  und  $C_{rs}/D_{rs}$  enthalten.

Analysiert man kleine Durchbiegungen, so werden die Amplitudenverhältnisse sehr klein; die Lösung wird stark vereinfacht, wenn man die Verhältnisse näherungsweise Null setzt.

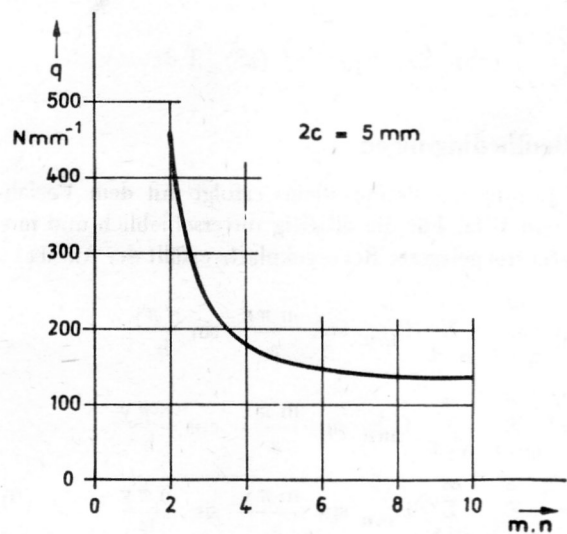
#### 4. Anwendung

An einem Beispiel soll der Einfluß der Kerndicke auf die kritische Schubkraft diskutiert werden. Dazu wählen wir eine Sandwichplatte mit unveränderlichen stählernen Deckschichten und einem weichen Kern, dessen Dicke variiert wird.

$$a = 285 \text{ mm}, \quad b = 190 \text{ mm}, \quad t = 1 \text{ mm},$$

$$E = 1,854 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \nu = 0,3, \quad G_c = 23,54 \text{ MPa}, \quad \nu_c = 0.$$

Bei konstanter Kerndicke  $2c = 5 \text{ mm}$  wird zunächst untersucht, wie groß  $m, n$  sein muß, damit eine für praktische Zwecke ausreichende Genauigkeit erreicht wird. Die Ergebnisse für den Näherungswert der Beulschubkraft sind im Bild 2 dargestellt.



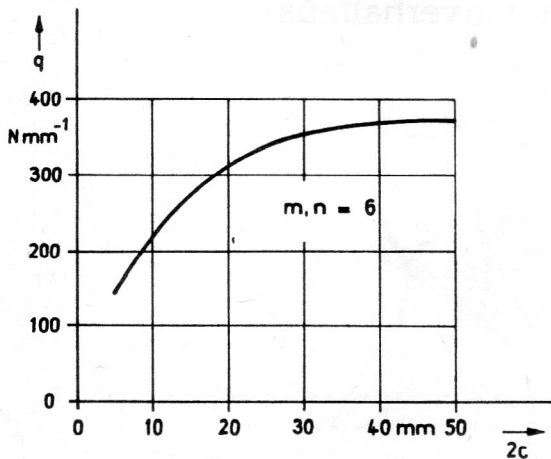
**Bild 2**  
Beulschubkraft in Abhängigkeit von Ansatzfunktionen  $m, n$

**Tabelle 1**  
Beulschubkraft bei  $m, n = 6$

2c/mm	5	10	15	20	25	30	35	40	50
q/Nmm <sup>-2</sup>	145,9	219,4	275,6	314,3	338,9	353,7	362,6	367,7	372,7

1) Das Programm erstellte Dr.-Ing. Jerzy Czmochocki; es ist im Institut für Konstruktion und Betrieb von Maschinen der TH Wroclaw, VR Polen, zugänglich.

Die Berechnungen bei veränderlicher Kerndicke wurden mit  $m, n = 6$  durchgeführt. Tabelle 1 gibt die gesuchte Beulschubkraft  $q$  in Abhängigkeit von der Kerndicke  $2c$  an. Dieser Zusammenhang ist im Bild 3 veranschaulicht.



**Bild 3**  
Beulschubkraft in Abhängigkeit von der Kerndicke

Wie man sieht, strebt die Beulschubkraft einem Grenzwert zu. Im Sinne der Materialökonomie kann man eine Grenzdicke  $(2c)_{\text{grenz}}$  für den Kern festlegen, deren Überschreiten uneffektiv ist. So wäre es möglich, die Grenzdicke z. B. aus einem definierten relativen Mindestzuwachs an Beulschubkraft zu berechnen.

#### LITERATUR

- [1] Allen, H. G.: Analysis and Design of Structural Sandwich Panels. Pergamon Press 1969.
- [2] Aleksandrov, A. Ja.: Rastschot trechskojnych panelej. Oborongiz 1960.
- [3] Duda, A.: Die Methoden des kleinen Parameters bei der Berechnung dreischichtiger Schalen. Technische Mechanik 1 (1980) H. 1.
- [4] Hertel, H.: Leichtbau. Springer-Verlag 1960.
- [5] Romanow, Fr.: Hyperbolischer dreiaxialer Verschiebungszustand von flachen Sandwichkonstruktionen und schwachgewölbten Sandwichschalen. Bauingenieur 58 (1983), S. 209 – 212.
- [6] Romanow, Fr.: Kritische Belastungen von Sandwichkonstruktionen bei Anwendung der hyperbolischen Hypothese des dreiaxialen Verschiebungszustandes. Bauingenieur 59 (1984), S. 229 – 233.
- [7] Romanow, Fr.: Naprezenia krytyczne wolnopodpartych scinanych plyt przekladkowych. Mechanika Teoretyczna i Stosowana 2, 16 (1978).
- [8] Witt, D.: Schwingungen von Kugelschalen mit schwingungsdämpfender Oberflächenhülle. Technische Mechanik 2 (1981) H. 1.