

# Große Deformationen rotationssymmetrischer Schalen aus Elastomer-Werkstoffen unter Innendruck

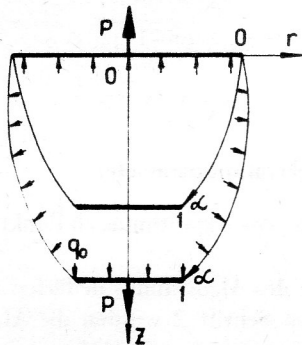
Viktor Aleksandrovič Fjedorov

## 1. Einführung

Das Deformationsverhalten von Schalen aus Elastomer-Werkstoffen, die in pneumatischen und hydraulischen Anlagen Anwendung finden, wird durch stark nicht-lineare Differentialgleichungen beschrieben [1] bis [3]. Deren numerische Integration stößt auf wesentliche Schwierigkeiten. Der vorliegende Beitrag stellt eine Aufgabenformulierung vor, die auf dem Verringern der Ordnung des zu lösenden Gleichungssystems beruht und die die Ermittlung des Spannungs- und Deformationszustandes der Schale ohne Lösung der Randwertaufgabe ermöglicht.

## 2. Aufgabenformulierung

Es wird eine dünne axialsymmetrische Schale mit beliebiger Meridianform betrachtet. Die Dicke kann längs des Meridians variabel sein. Die Schale ist entweder geschlossen oder hat starre Böden. Sie wird durch Innendruck  $q_0$  und auf die Böden einwirkende Kräfte  $F$  belastet (Bild 1). Das Material, aus dem die Schale besteht, gestattet beliebig große Deformationen. Die Möglichkeit der Bildung von „Falten“ in der Schale bei einachsigen Spannungszustand wird ausgeschlossen.



**Bild 1**  
Schale mit starren Böden bei Belastung durch Innendruck und Einzelkräfte

Die Bewegungen der Schale werden im materiellen Koordinatensystem betrachtet. Dabei wird das materielle Koordinatensystem in die Schalenmittelfläche gelegt. Die örtliche Geometrie der axialsymmetrischen Schale wird damit vollständig durch die erste quadratische Form definiert

$$ds^2 = A_1^2 d\alpha^2 + A_2^2 d\Theta^2 \quad (1)$$

$\alpha$  dimensionslose Meridiankoordinate ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),

$\Theta$  Winkelkoordinate ( $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ ),

$A_1, A_2$  Lamèsche Parameter.

Aufgrund der Axialsymmetrie hängen alle Funktionen nur von  $\alpha$  ab.

Als Hauptunbekannte, die den Deformationszustand der Schale kennzeichnen, werden die Lamèschen Parameter angenommen. Der Vorteil dieser Vorgehensweise läßt sich wie folgt begründen: die Lamèschen Parameter haben im Sinne der Differentiation die gleiche Größenordnung wie die Hauptdeformationen. Daher haben die Gleichungen mit den Lamèschen Parametern eine geringere Größenordnung im Vergleich zur Beschreibung der Schalengeometrie mit Verschiebungsvektoren (Ortsvektoren), da diese Integrale der Hauptdeformationen sind.

Die geometrischen Beziehungen lassen sich bei Berücksichtigung der Axialsymmetrie in folgender spezieller Form der Gauss-Kodazzi-Gleichung angeben

$$\frac{d}{d\alpha} (k_2 A_2) - k_1 \frac{dA_2}{d\alpha} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha} \right) + A_1 A_2 k_1 k_2 = 0 \quad (3)$$

$k_1, k_2$  sind die Hauptkrümmungen.

Eine Verringerung der Ordnung dieser Gleichungen ist möglich. Nach Ausschluß der Meridiankrümmung  $k_1$  erhält man die Gleichung

$$k_2 A_2 \frac{d}{d\alpha} (k_2 A_2) + \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha} \right) = 0,$$

die in folgende umgeformt werden kann

$$\frac{d}{d\alpha} \left[ (k_2 A_2)^2 + \left( \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha} \right)^2 \right] = 0$$

Das Integral der letzten Gleichung lautet

$$(k_2 A_2)^2 + \left( \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha} \right)^2 = C \quad (4)$$

$C$  ist die noch zu bestimmende Integrationskonstante. Da der Wert der Integrationskonstanten nicht von der Schalenform abhängt, kann sie besonders einfach am Beispiel einer Zylinderschale bestimmt werden. Für diese gilt

$$k_2 = 1/A_2, \quad dA_2/d\alpha = 0$$

Nach Einsetzen in Gl. (4) erhält man  $C = 1$ . Unter Berücksichtigung des Wertes von  $C$  erhält man aus den Gln. (3) und (4) die expliziten Ausdrücke für die Hauptkrümmungen

$$k_2 = \frac{1}{A_2} \sqrt{1 - \left( \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha} \right)^2}, \quad (5)$$

$$k_1 = - \frac{1}{k_2 A_1 A_2} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{d\alpha} \right)$$

Dünne Schalen können bei großen Deformationen als momentenfrei angesehen werden, und die entsprechenden statischen Beziehungen kann man auf der Grundlage der momentenfreien Theorie für Rotationsschalen [4] formulieren. Das dort angeführte Integral der Gleichgewichtsbeziehungen hat nach dem Ersetzen der Variablen durch die Variablen der vorliegenden Arbeit folgendes Aussehen:

$$T_1 = [q_0 + p/(\pi A_2^2)] / (2k_2),$$

$$T_2 = (q_0 - k_1 T_1) / k_2 \quad (6)$$

$T_1, T_2$  sind die in Meridian- bzw. Umfangsrichtung verteilten Kräfte.

Die Spannungen werden in der Schale unter Berücksichtigung der Momentenfreiheit und einer der Kirchhoff-Love-Hypothesen ermittelt:

$$\sigma_1 = T_1/h, \quad \sigma_2 = T_2/h, \quad \sigma_3 = 0 \quad (7)$$

Als physikalische Beziehungen werden die Gln. für das nichtlineare elastische Material von Mooney verwendet. Für den zweiachsigen Spannungszustand haben diese in den Hauptkoordinaten folgendes Aussehen

$$\sigma_i = C_1 \left( \lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + C_2 \left( \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_i^2} \right) \quad (8)$$

$$i = 1, 2; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sind die Hauptdehnungen,  $C_1, C_2$  die Elastizitätskonstanten.

Die Abhängigkeit der Metrik und der Schalendicke von den Formänderungen wird in zusätzlichen geometrischen Hypothesen berücksichtigt.

$$A_i = \lambda_i A_i^0 \quad (i = 1, 2), \quad h = A_1^0 A_2^0 h^0 / (A_1 A_2) \quad (9)$$

Die Gln. (9) verbinden die geometrischen Parameter der Schale im deformierten und nichtdeformierten Zustand. Die zweite Gl. ist die Inkompressibilitätsbedingung. Diese ist für kompressible Materialien durch nachfolgende allgemeinere Gl. zu ersetzen:

$$h = \lambda_3 h^0.$$

### 3. Zur Methodik der numerischen Analyse

Das erhaltene System der Grundgleichungen hat eine niedrigere Ordnung als die in [1] bis [3] angeführten. Dies kommt besonders darin zum Ausdruck, daß keine Dgl. numerisch gelöst werden müssen.

Zur Auflösung des Systems (5) bis (9) wird ein Iterationsverfahren mit Relaxation vorgeschlagen. Sein allgemeiner Algorithmus besteht aus folgenden Schritten:

1. Wahl der nullten Näherung für die Lamèschen Parameter  $A_1^n(\alpha), A_2^n(\alpha)$  und die Dicke  $h^n(\alpha)$ . Diese entspricht dem nichtdeformierten Zustand ( $n = 0, n - \text{Iterationsnummer}$ )
2. Entsprechend (5) werden die Werte der Hauptkrümmungen ermittelt  $k_1^{(n)}(\alpha), k_2^{(n)}(\alpha)$ .
3. Entsprechend (6) und (7) werden die inneren Kräfte  $T_1^n(\alpha), T_2^n(\alpha)$  sowie die Spannungen  $\sigma_1^n(\alpha), \sigma_2^n(\alpha)$  bestimmt.
4. Aus den Gln. (8) folgen die Werte für die Hauptdehnungen  $\lambda_1^n(\alpha), \lambda_2^n(\alpha)$ .
5. Nach den Formeln (9) werden die Lamèschen Parameter verbessert:  $\bar{A}_1^{n+1}(\alpha), \bar{A}_2^{n+1}(\alpha)$ .
6. Überprüfung, ob folgende Čebyševsche Norm für die Kopplungsglieder der Lösung klein ist

$$\max \left\{ \left| \frac{\bar{A}_1^{n+1} - \bar{A}_1^n}{A_1^n}, \frac{A_2^{n+1} - A_2^n}{A_2^n} \right| \right\} < \epsilon \quad (10)$$

$\epsilon$  ist die zulässige relative Abweichung der Rechnung. Wenn die Bedingung (10) erfüllt ist, so wird der Iterationsprozeß hier beendet.

7. Erhöhung der Iterationsnummer um 1 und Berechnung folgender angenäherter geometrischer Parameter

$$A_i^n = \omega \bar{A}_i^n + (1 - \omega) A_i^{n-1}, \quad i = 1, 2$$

$$h^n = A_1^0 A_2^0 h^0 / (A_1^n A_2^n) \quad (11)$$

$\omega$  ist der Relaxationsparameter.

8. Wiederholung des Algorithmus ab Punkt 2.

Einige Schritte des Algorithmus bedürfen noch weiterer Erklärungen. Im Schritt 2 wurden die Ableitungen mit Hilfe von Differenzengln. 2. Ordnung und einer Genauigkeit im gleichmäßigen Netz bei einer Schrittweite von  $\Delta\alpha = 1/M$  berechnet. Die Knotennummer  $m = 0, 1, \dots, M$  ist mit den Koordinaten folgendermaßen verbunden  $\alpha_m = m\Delta\alpha$ . Alle gesuchten Funktionen werden auf diesem Netz ermittelt.

Im Schritt 4 muß man für jeden Knotenpunkt des Netzes ein nichtlineares Gleichungssystem in der Form (8) lösen. Für innere Schalenpunkte ( $0 < m < M$ ) sind die Hauptdehnungen die Unbekannten. Wenn die Ränder mit starren Böden verbunden sind, so sind für die Ränder ( $m = 0, m = M$ )  $\lambda_1^n$  und  $\lambda_2^n$  die Unbekannten. Dabei gilt:  $\lambda_2^n = 1$  und  $\lambda_1^n$  ist entsprechend dem 3. Schritt des Algorithmus zu berechnen. Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt mit dem Verfahren von Newton. Als Anfangsnäherung wird die Lösung, die in den

entsprechenden Netzpunkten für die  $(n-1)$ -te Iteration des allgemeinen Algorithmus erhalten wurde, verwendet. Die nachfolgenden Iterationen werden bei Erfüllung einer Bedingung für die Hauptdehnungen bei den gemischten Iterationen des Newton-Verfahrens beendet:

$$\max \left\{ \left| \frac{\lambda_1^{n,j+1} - \lambda_1^{n,j}}{\lambda_1^{n,j}}, \frac{\lambda_2^{n,j+1} - \lambda_2^{n,j}}{\lambda_2^{n,j}} \right| \right\} < \epsilon_1 \quad (12)$$

$j$  ist die Iterationsnummer beim Newton-Verfahren,  $\epsilon_1 \ll 1$ .

Der Schritt 7 enthält die Anwendung eines Relaxationsparameters. Dieser gestattet es, Einfluß auf die Konvergenz des allgemeinen Algorithmus zu nehmen. Man kann die in der vorliegenden Arbeit verwendete automatische Korrektur dieses Parameters während der Rechnung empfehlen: wenn von Iteration zu Iteration die Norm (12) größer wird (der Prozeß beginnt zu divergieren), so ist der Parameter  $\omega$  zu halbieren.

Aufgrund der starken Nichtlinearität der Grundgleichungen kann es zu mehreren Lösungen kommen. Diese sind mit der Existenz mehrerer Gleichgewichtszustände für die Schale verbunden, die bei ein und derselben Belastung auftreten können. Bei Anwendungen ist es meistens besonders wichtig, die Lösung für einen stabilen vorkritischen Zustand, der der Bedingung

$$q_0, p \rightarrow 0 \quad \sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0$$

genügt, zu ermitteln. Außerdem sollten  $\sigma_1, \sigma_2$  stetig von  $q_0$  und  $p$  abhängen. Die Erfüllung dieser Bedingungen kann mit beliebiger Genauigkeit erfolgen, wenn die Lösung mit der vorgeschlagenen Methode für sich stufenförmig erhöhende Belastungsparameter erfolgt:

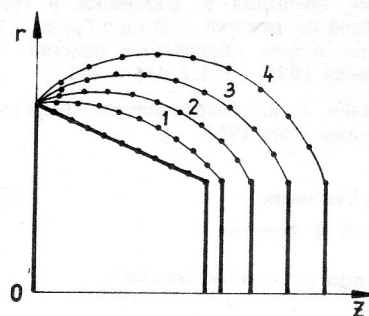
$$q_0 = k \Delta q_0, p = k \Delta p, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Hier sind  $\Delta q_0$  und  $\Delta p$  die Zuwüchse der Belastungsparameter. Die Lösung, die im  $k$ -ten Belastungsschritt ermittelt wurde, wird als Anfangsnäherung für den  $(k+1)$ -ten Schritt verwendet. Die schrittweise Realisierung der vorgeschlagenen Methode gestattet die Verbesserung der Konvergenz des Newton-Verfahrens bei der Inversion der physikalischen Beziehungen.

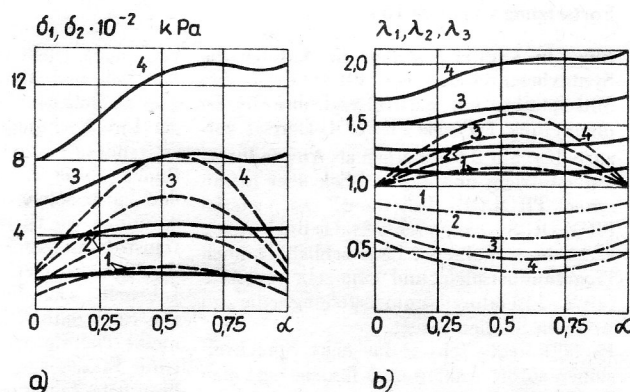
In den Arbeiten, die der Lösung ähnlicher Aufgaben gewidmet sind [3], wird eine starke Empfindlichkeit des numerischen Ergebnisses gegenüber den Randbedingungen und eine Instabilität der Rechnung bei Erhöhung der Schalenlänge erwähnt. Der Grund dafür ist die Nichtlinearität der Randwertaufgabe. Da die in dieser Arbeit vorgeschlagene Vorgehensweise nicht mit der Lösung einer Randwertaufgabe verbunden ist, kommt es hier nicht zu diesen Schwierigkeiten.

#### 4. Numerisches Beispiel

Die vorgeschlagene Methodik ist als Programm in PL/1 realisiert. Die Rechnungen wurden auf einer ESER-Anlage vom Typ 1033 durchgeführt. Nachfolgend wird ein Rechenbeispiel angeführt, wobei die Schale im unbelasteten Zustand die Form eines Kegelstumpfes hat. Die starren Böden haben die Radien 0,5 m und 0,3 m und die Länge der Mantelfläche beträgt 0,5 m. Die Dicke der



**Bild 2**  
Formänderungen der Schale bei Belastung



**Bild 3a**  
Spannungsverteilungen bei unterschiedlichen Belastungen

**Bild 3b**  
Verteilung der Hauptdehnungen bei unterschiedlichen Belastungen

Schale ist 10 mm. Das Material ist Gummi mit den Konstanten  $C_1 = 300$  kPa,  $C_2 = 9,8$  kPa.

Die Lösung wurde für verschiedene Innendruckwerte ermittelt. Bild 2 zeigt die Formänderungen der Schale bei Belastung. Hier und auf den anderen Bildern entspricht die Kurve 1 einem Druck von  $q_0 = 5,9$  kPa, die Kurve 2 – 9,8 kPa, die Kurve 3 – 11,8 kPa, die Kurve 4 – 12 kPa. Auf Bild 3a sind die Spannungsverteilungen  $\sigma_1$  (Volllinien) und  $\sigma_2$  (gestrichelte Linien) in Meridianrichtung für verschiedene Druckwerte dargestellt. Die Hauptdehnungen  $\lambda_1$  (Volllinien),  $\lambda_2$  (gestrichelte Linien) und  $\lambda_3$  (Strich-Punkt-Linien) sind auf Bild 3b enthalten. Für das numerische Beispiel galten folgende Parameter:  $M = 10$ ,  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ . Die Ergebnisse für den doppelten M-Wert und den 4fach kleineren  $\epsilon$ -Wert lagen bei den Spannungen im Bereich von weniger als 1% Abweichung.

#### LITERATUR

- [1] Григорьев, А. С.: О теории и задачах равновесия оболочек при /дольших деформациях. – В кн.: Труды VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Москва: Наука, 1970. – с. 779 – 787.
- [2] Грин, А., Адкинс, Дж.: Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – Москва: Мир, 1965.

- [3] Коробанов, Ю. Н.: Осесимметричная задача мягкой оболочки вращения в физически и геометрически нелинейной постановке. – В кн.: Труды X Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – т. I, с. 456 – 464.
- [4] Новожилов, В. В.: Теория тонких оболочек. – Ленинград: Судпромгиз, 1951.