

# Berechnung von Stabtragwerken aus dünnwandigen, offenen Profilen unter Berücksichtigung des elastischen Knotenverhaltens

J. Gründer, D. Witt

## 1. Einleitung

Die Berechnung von Stabsystemen aus dünnwandigen, offenen Profilstäben erfolgt in der Regel nach der Theorie der Wölbkrafttorsion, z. B. von Wlassow [1]. Die Stäbe sind häufig in flächentragwerksartigen Knotenstrukturen miteinander verbunden, die das Verhalten des Gesamtsystems wesentlich beeinflussen. Im Knotenbereich ist die Gültigkeit der Stabtheorie nicht mehr gegeben. Die Methode der Finiten Elemente (FEM) bietet die Möglichkeit, diese Teile des Tragwerks zu berechnen. Die Kopplung der Substrukturen Stab und Knoten führt zu einem hybriden Berechnungsverfahren, das folgende Vorteile bietet:

- Berücksichtigung realer Knoteneleazitäten in der Berechnung des Gesamttragwerkes,
- Erfassung komplizierter Knotengeometrien,
- Berechnung von Verformungen, Schnittgrößen und Spannungen innerhalb der Knotenbereiche.

## 2. Voraussetzungen und allgemeine Festlegungen

Das vorliegende Verfahren basiert auf folgenden Voraussetzungen:

- es treten nur kleine Verformungen auf,
- das Materialverhalten ist linear-elastisch und isotrop,
- die Stabachsen sind abschnittsweise gerade,
- innerhalb der Stäbe gelten die Voraussetzungen der WLASSOW'schen Theorie.

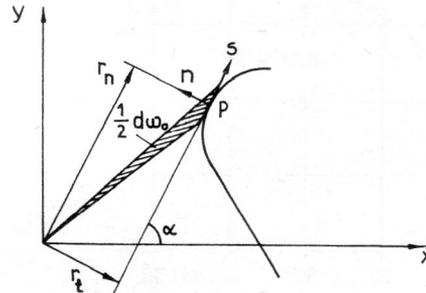
Des weiteren wird die Annahme getroffen, daß an den Übergangsstellen zwischen Stäben und elastischen Knotenstrukturen die Kompatibilitäts- und Äquivalenzbedingungen für die jeweiligen Zustandsgrößen erfüllt sind.

## 3. Steifigkeitsbeziehungen des dünnwandigen Stabs

Die Kinematik am dünnwandigen Stab wurde von Wlassow in [1] umfassend dargelegt. So ergeben sich für die Verschiebungen  $V_x$  und  $V_y$  eines Profilpunktes P entsprechend Bild 1 die Beziehungen:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x0} - \bar{y} \cdot \varphi_z \\ V_y &= V_{y0} + \bar{x} \cdot \varphi_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

Mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen der positiven x-Achse des Stabkoordinatensystems und der positiven s-Achse des stets tangential an der Profilmittellinie geführten



**Bild 1**  
 Geometriebeziehungen am Profilabschnitt des dünnwandigen Stabes

{ s, n, η } -Systems (Bild 1) sind die Tangential- und Normalverschiebung des Punktes P:

$$\begin{aligned} V_s &= V_{x0} \cos \alpha + V_{y0} \sin \alpha + r_t \varphi_z \\ V_n &= -V_{x0} \sin \alpha + V_{y0} \cos \alpha + r_n \varphi_z \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit den bekannten Beziehungen:

$$\begin{aligned} r_t &= x \sin \alpha - y \cos \alpha \\ r_n &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen der Stabtheorie führen auf:

$$\gamma_{zs} = V_{z,s} + V_{s,z} = 0 \quad \text{und} \quad (3.3)$$

$$\gamma_{zn} = V_{n,z} + V_{z,n} = 0 \quad (3.4)$$

Aus den Gleichungen (3.3) und (3.2) folgt die Verformung der Profilmittellinie in z-Richtung:

$$\begin{aligned} V_z(s,z) &= V_{z0}(z) - \varphi_y(z) \cdot x(s) \\ &\quad + \varphi_x(z) \cdot y(s) + \vartheta(z) \cdot \omega_0(s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit den Biegeiwinkeln:

$$\varphi_x = -V_{y0,z}; \quad \varphi_y = V_{x0,z} \quad (3.6)$$

und der Verdrillung:

$$\vartheta = -\varphi_{z,z}$$

Führt man einen Neigungswinkel um die Profilmittellinie

$$\varphi_s = V_{z,n}$$

ein, so erhält man für ihn unter Berücksichtigung der Beziehungen (3.4) und (3.2):

$$\varphi_s = \varphi_y \sin \alpha + \varphi_x \cos \alpha + \vartheta r_n$$

|               |          |          |          |             |             |             |             |       |       |          |          |          |                  |     |           |
|---------------|----------|----------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------|-------|----------|----------|----------|------------------|-----|-----------|
|               | $V_{x0}$ | $V_{y0}$ | $V_{z0}$ | $\varphi_x$ | $\varphi_y$ | $\varphi_z$ | $\vartheta$ | $F_x$ | $F_y$ | $F_z$    | $M_x$    | $M_y$    | $M_z$            | $B$ | $1$       |
| $V_{x0}^I$    |          |          |          |             | 1           |             |             |       |       |          |          |          |                  |     |           |
| $V_{y0}^I$    |          |          |          | -1          |             |             |             |       |       |          |          |          |                  |     |           |
| $V_{z0}^I$    |          |          |          |             |             |             |             |       |       | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ | $p_{14}$         |     |           |
| $\varphi_x^I$ |          |          |          |             |             |             |             |       |       | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{23}$ | $p_{24}$         |     |           |
| $\varphi_y^I$ |          |          |          |             |             |             |             |       |       | $p_{31}$ | $p_{32}$ | $p_{33}$ | $p_{34}$         |     |           |
| $\varphi_z^I$ |          |          |          |             |             |             | -1          |       |       |          |          |          | $\frac{1}{GI_t}$ |     |           |
| $\vartheta^I$ |          |          |          |             |             |             |             |       |       | $p_{41}$ | $p_{42}$ | $p_{43}$ | $p_{44}$         |     |           |
| $F_x^I$       |          |          |          |             |             |             |             |       |       |          |          |          |                  |     | $-q_{x0}$ |
| $F_y^I$       |          |          |          |             |             |             |             |       |       |          |          |          |                  |     | $-q_{y0}$ |
| $F_z^I$       |          |          |          |             |             |             |             |       |       |          |          |          |                  |     | $-q_{z0}$ |
| $M_x^I$       |          |          |          |             |             |             |             |       | 1     |          |          |          |                  |     | $-m_x$    |
| $M_y^I$       |          |          |          |             |             |             |             |       | -1    |          |          |          |                  |     | $-m_y$    |
| $M_z^I$       |          |          |          |             |             |             |             |       |       |          |          |          |                  |     | $-m_z$    |
| $B^I$         |          |          |          |             |             |             | $GI_t$      |       |       |          |          |          | 1                |     | $-b$      |
| $1$           |          |          |          |             |             |             |             |       |       |          |          |          |                  |     |           |

**Bild 2**  
Kanonisches Differentialgleichungssystem des dünnwandigen Stabes

Seine Anteile in Richtung der Querschnittsachsen sind:

$$\begin{bmatrix} \varphi_x^* \\ \varphi_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & r_n \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & r_n \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \vartheta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Diese Beziehungen finden bei der Formulierung der Kompatibilitäts- und Äquivalenzbedingungen zwischen Stab und elastischer Knotenstruktur Berücksichtigung. Die Differentialgleichungen des dünnwandigen Stabs nach Theorie I. Ordnung lassen sich in Form eines kanonischen DGL-Systems angeben (Bild 2). Dabei sind im Spaltenvektor

$$\underline{f}_{st} = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z \ B]^T \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_{SA} \\ \underline{f}_{SE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{vf}^{-1} \cdot \underline{U}_{vv} & -\underline{U}_{vf}^{-1} \\ \underline{U}_{fv} - \underline{U}_{ff} \cdot \underline{U}_{vf}^{-1} \cdot \underline{U}_{vv} & \underline{U}_{ff} \cdot \underline{U}_{vf}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_{SA} \\ \underline{V}_{SE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_{vf}^{-1} \cdot \underline{V}_p \\ \underline{f}_p - \underline{U}_{ff} \cdot \underline{U}_{vf}^{-1} \cdot \underline{V}_p \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\underline{f}_{SL} = \underline{K}_{SL} \cdot \underline{V}_{SL} + \underline{f}_{PL} \quad (3.11)$$

die Kraftgrößen des Stabs zusammengefasst, der Spaltenvektor

$$\underline{V}_{st} = [V_{x0} \ V_{y0} \ V_{z0} \ \varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z \ \vartheta]^T \quad (3.10)$$

beinhaltet die zugeordneten Verformungsgrößen der Stabachse. Die Matrixelemente  $p_{ij}$  folgen aus:

$$p_{ij} = \frac{1}{E} p_{ij}^* ; \quad E - \text{reduzierter Elastizitätsmodul}$$

wobei

$$p^* = \underline{A}^{-1}$$

die Inverse der Querschnittskennwertematrix  $\underline{A}$  ist.

Letztere wird mit dem Spaltenvektor:

$$\underline{a} = [1 \ y \ -x \ \omega_0]^T$$

nach der Vorschrift:

$$\underline{A} = \int_{(A)} \underline{a} \cdot \underline{a}^T dA$$

berechnet.

Dieses kanonische DGL-System wird numerisch integriert. Als Ergebnis der numerischen Integration liegt die Übertragungsmatrix zwischen Stabanfang A und Stabende E in der Form:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{SE} \\ \underline{f}_{SE} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{vv} & \underline{U}_{vf} & \underline{V}_p \\ \underline{U}_{fv} & \underline{U}_{ff} & \underline{f}_p \\ \underline{Q}^T & \underline{Q}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_{SA} \\ \underline{f}_{SA}^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

vor. Für die weitere Verwendung der Übertragungsmatrix ist eine einheitliche Ausrichtung der Schnittgrößen erforderlich, so daß die Zuordnung:

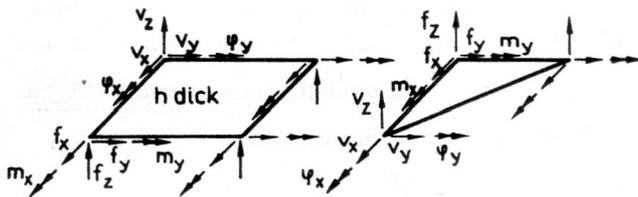
$$\underline{f}_{SA} = -\underline{f}_{SA}^*$$

notwendig ist.

Durch Umordnung dieser Gleichungen erhält man die Steifigkeitsbeziehungen des Stabs:

#### 4. Berechnung der Steifigkeitsmatrizen elastischer Knotenstrukturen

Zur Berechnung der elastischen Knotenstrukturen wird die Struktur mit finiten Scheiben-Platten-Elementen vernetzt. Die verwendeten Grundelemente sind rechteck- und dreieckförmige Scheiben-Platten-Elemente mit dem Freiheitsgrad 5 an jedem Eckknoten (Bild 3).



**Bild 3**  
Kraft- und Verformungsgrößen an den verwendeten Elementen

Diese hybriden Gleichgewichtsmodelle setzen sich aus einem Plattenelement mit:

- quadratischem Spannungsansatz im Inneren des Elementes,
- Polynomansatz 3. Grades für die Randdurchbiegung,
- quadratischem Ansatz für die Randverdrehung,
- linearem Ansatz für die Verdrehung

und einem Scheibenelement mit:

- linearem Ansatz für die Spannungen im Inneren des Elementes,
- linearem Ansatz für die Knotenverschiebungen

zusammen. Diese Elemente sind Bestandteil des Programmsystems AUTRA [2]. Die Elementsteifigkeitsmatrizen  $\underline{K}_{E1}$  der Grundelemente werden zunächst in die Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{ME}$  des Makroelementes (ME) eingeordnet. Diese Matrix läßt sich nach internen (Index I) und externen (Index E) FE-Knoten ordnen:

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{II} & \underline{K}_{IE} \\ \underline{K}_{IE}^T & \underline{K}_{EE} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_I \\ \underline{V}_E \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Werden in dieser Beziehung die internen Kraft- und Verformungsgrößen eliminiert, so erfolgt die statische Kondensation auf die externen Zustandsgrößen:

$$\underline{f}_{ME} = \underline{K}_{ME} \cdot \underline{V}_{ME} \quad (4.2)$$

mit:

$$\underline{V}_{ME} = \underline{V}_E \cdot \underline{K}_{ME} = \underline{K}_{EE}^{-1} \cdot \underline{K}_{IE}^{-1} \cdot \underline{K}_{IE} \cdot \underline{V}_E$$

$$\underline{f}_{ME} = \underline{f}_E - \underline{K}_{IE}^T \cdot \underline{K}_{II}^{-1} \cdot \underline{f}_I$$

Somit wird die betrachtete Substruktur kontaktbereit mit benachbarten Substrukturen, und der Kondensationsvorgang läßt sich hierarchisch fortsetzen. Zur Be-

rechnung der Steifigkeitsmatrix der elastischen Knotenstruktur wird diese Makroelement-Vorwärtsrechnung solange ausgeführt, bis alle auf den Stabschlußrändern der Knotenstruktur liegenden FE-Knoten extern sind:

$$\underline{f}_{ES} = \underline{K}_{ES} \cdot \underline{V}_{ES} \quad (4.3)$$

In dieser Gleichung sind  $\underline{f}_{ES}$  bzw.  $\underline{V}_{ES}$  Kraftvektor bzw. Verformungsvektor der Knotenstruktur, wobei die Vektoren folgenden Aufbau besitzen:

$$\underline{f}_{ES} = [\underline{f}_{R1}^T \quad \underline{f}_{R2}^T \quad \dots \quad \underline{f}_{Ri}^T \quad \dots \quad \underline{f}_{Rn}^T]^T \quad (4.4)$$

$$\underline{V}_{ES} = [\underline{V}_{R1}^T \quad \underline{V}_{R2}^T \quad \dots \quad \underline{V}_{Ri}^T \quad \dots \quad \underline{V}_{Rn}^T]^T \quad (4.5)$$

Die Spaltenvektoren  $\underline{f}_{Ri}$  und  $\underline{V}_{Ri}$  setzen sich aus den Kraft- bzw. Verformungsgrößen am Anschlußrand i bei insgesamt n Anschlußrändern zusammen. Somit kann für (4.3) in geordneter Form:

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_{R1} \\ \underline{f}_{R2} \\ \vdots \\ \underline{f}_{Ri} \\ \vdots \\ \underline{f}_{Rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{R11} & \underline{K}_{R12} & \dots & \underline{K}_{R1i} & \dots & \underline{K}_{R1n} \\ \underline{K}_{R21} & \underline{K}_{R22} & \dots & \underline{K}_{R2i} & \dots & \underline{K}_{R2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{K}_{Ri1} & \underline{K}_{Ri2} & \dots & \underline{K}_{Rii} & \dots & \underline{K}_{Rin} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{K}_{Rn1} & \underline{K}_{Rn2} & \dots & \underline{K}_{Rni} & \dots & \underline{K}_{Rnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_{R1} \\ \underline{V}_{R2} \\ \vdots \\ \underline{V}_{Ri} \\ \vdots \\ \underline{V}_{Rn} \end{bmatrix}$$

geschrieben werden.

Die Steifigkeitsbeziehungen zwischen den FE-Knoten auf den Stabschlußrändern der Knotenstruktur sind für die Stabtragwerksberechnung nicht direkt nutzbar. Die Matrix  $\underline{K}_{ES}$  muß auf den Freiheitsgrad der entsprechenden Stabschlüsse kondensiert werden.

Zunächst erfolgt die Transformation der Kraftgrößen  $\underline{f}_{Ri}$  des Randes i in das zugehörige Stabschlußkoordinatensystem  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}_i$ . Dabei fixiert die  $(\hat{x}, \hat{y})$ -Ebene den Anschlußquerschnitt, während die  $\hat{z}$ -Achse mit der Achse des angeschlossenen Stabs zusammenfällt. Dann werden die Verformungsgrößen  $\underline{V}_{Rj}$  des Randes j ebenfalls in das zugehörige Stabschlußkoordinatensystem  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}_j$  transformiert, so daß für die Transformation der Steifigkeitsanteile  $\hat{\underline{K}}_{Rij} = \hat{\underline{T}}_{Ri}^T \cdot \underline{K}_{Rij} \cdot \hat{\underline{T}}_{Rj}$  (4.7)

gilt, wobei  $\hat{\underline{T}}_{Ri}$  die Transformationsmatrix zwischen dem globalen  $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ -System der Struktur und dem Anschlußkoordinatensystem am Rand i ist.

Bezogen auf das  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ -System des jeweiligen Anschlußrandes können die Kompatibilitätsbedingungen zwischen den Verformungen der FE-Knoten und den Stabverformungen an diesem Rand aufgestellt werden.

Die Verschiebungen eines Punktes auf der Profilmittellinie lassen sich mit den Gleichungen (3.1) und (3.5) beschreiben. Für die Verdrehungen ist die im Ausdruck (3.8) formulierte Erweiterung der Stabtheorie zu beachten, da diese Verdrehungskomponenten seitens der finiten Elemente vorhanden sind, durch die integrier-

ten Differentialgleichungen der Stabtheorie im Zustandsvektor des Stabs jedoch nicht berücksichtigt werden. Die angeführten Gleichungen kann man zusammenfassen, so daß für jeden FE-Knoten  $k$  an einem Anschlußrand gilt:

$$\hat{\underline{V}}_k = \hat{\underline{M}}_k \cdot \hat{\underline{V}} \quad (4.8)$$

Dabei sind  $\hat{\underline{V}}_k$  der Verformungsvektor des FE-Knotens  $k$ ,  $\underline{V}$  der des angeschlossenen Stabendes und

$$\hat{\underline{M}}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\hat{y}_k & 0 \\ \underline{E}_{3,3} & 0 & \hat{x}_k & 0 \\ \hat{y}_k & -\hat{x}_k & 0 & \hat{\omega}_{Ok} \\ \cos^2 \alpha_k & \sin \alpha_k \cos \alpha_k & 0 & r_{nk} \cos \alpha_k \\ \underline{O}_{3,3} & \sin \alpha_k \cos \alpha_k & \sin^2 \alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

die zugehörige Kondensationsmatrix. Zur Herleitung der Äquivalenzbeziehungen der Kraftgrößen wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen benutzt. Am Anschlußrand  $j$  zwischen Stab und Struktur läßt sich die Beziehung

$$\delta \hat{\underline{V}}^T \cdot \hat{\underline{f}} = \sum_{k=1}^{n_j} \delta \hat{\underline{V}}_k^T \cdot \hat{\underline{f}}_k$$

formulieren, wobei  $\hat{\underline{f}}$  der Vektor der Stabschnittgrößen,  $\hat{\underline{f}}_k$  der Vektor der FE-Knotenkräfte und  $n_j$  die Anzahl der FE-Knoten am Anschlußrand  $j$  sind. Mit Gleichung (4.8) folgt daraus

$$\hat{\underline{f}} = \sum_{k=1}^{n_j} \hat{\underline{M}}_k^T \cdot \hat{\underline{f}}_k \quad (4.10)$$

Die in (4.8) und (4.10) aufgestellten Beziehungen bilden die Grundlage für die Kondensation der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{ES}$ . Bildet man die Hypermatrix:

$$\hat{\underline{M}}_{Rj} = [\hat{\underline{M}}_1^T \quad \hat{\underline{M}}_2^T \quad \dots \quad \hat{\underline{M}}_{kj}^T]^T \quad (4.11)$$

aller auf dem Anschlußrand  $j$  liegenden FE-Knoten, so läßt sich die Kondensationsvorschrift für die Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{ES}$  mit

$$\hat{\underline{K}}_{Sij} = \hat{\underline{M}}_{Ri}^T \cdot \hat{\underline{T}}_{Ri}^T \cdot \hat{\underline{K}}_{Rij} \cdot \hat{\underline{T}}_{Rj} \cdot \hat{\underline{M}}_{Rj} \quad (4.12)$$

angeben.  $\hat{\underline{K}}_{Sij}$  sind die Submatrizen der kondensierten Strukturmatrix:

$$\hat{\underline{K}}_{ST} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{K}}_{S11} & \hat{\underline{K}}_{S12} \dots & \hat{\underline{K}}_{S1n} \\ \hat{\underline{K}}_{S21} & \hat{\underline{K}}_{S22} \dots & \hat{\underline{K}}_{S2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\underline{K}}_{Sn1} & \hat{\underline{K}}_{Sn2} \dots & \hat{\underline{K}}_{Snn} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Schließen an die Knotenstruktur wölbfreie Stäbe mit dem Freiheitsgrad 6 an, so entfällt die 7. Spalte der Kondensationsmatrix  $\hat{\underline{M}}_k$ .

## 5. Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen an den Stabsystemknoten

Die Berechnung des Gesamttragwerks erfolgt durch das Einordnen der Stabsteifigkeitsmatrizen und der kondensierten Knotenstrukturmatrizen in das Gleichungssystem für die unbekanntenen Stabverformungen an den Systemknoten. Nach Einarbeiten der Lagerbedingungen und der Knoteneinzellasten wird das Gleichungssystem:

$$\hat{\underline{f}}_{SY} = \underline{K}_{SY} \cdot \underline{V}_{SY} \quad (5.1)$$

gelöst, wobei im Lösungsvektor  $\underline{V}_{SY}$  die Stabverformungen an den Systemknoten zusammengefaßt sind. Nach Transformation in das lokale Stabkoordinatensystem können die Stabendverformungen zur Berechnung der Schnittgrößen an den Systemknoten genutzt werden.

## 6. Berechnung der Verformungen und Spannungen in den elastischen Strukturen

Die Stabverformungen an den Anschlußrändern der Knotenstruktur bilden die Grundlage für die Berechnung der Verformungen, Schnittgrößen und Spannungen im Strukturinneren. Nach Transformation in das zugehörige  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ -System am Rand  $j$  können die Stabverformungen mit Hilfe der Gleichung (4.8) in die Verformungen der auf dem Anschlußrand liegenden FE-Knoten umgerechnet werden. Somit sind die Verformungen  $\underline{V}_E$  der Externknoten der Knotenstruktur bestimmt. Durch die ME-Rückwärtsrechnung werden die Verformungen aller FE-Knoten der Struktur bestimmt, die wiederum Ausgangsgrößen für die Schnittkraft- und Spannungsberechnung für jedes finite Element sind. Im verwendeten FEM-System werden folgende Spannungsanteile berechnet:

- Scheibennormalspannungen,
- Scheibenschubspannungen,
- Plattennormalspannungen,
- Plattenschubspannungen,
- „Drillschubspannungen“ (linear über die Plattendicke verteilt).

## 7. Rechentechnische Realisierung

Zur rechentechnischen Umsetzung der aufgestellten Algorithmen wurde ein System von Programmen für die Rechenanlage ES 1055 geschaffen (Bild 4). Der modulare Aufbau gestattet die zeitlich unabhängige Bearbeitung der Teilaufgaben. Zur Bearbeitung der zentralen Datei DATVS wurde ein separates Datenverwaltungssystem geschaffen. Die Berechnung der Stäbe und der Gesamtstruktur kann vom Bildschirm aus erfolgen, die Ergebnisse können wahlweise über Bildschirm oder Drucker ausgegeben werden. Die zeitaufwendige Berechnung der Knotenstrukturen erfolgt im Stapelbetrieb. Durch Angabe des ME-Namens in der Jobsteuerung er-

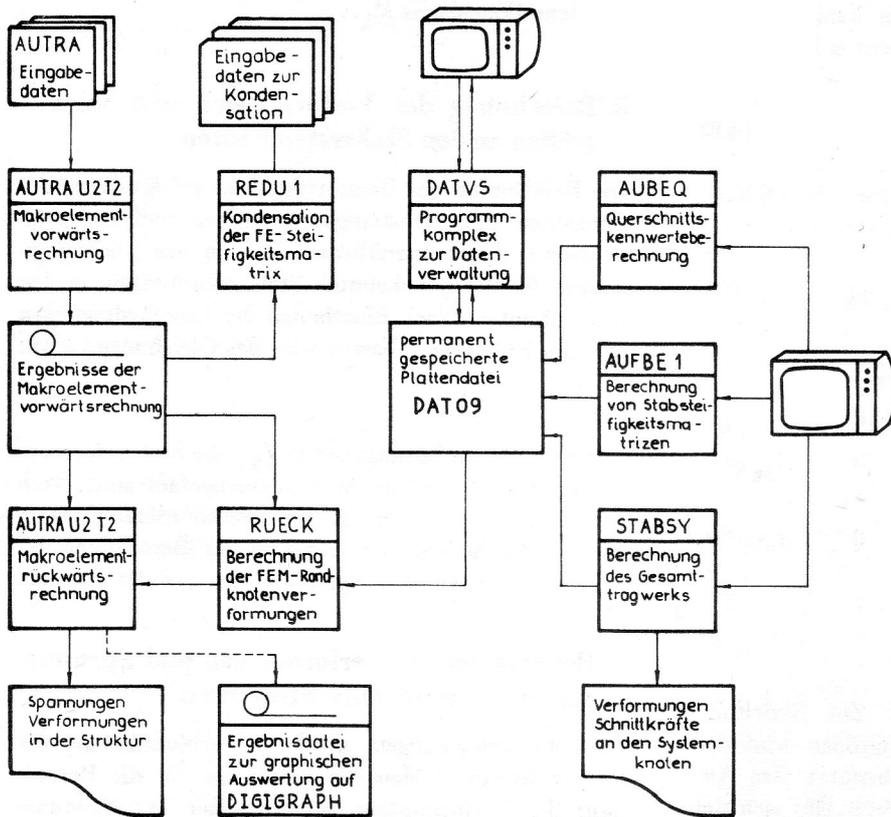


Bild 4  
Überblick über den Systemaufbau

folgt die Unterbrechung der Vorwärtsrechnung, und der Datenbestand wird ausgelagert. Im Programmbau-stein REDU 1 wird auf die Steifigkeitsmatrix der Knotenstruktur zurückgegriffen, kondensiert und in die zentrale Datei eingetragen. Der zur Rückrechnung benötigte Datenbestand der FE-Rechnung wird auf Magnetband abgespeichert.

Bei der Berechnung von Stabsystemen wird das Gesamtsystem vom Anwender aus Stäben und Strukturen zusammengesetzt, deren Steifigkeitsmatrizen berechnet wurden.

## 8. Beispiel

Vorge stellt wird eine Verbindungsart, die z. B. im Nutzkraftwagenbau bei der Rahmengestaltung zur Anwendung kommt. Im Bild 5 ist das Berechnungsmodell des Gesamttragwerks dargestellt.

Die Spannungs- und Verformungsberechnungen mit elastischer Knotenstruktur wurden für die Lastfälle der Biegung und Torsion im Vergleich zur Berechnung mit dem Punktknotenmodell ( $\varphi = \text{const.}$ ) durchgeführt. Wie aus Tabelle 1 zu erkennen ist, berechnet man bei Berücksichtigung der Knotenelastizität bedeutend größere Verformungswerte als nach dem Punktknotenmodell, wobei im Beispiel die Steifigkeit des Längsträgerste ges bedeutenden Einfluß auf die sich einstellenden Verformungen an der Krafteinleitungsstelle hat.

Für den Belastungsfall  $M_y = 10^5 \text{ Nm}$  wurde die MERückrechnung an der Knotenstruktur durchgeführt, um

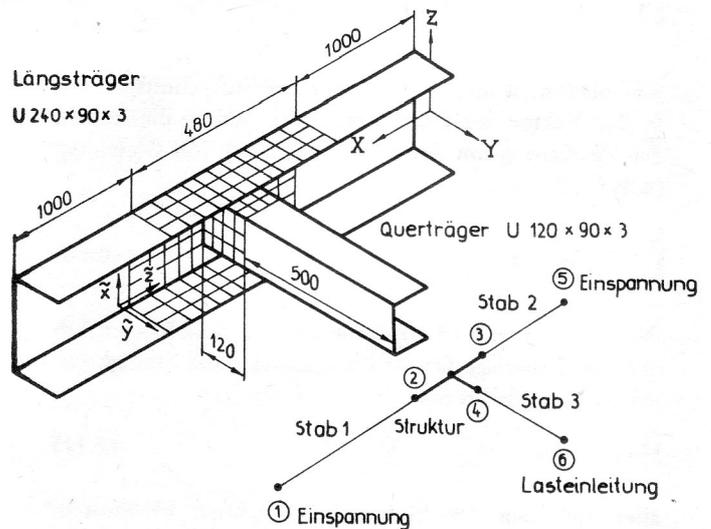


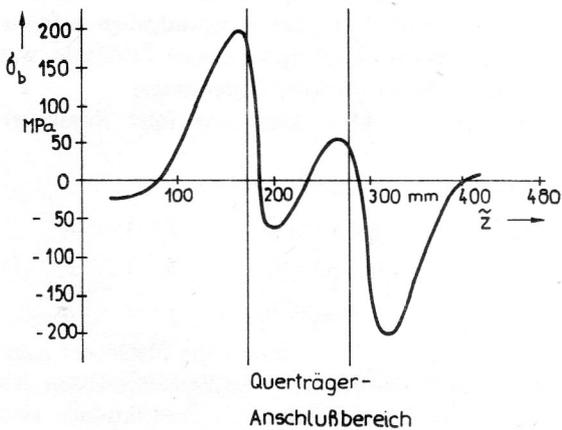
Bild 5  
Berechnungsmodell eines Gesamttragwerks

Aussagen über die Spannungsverläufe bei Torsionsbelastung im Strukturinneren zu erhalten.

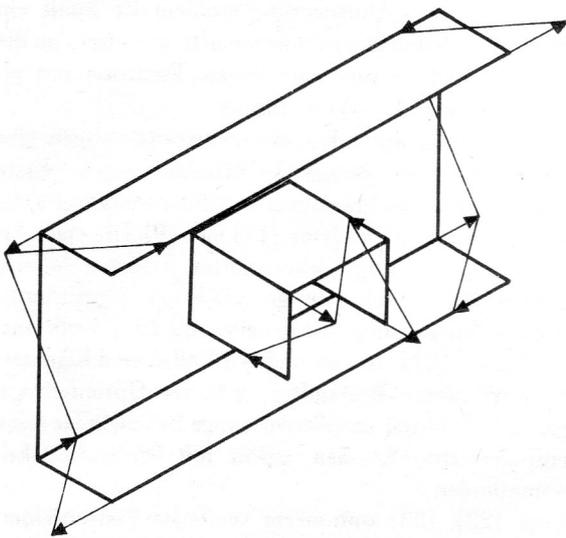
Im Bild 6 ist die PlattenNormalspannungsverteilung entlang der Längsträgermittellinie aufgetragen. Es ist zu erkennen, daß die Spannungsspitzen infolge des Querträgeranschlusses an den Rändern des Längsträgerstrukturteils weitestgehend abgeklungen sind. Die Scheibennormalspannungen am Rand entsprechen den nach der Stabtheorie ermittelten Werten.

**Tabelle 1**  
Verformungen des Gesamtsystems bei unterschiedlichen Lastfällen

| Verformungen an der Lasteinleitungsstelle |               | $V_X$<br>in mm | $V_Z$<br>in mm | $\varphi_X$<br>in rad | $\varphi_Y$<br>in rad | $\varphi_Z$<br>in rad  | $\vartheta$<br>in $\text{mm}^{-1}$ |
|---|---------------|----------------|----------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------------------|
| $F_X = 1000 \text{ N}$                    | mit Struktur  | 22,0           | 0,0            | 0,0                   | 0,0                   | $-0,359 \cdot 10^{-1}$ | 0,0                                |
|   | ohne Struktur | 0,7            | 0,0            | 0,0                   | 0,0                   | $-0,146 \cdot 10^{-2}$ | 0,0                                |
| $M_Y = 10^5 \text{ Nmm}$                  | mit Struktur  | 0,0            | 8,84           | $0,145 \cdot 10^{-1}$ | 0,149                 | 0,0                    | $-0,247 \cdot 10^{-3}$             |
|   | ohne Struktur | 0,0            | 0,6            | $0,140 \cdot 10^{-2}$ | $0,177 \cdot 10^{-1}$ | 0,0                    | $-0,411 \cdot 10^{-1}$             |



**Bild 6**  
Plattennormalspannungsverteilung entlang der Längsträgernmittellinie



**Bild 7**  
Verwölbungen an den Anschlußrändern der Struktur

Interessant ist der Vergleich zum Verformungsverhalten der Knotenstruktur bei einem um  $90^\circ$  gedrehten Anschluß des Querträgers (liegendes U-Profil).

Infolge der Bimomentenkopplung zwischen Längs- und Querträger kommt es im Längsträger zu einer entgegengesetzt gerichteten Torsionsverformung (Bild 7). Dieser Effekt, auf den schon Oehlschläger in [3] hinwies, verursacht bei der Berechnung mit elastischen Knotenstrukturen keinerlei Besonderheiten. Er ist jedoch bei der traditionellen Berechnung mit dem Punktknotenmodell nicht exakt erfassbar und führt bei Nichtbeachtung zu fehlerhaften Ergebnissen.

**LITERATUR**

- [ 1 ] Wlassow, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe, Band 1, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.
- [ 2 ] Programmbeschreibung ALTRA, Version 2 OSFS, Untersystem 2, Teilkomplex 2 - Allgemeine Schalen-tragwerke, Entwicklungsstand September 1983.
- [ 3 ] Oehlschläger, H.: Berechnung verwindungsweicher Nutzfahrgestrahmen auf Torsion unter Berücksichtigung der Knotenausbildung, Dissertation, TU Braunschweig, 1981.

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. J. Gründer  
Prof. Dr. sc. techn. D. Witt  
Technische Universität Dresden  
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens  
Mommssenstraße 13  
Dresden  
8027