

Zur Frage der h-Konvergenz bei C^0 -Verschiebungs-Elementen

J. Herrbruck

1. Allgemeines

Aus der Anwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM) ist bekannt, daß isoparametrische C^0 -Verschiebungs-Elemente die verzerrungsfreie Starrkörperbewegung nicht erfüllen. Ein Polynom-Verschiebungsansatz in kartesischen Koordinaten erfüllt zwar die verzerrungsfreie Starrkörpertranslation, nicht aber die verzerrungsfreie Starrkörperrotation [1] [4].

Wenn man Polynom-Verschiebungsansätze in einem allgemeinen Koordinatensystem (KS) zugrunde legt, muß man davon ausgehen, daß sowohl die Starrkörpertranslation als auch die Starrkörperrotation einen inkorrekten Verzerrungszustand erzeugen.

Diese Fakten wirken sich ungünstig auf die Konvergenz der FEM-Lösung aus. Andererseits ist es bei der Bearbeitung von Aufgaben mit speziellem Profil [2], [3] mitunter zweckmäßig, mit einem Verschiebungsansatz in einem nichtkartesischen Koordinatensystem zu arbeiten. Je besser die Approximationsfunktion, die möglicherweise in einem nichtkartesischen KS definiert werden kann, die anzunähernde Feldgröße beschreibt, um so genauer ist die FEM-Lösung.

Sacharov [1] schlägt das MSKE vor. Danach wird das Approximationspolynom so modifiziert, daß die Verzerrungsanteile infolge Starrkörperbewegung (Translation und Rotation) von vornherein verschwinden.

Etwa der gleiche Effekt läßt sich dadurch erreichen, daß man aus fertigen Steifigkeitsbeziehungen die Quasisteifigkeiten, wie im Abschnitt 3 gezeigt wird, eliminiert.

Sofern eine tensorielle Formulierung vorliegt, gilt die Summationsverabredung, daß über paarweise kovariant und kontravariante Indizes von 1 bis 3 summiert wird. Matrizen sind durch $[\dots]$ und Spaltenvektoren $\{ \dots \}$ gekennzeichnet.

2. Nachweis der h-Konvergenz für C^0 -Verschiebungselemente bei Verschiebungsansätzen in allgemeinen Koordinaten

Für isoparametrische finite Elemente (FE) mit Verschiebungsansätzen in kartesischen Koordinaten wird in [4] die h-Konvergenz nachgewiesen. Die Praxis beim Einsatz dieser Elemente bestätigt diesen Sachverhalt.

In einem kartesischen Koordinatensystem x^i wird das Verschiebungsfeld durch den Vektor

$$\vec{v} = \bar{v}^i \vec{e}_i = \bar{v}_i \vec{e}^i \quad (1)$$

beschrieben (vgl. Bild 1). Dieser Vektor wird auf die Basisvektoren zum KS \vec{v}

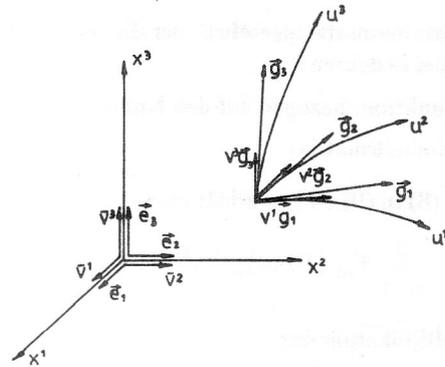


Bild 1
Koordinatensysteme, Basisvektoren

$$\vec{v} = v^i \vec{g}_i = v_i \vec{g}^i$$

zerlegt. Damit erhält man die Transformationsbeziehungen:

$$\bar{v}_i = v_j \partial u^j / \partial x^i, \quad (2)$$

$$\bar{v}^i = v^k \partial x^i / \partial u^k. \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^3} & \frac{\partial u^2}{\partial x^3} & \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}^1 \\ \bar{v}^2 \\ \bar{v}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^3} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{Bmatrix}$$

Die äquivalenten Beziehungen im Matrixkalkül lauten:

$$\{ \bar{v} \} = [T3xu] \{ v^k \} = [T3ux] \{ v_j \}. \quad (6)$$

Für ein FE mit n Knoten gilt, folgende Transformationsvorschrift der Knotenverschiebungen:

$$\begin{Bmatrix} \{ \bar{v}_1 \} \\ \{ \bar{v}_2 \} \\ \{ \bar{v}_n \} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T3xu]_1 \\ \\ [T3xu]_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ v^k_1 \} \\ \{ v^k_2 \} \\ \{ v^k_n \} \end{Bmatrix}$$

Speziell am m-ten Knoten gilt:

$$\{\bar{v}\}_m = [T3xu]_m \{v^k\}_m \quad (8)$$

Für isoparametrische Elemente wird zunächst für das Verschiebungsfeld (in kartesischen Koordinaten) der Ansatz

$$\{\bar{v}\} = \sum_{m=1}^n F_m [I_3] \{v\}_m \quad (9)$$

als ein Interpolationsansatz angesehen, der die h-Konvergenz erfüllt. Dabei bedeuten:

F_m – Formfunktion, bezogen auf den Knoten m,

$[I_3]$ – (3,3)-Einheitsmatrix.

Setzt man jetzt (8) in (9) ein, so erhält man:

$$[T3xu] \{v^k\} = \sum_{m=1}^n F_m [T3xu]_m \{v^k\}_m \quad (10)$$

Durch Linksmultiplikation mit

$$[T3xu]^{-1} = [T3ux] \quad (11)$$

ergibt sich:

$$\{v^k\} = \sum_{m=1}^n F_m [T3ux] [T3xu]_m \{v^k\}_m \quad (12)$$

Damit ist eine Interpolationsvorschrift für die kontravarianten Koordinaten des Verschiebungstensors gegeben, die auf einem Verschiebungsansatz in kartesischen Koordinaten beruht. Für hinreichend kleine FE gilt:

$$[T3ux] [T3xu]_m \approx [I_3] \quad (13)$$

Übrige Beziehung stellt die skalaren Produkte der kontravarianten Basisvektoren \vec{g}^i in einem beliebigen Punkt innerhalb eines finiten Elementes mit den kovarianten Basisvektoren \vec{g}_k im Knoten m dar. Auf den gleichen Punkt bezogen gilt:

$$\vec{g}^j \vec{g}_k = \delta^j_k = \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \quad (14)$$

δ^j_k ist dabei das Kronecker-Symbol. Mithin sind für kleine Elemente der Interpolationsansatz (9) und die Beziehung

$$\{v^k\} = \sum_{m=1}^n F_m [I_3] \{v^k\}_m \quad (15)$$

gleichwertig.

Der oben geführte Beweis für einen Verschiebungsansatz in den kontravarianten Koordinaten des Verschiebungstensors läßt sich analog auf die kovarianten und die physikalisch-technischen Koordinaten sowie auf zweidimensionale Probleme übertragen.

3. Elimination von Quasisteifigkeiten

Es hat sich gezeigt, daß für den Aufbau von Steifigkeitsbeziehungen oftmals Programme verwendet werden, die die verzerrungsfreie Starrkörperbewegung nicht hinreichend sichern. Das kann durch folgende Beziehung geprüft werden:

$$[K] \{\bar{\delta}\} = \{R\} = \{\emptyset\} \quad (16)$$

Ist der Kraftvektor $\{R\}$ infolge der Starrkörperknotenbewegung $\{\bar{\delta}\}$ nicht gleich dem Nullvektor $\{\emptyset\}$, dann ist in der Steifigkeitsmatrix $[K]$ eine Quasisteifigkeit enthalten. Diese Quasisteifigkeit beeinflusst die Konvergenz einer FEM-Lösung ungünstig.

Nachfolgend wird gezeigt, wie mit dem Kriterium (16) eine eventuell vorkommende Quasisteifigkeit entdeckt und danach eliminiert werden kann.

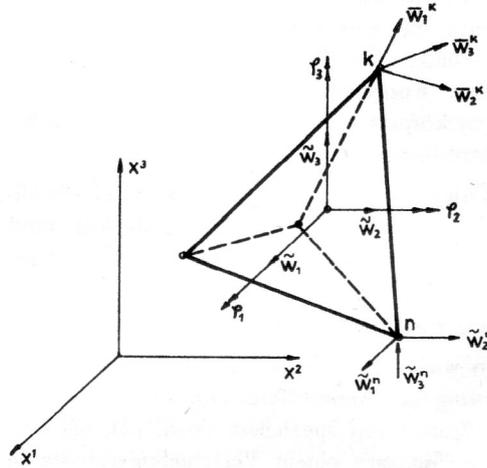


Bild 2
Starrkörperbewegungen

Der Verschiebungsvektor infolge Starrkörperbewegung $\{\bar{\delta}\}$ für ein FE mit n Knoten (vgl. Bild 2) läßt sich in der Form

$$\{\bar{\delta}\} = [Z] \{s\} \quad (17)$$

darstellen. Darin bedeuten:

$$-\{\bar{\delta}\} = \{\bar{w}_1^1, \bar{w}_2^1, \bar{w}_3^1, \dots, \bar{w}_1^n, \bar{w}_2^n, \bar{w}_3^n\}^T \quad (18)$$

$$-\{s\} = \{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T \quad (19)$$

– φ_i = Starrkörperrotation um die kartesische Achse x^i ;

– \tilde{w}_i = Starrkörpertranslation in Richtung der kartesischen Achse x^i ;

– \bar{w}_1^n = Verschiebung am Knoten n in Richtung der kartesischen Achse x^1 ;

– \bar{w}_j^n = allgemeine Verschiebungsordinate am Knoten n, bezogen auf die Koordinate x^j ;

– x_k^i = kartesische Knotenkoordinate x^i am Knoten k.

Die Matrix $[Z]$ wird in die Submatrizen $[Z_i]$ zerlegt:

$$[Z]^T = [[Z_1]^T, [Z_2]^T, \dots, [Z_n]^T] \quad (20)$$

Die Submatrix

$$[Z_k] = [T_k] [\bar{Z}_k] \quad (21)$$

ergibt sich aus der Transformationsbeziehung (21). Die Matrix

$$[\bar{Z}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x^3 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 & -x^3 & 0 & x^1 \\ 0 & 0 & 1 & x^2 & -x^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

bezieht sich auf den k-ten Knoten des FE. Die Matrix $[T_k]$ ist die Transformationsmatrix der Knotenverschiebungen am k-ten Knoten:

$$[\bar{w}_1^k, \bar{w}_2^k, \bar{w}_3^k] = [\bar{w}_1^k, \bar{w}_2^k, \bar{w}_3^k] [T_k]. \quad (23)$$

Der Verschiebungsvektor $\{\delta\}$ infolge einer Belastung setzt sich aus dem Vektor der Starrkörperbewegung $\{\bar{\delta}\}$ und einem Vektor $\{\delta^*\}$ der Restverschiebungen zusammen. Aus (17) folgt:

$$\{\delta\} = \{\bar{\delta}\} + \{\delta^*\} = [Z] \{s\} + \{\delta^*\}. \quad (24)$$

Die Verzerrungen $\{\gamma\}$ lassen sich mit den Verschiebungen $\{w_k\}$ durch die Operatormatrix $[D]$ verknüpfen:

$$\{\gamma\} = [D] \{w_k\}. \quad (25)$$

Mit dem Interpolationsansatz

$$\{w_k\} = [F] \{\delta\} = [F] [Z] \{s\} + [F] \{\delta^*\} \quad (26)$$

($[F]$ – Matrix der Formfunktionen) ergibt sich:

$$\{\gamma\} = [B] [Z] \{s\} + [B] \{\delta^*\} = [\bar{B}] \{s\} + [B] \{\delta^*\}. \quad (27)$$

Die potentielle Energie des deformierten FE beträgt

$$\chi = \frac{1}{2} \int_V \{\gamma\}^T [E] \{\gamma\} dV + \{\delta\}^T \{f\} \quad (28)$$

mit der symmetrischen Elastizitätsmatrix $[E]$ und dem Knotenkraftvektor $\{f\}$. Setzt man den Vektor $\{\gamma\}$ nach (27) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \int_V \{\delta\}^T [B]^T [E] [B] \{s\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\delta^*\}^T [B]^T [E] [B] \{\delta^*\} dV + \\ & + \frac{1}{2} \int_V \{s\}^T [\bar{B}]^T [E] [\bar{B}] \{s\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{s\}^T [\bar{B}]^T [E] [B] \{\delta^*\} dV \\ & + \{\delta^*\}^T \{f\} + \{s\}^T [Z]^T \{f\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Aus dem Satz vom Minimum des elastischen Potentials folgt die Steifigkeitsbeziehung. Dabei werden der Vektor der Starrkörperbewegung $\{s\}$ und der Vektor $\{\delta^*\}$ getrennt ausgewiesen. Durch Differentiation wird das Minimum bestimmt:

$$\begin{aligned} \partial \chi / \partial \{\delta^*\}^T = \{\emptyset\} = & \int_V [B]^T [E] [B] dV \{\delta^*\} \\ & + \int_V [B]^T [E] [\bar{B}] dV \{s\} + \{f\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \partial \chi / \partial \{s\}^T = \{\emptyset\} = & \int_V [\bar{B}]^T [E] [\bar{B}] dV \{s\} \\ & + \int_V [\bar{B}]^T [E] [B] dV \{\delta^*\} + [Z]^T \{f\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Übrige Beziehungen werden im Matrixgleichungssystem (32) zusammengefaßt:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta^*\} \\ \{s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\} \\ \{\bar{R}\} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Dabei gelten folgende Abkürzungen:

$$[K_{11}] = \int_V [B]^T [E] [B] dV, \quad (34)$$

$$[K_{12}] = \int_V [\bar{B}]^T [E] [B] dV = [K_{11}] [Z], \quad (35)$$

$$[K_{22}] = \int_V [\bar{B}]^T [E] [\bar{B}] dV = [Z]^T [K_{11}] [Z] = [K_{12}]^T [Z], \quad (36)$$

$$\{R\} = -\{f\}, \quad (37)$$

$$\{\bar{R}\} = -[Z]^T \{f\}. \quad (38)$$

Die Matrix $[K_{11}]$ nach (33) ist identisch mit der Steifigkeitsmatrix $[K]$ eines FE, wie sie ohne besondere Berücksichtigung der Starrkörperbewegung entsteht.

Das Besondere des Verfahrens besteht darin, daß die Elemente der Matrix $[Z]$ konstant sind und demzufolge aus dem Integranden nach (18) bis (20) herausgenommen werden können. Die Matrizen $[K_{12}]$ und $[K_{22}]$ sind Funktionen der kartesischen Knotenkoordinaten und der Steifigkeitsmatrix $[K]$. Durch Elimination des Vektors $\{s\}$ aus der Beziehung (32) ergibt sich eine Steifigkeitsbeziehung, die nur den Verschiebungsvektor $\{\delta\}$ enthält.

$$\begin{aligned} & ([K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{12}]^T) \{\delta^*\} \\ & = ([I_n] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [Z]^T) \{R\} \end{aligned} \quad (38)$$

Die reduzierte Steifigkeitsmatrix

$$[\tilde{K}] = [K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{12}]^T \quad (39)$$

sichert voraussetzungsgemäß die Bedingung (16):

$$[\tilde{K}] \{\bar{\delta}\} = [\tilde{K}] [Z] \{s\} = \{\emptyset\}. \quad (40)$$

Folglich kann in die Steifigkeitsbeziehung (38) auch der Verschiebungsvektor $\{\delta\}$ eingesetzt werden.

Wenn die Komponenten des Lastvektors aus Lastfällen hervorgehen, die durch Integration des Verzerrungsvektors $\{\gamma\}$ entstehen, (Temperatur, Vorspannung, Vordrehung), dann muß auch der Lastvektor reduziert werden:

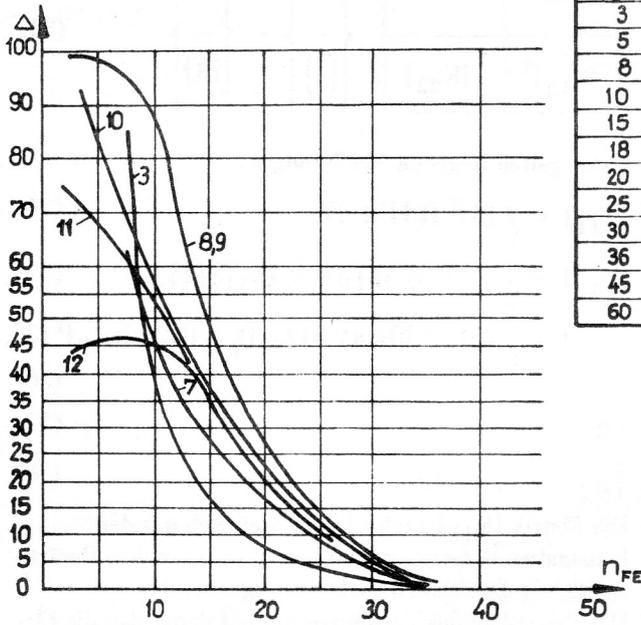
$$\{\bar{R}\} = ([I_n] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [Z]^T) \{R\}. \quad (41)$$

Mit den Gleichungen (39) und (41) sind die Grundlagen gegeben, um die Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren nachträglich zu korrigieren. Diese Korrektur ist z. B. vor der Assemblierung der Gesamtsteifigkeitsbeziehungen möglich.

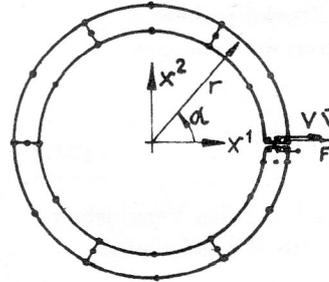
4. Konvergenzuntersuchungen am offenen Kreisring

In [1] wird die Brauchbarkeit einer FEM-Lösung anhand eines offenen Kreisringes (vgl. Bild 3) für den die analyti-

Offener Kreisring (relative Fehler)



Kurve \ n _{FE}	3	7	8	9	10	11	12
3			99,7	98,8	91,1	77,7	43,3
5			98,7	97,5	82,0		46,6
8	84,0	62,8					
10			85,5	82,7	66,0		47,3
15			54,8	53,6	43,0		37,2
18	9,1	20,7					
20			28,1	26,3	21,9	22,6	22,5
25							
30			7,3	7,1	6,9		6,9
36	1,4	1,5					
45	0,9	0,5					
60			0,5	0,4	0,5		0,5



n_{FE} - Anzahl der Elemente

$$\Delta = \left| \frac{v - \bar{v}}{v} \right| \cdot 100 \quad \bar{v} = \frac{r^3 \pi \cdot F}{E \cdot 3}$$

Kurve	Verschiebungsansatz	Geometrieapproximation	Steifigkeitskorrektur	
3	MSKE nach SACHAROV [1] u.a.			
7	Rotationsschalenprogramm BA Freiberg	Z, 3, 5	Z, 3, 5	nein
8	Scheibenelement isoparam.	K, 2	K, 2	nein
9	Membranelement "	K, 2	Z, 2	nein
10	Membranelement "	Z, 2	Z, 2	nein
11	Membranelement "	K, 2	Z, 2	ja
12	Membranelement "	Z, 2	Z, 2	ja

Z ≙ Zylinderkoordinatensystem K = kartesisches Koordinatensystem

2 ≙ polyquadratischer Verschiebungsansatz: $\{P\} = \{ \lambda^{00}, \lambda^{10}, \lambda^{01}, \lambda^{11}, \lambda^{20}, \lambda^{02}, \lambda^{12}, \lambda^{21} \}^T$
 $u^1 = r, u^2 = \alpha, \lambda^{\alpha\beta} = (u^1)^\alpha (u^2)^\beta$

3,5 ≙ Normalenrichtung 5-ten Grades; Tangentialverschiebungen 3. Grades

Bild 3
Geschlitzter Kreisring

sche Lösung bekannt nach der Stabtheorie bekannt ist, getestet. Der Einfachheit halber wird ein Scheibenmodell gewählt.

Dieses Beispiel soll folgende Einflüsse auf die Konvergenz der FEM-Lösung zeigen:

- Verschiebungsansatz in Zylinder- und kartesischen Koordinaten,
- Geometrieapproximation in Zylinder- und kartesischen Koordinaten.
- Steifigkeitskorrektur.

In der zugehörigen Übersicht ist der Fehler der Relativverschiebungen v für die verschiedenen Fälle eingezeichnet.

Der Fehler wird nach der Formel

$$\Delta = \left| \frac{v - \bar{v}}{v} \right| \cdot 100 \%$$

berechnet. Dabei bedeuten:

\bar{v} - theoretischer Wert der Verschiebung.

v - berechneter Wert der Verschiebung.

Auf das konkrete Beispiel bezogen, lassen sich aus dem Diagramm folgende Aussagen ableiten:

1. Die Steifigkeitskorrektur nach (39) liefert für grobe Elementeteilungen eine Konvergenzverbesserung.
2. Ein Verschiebungsansatz in Zylinderkoordinaten erbringt eine Konvergenzverbesserung (ohne Steifigkeitskorrektur kaum merklich, mit Steifigkeitskorrektur stärker).

LITERATUR:

[1] Altenbach, J.; Sacharov, A. S. u. a.: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1982.

- [2] Herrbruck, J.; Krüger, H. J.: Konstruktion und 3-D-Berechnung des Schleusenbereiches im Stahlzellencontainment. Bauakademie der DDR IFI, Berlin 1985.
- [3] Herrbruck, J.: Beitrag zur Analyse dreidimensionaler, heterogener Kontinua in allgemeinen Koordinaten bei besonderer Berücksichtigung der Stahlzellenverbundbauweise mit Hilfe der FEM. Bauakademie der DDR IFI, Berlin 1987.
- [4] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method. McGraw Hill Book Company (UK) Ltd., 1977.