

Zur Berechnung inelastischer Rotationsschalen mit kompakten Verstärkungen

Gerd Resche

1. Einleitung

Die Forderung nach einem rationellen Werkstoffeinsatz bei gleichzeitiger Gewährleistung einer hohen Funktionssicherheit zwingt zur Entwicklung und Anwendung immer besserer Berechnungsmethoden. Bei der Berechnung von Schalenkonstruktionen mit Verstärkungen stellt sich dabei immer wieder die Frage nach einem sinnvollen Berechnungsmodell.

Zur Ermittlung des Spannungszustandes dünnwandiger Rotationsschalen kann effektiv das Übertragungsmatrizenverfahren eingesetzt werden [1], [2]. Speziell jedoch die Verstärkungsbereiche lassen sich nur schlecht als Schale modellieren, so daß die reale Bauteilgeometrie und auch das Steifigkeitsverhalten nur sehr grob erfaßt werden können.

Dies führt dann meist zu einer Verfälschung des Spannungs- und Deformationszustandes vor allem in der Nähe der Verstärkungsbereiche. Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM) können die Bauteilgeometrie und bei genügend feiner Diskretisierung auch das Steifigkeitsverhalten gut approximiert werden. Für die Berechnung allgemeiner Rotationskörper sind in der DDR dazu leistungsfähige Rechenprogramme auf der Grundlage dieser Methode entwickelt worden, z. B. [3], [4]. Der Nachteil der FEM bei der Schalenberechnung besteht jedoch darin, daß zur Erfassung der schalentypischen Biegespannungszustände eine derart feine Vernetzung erforderlich ist, daß der entstehende Rechenaufwand nicht mehr vertretbar ist. Außerdem ist die FEM dem Übertragungsmatrizenverfahren hinsichtlich Genauigkeit der Spannungsberechnung unterlegen. Es wird deshalb ein Berechnungsverfahren entwickelt, das die beiden genannten Methoden vereinigt, d. h., für die Berechnung der Schalenbereiche wird weiterhin das Übertragungsmatrizenverfahren eingesetzt, während die Verstärkungsbereiche mit Hilfe der FEM berechnet werden. Es erfolgt eine Beschränkung auf unverzweigte Rotationsschalen mit elastisch-plastischem Materialverhalten und isotroper Verfestigung.

2. Theoretische Grundlagen

Die grundlegenden theoretischen Beziehungen sowohl des Übertragungsmatrizenverfahrens als auch der FEM sind in einer Vielzahl von Veröffentlichungen bereits dargelegt worden [1] bis [7] und werden deshalb an dieser Stelle nicht noch einmal detailliert beschrieben.

Im weiteren nun sollen die wichtigsten Grundgedanken des entwickelten Verfahrens zur Berechnung versteifter Rotationsschalen vorgestellt werden [9].

Entsprechend der eingangs gemachten Beschränkung auf unverzweigte Rotationsschalen soll der in Bild 1 dargestellte Fall einer versteiften Rotationsschale betrachtet werden. Dabei ist ersichtlich, daß die Schale in eine gewisse Anzahl Meridianabschnitte unterteilt wird, deren Länge vom Abstand zur Rotationsachse und der Wandstärke abhängig ist. Zur Diskretisierung der Verstärkungsbereiche wird ein isoparametrisches Sechsknoten-dreieckelement wie in [4] verwendet. Das Anfangsrandwertproblem der Rotationsschale ist durch folgende Beziehungen gekennzeichnet

$$\frac{1}{s} \dot{y}' = \mathbf{B}_{RWP}(z_s) \dot{y} \quad (2.1)$$

$$\dot{z}_s = \mathbf{C}_{AWP}(z_s) \dot{y} \quad (2.2)$$

wobei () eine Ableitung nach einer konvektiven Koordinate Θ^1 darstellt und () symbolisiert die Differentiation nach einem formalen (Zeit-)parameter t . (Bild 2)

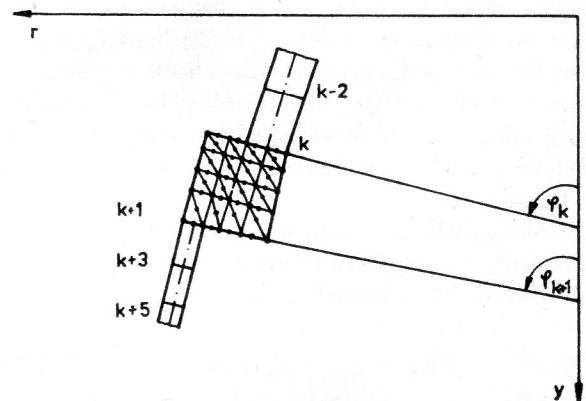


Bild 1
Diskretisierung der versteiften Rotationsschale

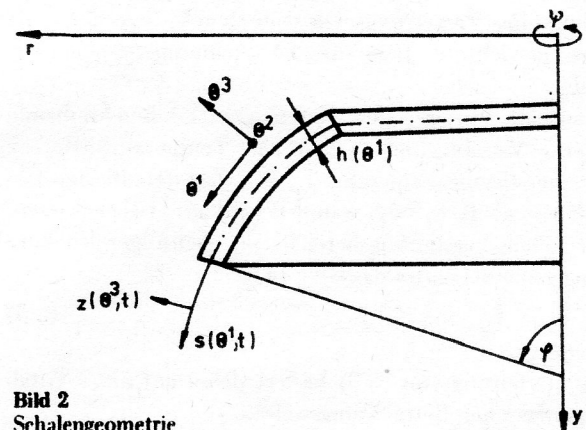


Bild 2
Schalengeometrie

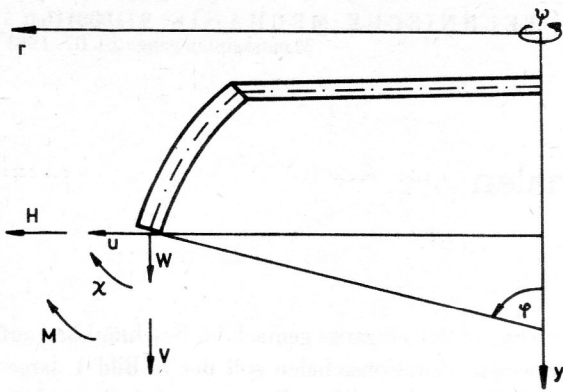


Bild 3
Raumfeste Verschiebungs- und Schnittgrößen in einem Schalenquerschnitt

Dabei sind s und z zu Θ^1 bzw. Θ^3 analoge Koordinaten mit physikalischer Bedeutung. In y sind die raumfesten Verschiebungs- und Kraftgrößen eines Schalenrandes gemäß Bild 3 erfasst:

$$\dot{y} = [\dot{u}^T, \dot{k}^T, 1]^T = [\dot{u}, \dot{w}, \dot{\chi}, \dot{H}, \dot{V}, \dot{M}, 1]^T \quad (2.3)$$

Die Spaltenmatrix z_s enthält alle interessierenden Schalenzustandsgrößen. Es sei an dieser Stelle noch eine Bemerkung zu Gl. (2.1) gestattet. Die Formulierung des Schalen-RWP erfolgt in konjugierten Variablen auf der Basis einer konvektiven Betrachtungsweise [8].

Das so formulierte RWP stellt eine Weiterentwicklung gegenüber den Arbeiten [1], [2], [5] dar. Dies betrifft vor allem die Erfassung großer Mittelflächendehnungen. Außerdem besitzt das bis dahin ausschließlich direkt formulierte RWP erstmals die erforderlichen Potential-eigenschaften eines Minimumproblems, was sich in der Erfüllung gewisser Symmetrieeigenschaften in der Matrix B_{RWP} äußert.

Im Schalen-RWP (2.1) wird ein Deformationsgesetz in konvektiver Standardformulierung verwendet, wie es ausführlich in [10] vorgestellt wird:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \dot{\underline{\sigma}}) = C \dot{\underline{\epsilon}} + d_T \dot{T} + d \quad (2.4.1)$$

$$\dot{h} = B \dot{\underline{\epsilon}} + e_T \dot{T} + e \quad (2.4.2)$$

In $\underline{\sigma}$ werden die im jeweiligen Fall interessierenden physikalischen Koordinaten des Cauchyschen Spannungstensors erfasst. Auf gleiche Weise stellt dann $\underline{\epsilon}$ ein logarithmisches Verzerrungsmaß vom Hencky-Typ dar. $\underline{\sigma}$ ist eine gewichtete Jaumannsche Spannungsgeschwindigkeit.

h enthält weitere, den Materialzustand beschreibende interne Variable und T stellt eine Temperaturdifferenz zu einer Bezugstemperatur T_0 dar. Zur detaillierten Gestalt von C , B , e_T , d_T , e und d wird auf [10] verwiesen. Für einen Versteifungsbereich (im nachfolgenden kurz Ring genannt) lautet das RWP [4]:

$$K_T \dot{u}_v = \dot{f}_R \quad (2.5)$$

Die Herleitung von (2.5) basiert dabei auf einer Total-Lagrangischen Betrachtungsweise.

In \dot{u}_v sind die Verschiebungsgeschwindigkeiten aller Knoten eines Ringes enthalten und \dot{f}_R beinhaltet die Änderungsgeschwindigkeiten der eingepägten Knotenkräfte. Kernstück des entwickelten Berechnungsverfahrens ist es nun, aus der Steifigkeitsbeziehung (2.5) eine Ringübertragungsmatrix herzuleiten.

Dazu erfolgt in einem ersten Schritt eine Freiheitsgradreduktion, d. h., es werden die Freiheitsgrade aller Knoten eliminiert, die nicht in den Anschlußquerschnitten Schale/Ring liegen. Gl. (2.5) geht dann in eine Beziehung der Form

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_{e(k)} \\ \dot{u}_{e(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{f}_{e(k)} & -\dot{f}_{\tilde{e}(k)} \\ \dot{f}_{e(k+1)} & -\dot{f}_{\tilde{e}(k+1)} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

über, wobei in $\dot{u}_{e(k)}$, $\dot{u}_{e(k+1)}$, $\dot{f}_{e(k)}$ und $\dot{f}_{e(k+1)}$ die Verschiebungs- und Kraftgeschwindigkeiten der in den Anschlußquerschnitten k bzw. $k+1$ liegenden Knoten enthalten sind (Bild 4):

$$\dot{u}_{e(k)} = [\dot{u}_1, \dot{w}_1, \dots, \dot{u}_{p(k)}, \dot{w}_{p(k)}]^T \quad (2.7)$$

$$\dot{f}_{e(k)} = [\dot{f}_{r1}, \dot{f}_{y1}, \dots, \dot{f}_{rp(k)}, \dot{f}_{yp(k)}]^T \quad (2.8)$$

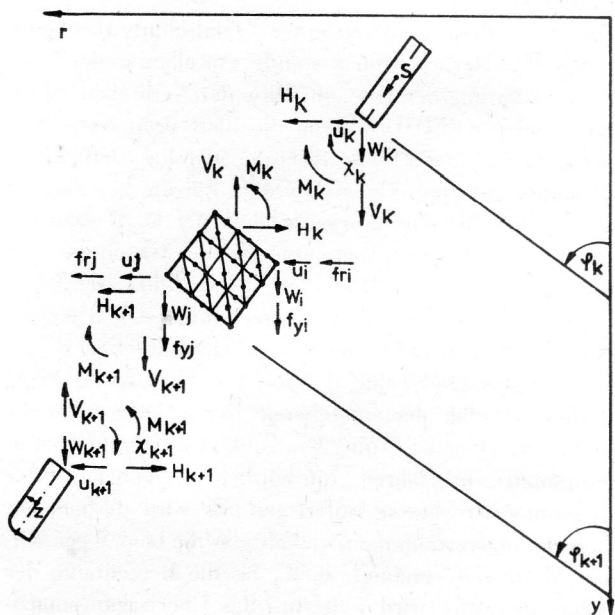


Bild 4
Kraft- und Verformungsgrößen für Anschlußquerschnitte Schale - Ring

In den Gl. (2.7) bzw. (2.8) ist $p(k)$ die Anzahl der im Querschnitt k liegenden Knoten. In analoger Weise gelten (2.7) und (2.8) auch für den Querschnitt $k+1$. Für einen Anschlußquerschnitt Schale/Ring wird, wie in der Theorie dünner Schalen üblich, gefordert, daß dieser während des Deformationsprozesses eben und normal zur Schalenmittelfläche bleibt (Bernoulli-Hypothese). Mit Hilfe dieser Annahme lassen sich die Verschiebungen der in einem Koppelquerschnitt liegenden Knoten über die Verformung der Schalenmittelfläche ausdrücken. Für die Geschwindigkeiten ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{u}}_{e(k+1)} = \mathbf{G}_{(k+1)} \dot{\mathbf{u}}_{(k+1)} \quad (2.9)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{e(k)} = \mathbf{G}_{(k)} \dot{\mathbf{u}}_{(k)} \quad (2.10)$$

mit

$\dot{\mathbf{u}}_{(k)}$ und $\dot{\mathbf{u}}_{(k+1)}$ gemäß Gl. (2.3)

und

$$\mathbf{G}_{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_1 \cos \varphi_k \\ 0 & 1 & -z_1 \sin \varphi_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -z_{p(k)} \cos \varphi_k \\ 0 & 1 & -z_{p(k)} \sin \varphi_k \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$\mathbf{G}_{(k+1)}$ besitzt eine zu Gl. (2.11) analoge Gestalt.

Das statische Gleichgewicht in den Querschnitten k und $k+1$ liefert die folgenden Beziehungen (Bild 4):

$$\dot{\mathbf{k}}_k = \frac{1}{2\pi} (-\mathbf{G}_{(k)}^T \dot{\mathbf{f}}_{e(k)} + \mathbf{F}_{s(k)} \dot{\mathbf{u}}_k) \quad (2.12)$$

$$\dot{\mathbf{k}}_{k+1} = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{G}_{(k+1)}^T \dot{\mathbf{f}}_{e(k+1)} - \mathbf{F}_{s(k+1)} \dot{\mathbf{u}}_{k+1}) \quad (2.13)$$

mit

$$\mathbf{F}_{s(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{p(k)} (f_{ri} z_i \sin \varphi_k - f_{yi} z_i \cos \varphi_k) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Die Matrizen $\mathbf{F}_{s(k)}$ und $\mathbf{F}_{s(k+1)}$ repräsentieren dabei die Veränderung des Gleichgewichtes infolge der Drehung eines Querschnittes.

(2.9) und (2.10) sowie (2.12) und (2.13) werden nun in (2.6) eingesetzt und nach entsprechender Umstellung ergibt sich mit

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{G}_{(k)}^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{G}_{(k)} - \mathbf{G}_{(k)}^T \mathbf{K}_{12} \mathbf{G}_{(k+1)} \\ + \mathbf{F}_{s(k)} \\ \mathbf{G}_{(k+1)}^T \mathbf{K}_{12}^T \mathbf{G}_{(k)} \quad \mathbf{G}_{(k+1)}^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{G}_{(k+1)} \\ - \mathbf{F}_{s(k+1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_k \\ \dot{\mathbf{u}}_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_{(k)}^T \tilde{\mathbf{f}}_{(k)} \\ \mathbf{G}_{(k+1)}^T \tilde{\mathbf{f}}_{(k+1)} \end{bmatrix} = 2\pi \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{k}}_k \\ \dot{\mathbf{k}}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

eine auf die Schalenfreiheitsgrade- und Schnittgrößen reduzierte Steifigkeitsbeziehung.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{11} &= \frac{1}{2\pi} (-\mathbf{G}_{(k)}^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{G}_{(k)} + \mathbf{F}_{s(k)}) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{12} &= \frac{1}{2\pi} (-\mathbf{G}_{(k)}^T \mathbf{K}_{12} \mathbf{G}_{(k+1)}) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{22} &= \frac{1}{2\pi} (\mathbf{G}_{(k+1)}^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{G}_{(k+1)} - \mathbf{F}_{s(k+1)}) \\ \tilde{\mathbf{b}}_1 &= -\frac{1}{2\pi} (\mathbf{G}_{(k)}^T \tilde{\mathbf{f}}_{(k)}) \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 &= \frac{1}{2\pi} (\mathbf{G}_{(k+1)}^T \tilde{\mathbf{f}}_{(k+1)}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

wird die Beziehung (2.15) nach $\dot{\mathbf{k}}_{k+1}$ und $\dot{\mathbf{u}}_{k+1}$ aufgelöst:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{k+1} \\ \dot{\mathbf{k}}_{k+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{K}}_{12}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12}^{-1} & -\tilde{\mathbf{K}}_{12}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ -\tilde{\mathbf{K}}_{12}^T - \tilde{\mathbf{K}}_{22} \tilde{\mathbf{K}}_{12}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{22} \tilde{\mathbf{K}}_{12}^{-1} & \tilde{\mathbf{b}}_2 - \tilde{\mathbf{K}}_{22} \tilde{\mathbf{K}}_{12}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_k \\ \dot{\mathbf{k}}_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Mit (2.17) liegt die eingangs geforderte Übertragungsmatrizenformulierung vor:

$$\dot{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{U}_k^{k+1} \cdot \mathbf{y}_k \quad (2.18)$$

Unter Beachtung von (2.3) ergibt sich die Übertragungsmatrix \mathbf{U}_k^{k+1} aus (2.17). Mit \mathbf{U}_k^{k+1} kann das Schalen-RWP (2.1) in der bisher üblichen Weise gelöst werden [1], [2], [5].

Zur Lösung von (2.1) wird dazu der Ansatz

$$\dot{\mathbf{y}}_j = \mathbf{F}_j \dot{\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

gemacht. \mathbf{F}_j ist eine Feldmatrix, die mittels eines Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung berechnet wird. Der Vektor $\dot{\mathbf{x}}$ enthält die 3 unbekanntenen Komponenten von $\dot{\mathbf{y}}$ am Schalenanfangsrand

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, 1]^T \quad (2.20)$$

Die Randbedingungen werden in folgender Weise formuliert:

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{Anfangsrand}) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{S} \dot{\mathbf{y}}_E = \mathbf{0} \quad (\text{Endrand}) \quad (2.22)$$

(2.21) führt mit (2.19) sofort auf

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{A} \quad (2.23)$$

und (2.22) stellt eine Bestimmungsgleichung für die Berechnung der drei unbekanntenen Komponenten von $\dot{\mathbf{x}}$ dar:

$$S F_E \dot{x} = 0 \quad (2.24)$$

Mit bekanntem \dot{x} können dann die Vektoren \dot{y} an allen Meridianstützstellen ermittelt werden.

Die Kombination von Gl. (2.18) und (2.19) ergibt

$$F_{k+1} = U_k^{k+1} F_k \quad (2.25)$$

Damit kann die entsprechend Gl. (2.17) bekannte Ringübertragungsmatrix ohne weiteres im bisher üblichen Algorithmus zur Lösung des Schalen-RWP weiterverarbeitet werden. Denkbar wäre auch der Fall, daß sich ein Ring an einem Schalenanfangs- bzw. Endrand befindet.

Gl. (2.15) vereinfacht sich dann unter Berücksichtigung von (2.16) zu

$$\dot{k} = \tilde{K} \dot{u} + \tilde{b} \quad (2.26)$$

Wählt man die Verschiebungsgrößen als Unbekannte,

$$\dot{x} = [\dot{u}^T, 1]^T \quad (2.27)$$

so lassen sich A und S wie folgt angeben:

$$A = \begin{bmatrix} E & 0 \\ \tilde{K} & \tilde{b} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$S = [\tilde{K} \quad -E \quad \tilde{b}] \quad (2.29)$$

Das entwickelte Verfahren zur Berechnung des Spannungs- und Deformationszustandes einer versteiften Rotationsschale umfaßt mehrere Teilschritte. Zunächst werden in der bereits angegebenen Weise die Ringübertragungsmatrizen bzw. falls erforderlich die Matrizen A und S berechnet. Daran anschließend erfolgt die Lösung des Schalen-RWP (2.1) und mit Gl. (2.2) stehen die Änderungsgeschwindigkeiten aller interessierenden Schalenzustandsgrößen zur Verfügung. Über die Gln. (2.9) und (2.10) können dann die Verschiebungsgeschwindigkeiten der in den Anschlußquerschnitten Schale/Ring liegenden Knoten berechnet werden. Diese werden als „Belastung“ für einen Ring aufgefaßt. Mit diesen sowie mit gegebenenfalls vorhandenen äußeren Ringbelastungen wird das Ring-RWP (2.5) gelöst. Damit sind die Knotenverschiebungsgeschwindigkeiten aller Knoten des Ringes bekannt. Daran schließt sich noch die Ermittlung der Knotenkraftgeschwindigkeiten sowie der Verzerrungs- und Spannungsgeschwindigkeiten an.

Dies erfolgt mit Hilfe der folgenden Beziehungen [4]:

$$\underline{\epsilon}_L = B \dot{u}^c \quad (2.30)$$

$$\underline{\sigma}_L = \bar{C} \underline{\epsilon}_L \quad (2.31)$$

wobei für die Ringe ein axialsymmetrischer Verzerrungs- bzw. Spannungszustand vorausgesetzt wird:

$$\underline{\epsilon}_L = [E_{rr}, E_{\psi\psi}, E_{yy}, 2E_{ry}]^T \quad (2.32)$$

$$\underline{\sigma}_L = [T_{rr}, T_{\psi\psi}, T_{yy}, T_{ry}]^T \quad (2.33)$$

In $\underline{\epsilon}_L$ und $\underline{\sigma}_L$ sind die im axialsymmetrischen Fall von Null verschiedenen physikalischen Koordinaten des Greenschen Verzerrungstensors bzw. des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors erfaßt. Gl. (2.30) stellt dabei die nichtlinearen Verzerrungs- Verschiebungsbeziehungen für ein finites Element dar, d. h., \dot{u}^c enthält die Verschiebungsgeschwindigkeiten der Knoten eines Elementes.

Mit den Gln. (2.30) und (2.31) existiert dann der vollständige Gleichungssatz zur Bestimmung der Änderungsgeschwindigkeiten aller Zustandsgrößen von Schale und Ring. Somit ergibt sich ein nichtlineares Anfangswertproblem der Form

$$\dot{z}_{ges} = \tilde{C}_{AWP} \dot{y}_{ges} \quad (2.34)$$

mit

$$z_{ges} = [z_s^T, z_R^T]^T$$

$$z_R = [u_v^T, f_R^T, \epsilon_L^T, \sigma_L^T]^T \quad (2.35)$$

$$\dot{y}_{ges} = [\dot{y}^T, \dot{u}_v^T, \dot{f}_R^T]$$

und

$$\tilde{C}_{AWP} = \begin{bmatrix} C_{AWP} & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & \bar{C} B & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Das AWP (2.34) wird mit einem Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung gelöst (elastisch-plastisches Material). Abschließend erfolgt noch die Berechnung der Vergleichsspannung und der Plastizitätstest für die Ringe [4], so daß damit dann alle interessierenden Zustandsgrößen von Schale und Ring zu einem konkreten Zeitpunkt bekannt sind.

3. Das Programm NISCHA 86

Das Programm NISCHA 86 dient der Berechnung dreh-symmetrisch belasteter, dünner Rotationsschalen mit kompakten Versteifungen bei großen Verformungen. Das Materialverhalten kann linearelastisch oder elastisch-plastisch mit isotroper Verfestigung sein.

Programmiersprache ist FORTRAN IV. Das Programm wurde auf der EDVA BESM-6 der TU Dresden implementiert und liegt in einer nachnutzungsbereiten Version vor. Zu speziellen Fragen der Programmnutzung wird auf die erarbeitete Anwenderdokumentation verwiesen [11]. Die Erstellung des Programmes NISCHA 86 erfolgte unter Nutzung bereits vorliegender, anwendungsbereiter Programmsysteme. Das waren zum einen das Rotationsschalenprogramm NISCHA 82 (TU Dresden/TU Karl-Marx-Stadt) und zum anderen das FEM-Programm FIDEFA II (IH Zwickau). Dabei ist es nach Kenntnis des Autors erstmalig in der DDR gelungen, zwei von unterschiedlichen Autoren unabhängig voneinander ent-

wickelte und auf unterschiedlichen theoretischen Betrachtungsweisen fußende, relativ große Programmsysteme zu koppeln. Entsprechend dem entwickelten Berechnungsverfahren wird dabei NISCHA 82 zum „steuernden“ Programm, d. h., die Programmorganisation (Arbeit mit Externspeicher, Segmentierung, Datenfluß) von NISCHA 82 wurde weitestgehend beibehalten. Neu erstellt werden mußten all die Programmteile zur Berechnung der Ringübertragungsmatrix aus der Ringsteifigkeitsmatrix. Aus FIDEFA II wurden die Programmteile zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix, zur Lösung des Gleichungssystems sowie zu Berechnungen der Verzerrungs- und Spannungsgeschwindigkeiten genutzt. Dabei waren jedoch relativ umfangreiche Änderungen erforderlich, besonders bezüglich der Organisation des Datenflusses, der Arbeit mit Externspeichern sowie eine Anpassung an das in NISCHA 82 bzw. NISCHA 86 verwendete Verfahren zur Zeitintegration (Runge-Kutta 2. Ordnung).

Die Änderungen in NISCHA 82 waren nicht so gravierend. Sie betrafen vor allem die Einbeziehung der Ringzustandsgrößen in den Datenfluß sowie einige Steueranweisungen zur Weiterverarbeitung der Ringübertragungsmatrix.

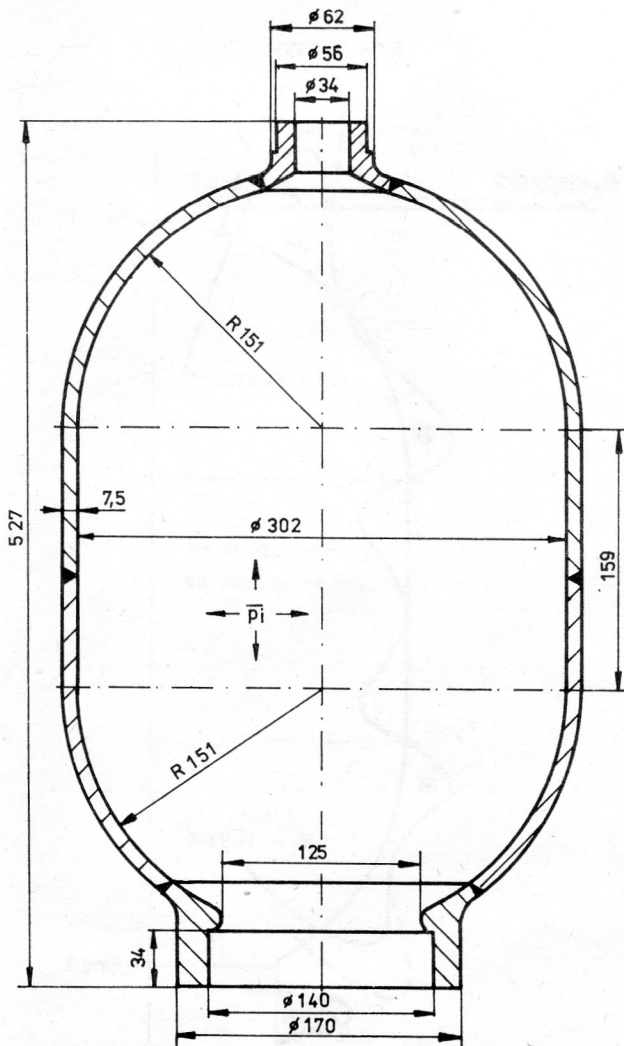


Bild 5
Druckspeicher 25 dm³

Das entwickelte Programm NISCHA 86 besitzt den gleichen Leistungsumfang wie NISCHA 82 bezüglich der Erfassung der Schalengeometrie, der möglichen Randbedingungen sowie Belastungen [11]. Einschränkungen gibt es nur hinsichtlich der Vielfalt der Deformationsgesetze. Dies hat seine Ursache darin, daß in FIDEFA II keine rheonomen und nur eine eng begrenzte Auswahl skleronomer Deformationsgesetze programmtechnisch realisiert sind.

4. Anwendungsbeispiel

An einem praktisch relevanten Beispiel, dem in Bild 5 dargestellten Druckspeicher, sollen die Möglichkeiten und Vorteile des entwickelten Programmes NISCHA 86 demonstriert werden. Der Behälter wird mit einem Innendruck von 20 MPa belastet. Das Materialverhalten ist linearelastisch-idealplastisch mit den Materialparametern

$$\text{Elastizitätsmodul } E = 210\,000 \text{ MPa}$$

$$\text{Querkontraktionszahl } \nu = 0,31$$

$$\text{Anfangsfließspannung } \sigma_{F_0} = 690 \text{ MPa.}$$

Am unteren Ende des Behälters ist dieser mit einem Deckel verschlossen, welcher dort eingeschraubt ist.

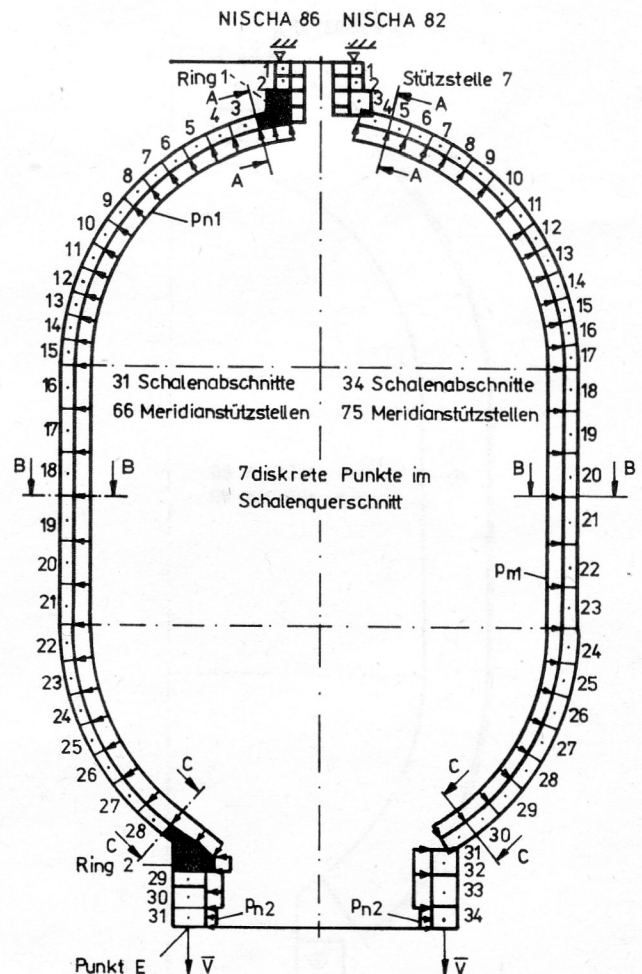


Bild 6
Berechnungsmodelle NISCHA 82 bzw. NISCHA 86

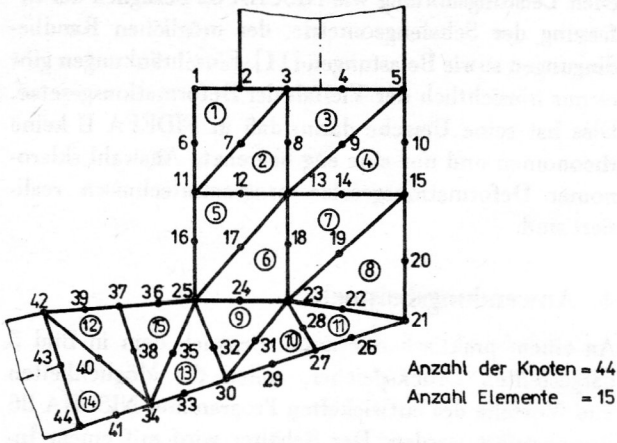
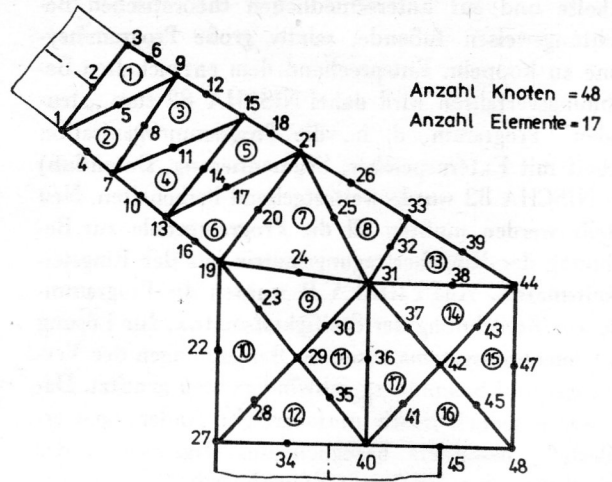


Bild 7
Vernetzung der Ringe 1 und 2

Zur Untersuchung des Behälters wurden zwei unterschiedliche Berechnungsmodelle entsprechend den Möglichkeiten der Programme NISCHA 86 bzw. NISCHA 82 entwickelt (Bild 6). Die Ringlast \bar{V} ist statisch äquivalent zur resultierenden Kraft des auf die Deckelfläche wirkenden Innendruckes. Die Belastungsgrößen \bar{p}_{n1} bzw. \bar{p}_{n2}



entsprechen dem Innendruck p_i bzw. dem radial wirkenden Gewindedruck infolge des eingeschraubten Deckels ($\bar{p}_{n2} = 23,58 \text{ MPa}$ bei $\bar{p}_i = 20 \text{ MPa}$).

Bild 7 zeigt die Vernetzung der beiden Ringe bei der NISCHA 86 – Rechnung. Aus der auf Teile der Ringoberflächen wirkenden Druckverteilung werden programmintern äquivalente Knotenkräfte berechnet, wobei für die Ringe jedoch nur richtungstreue Belastungen

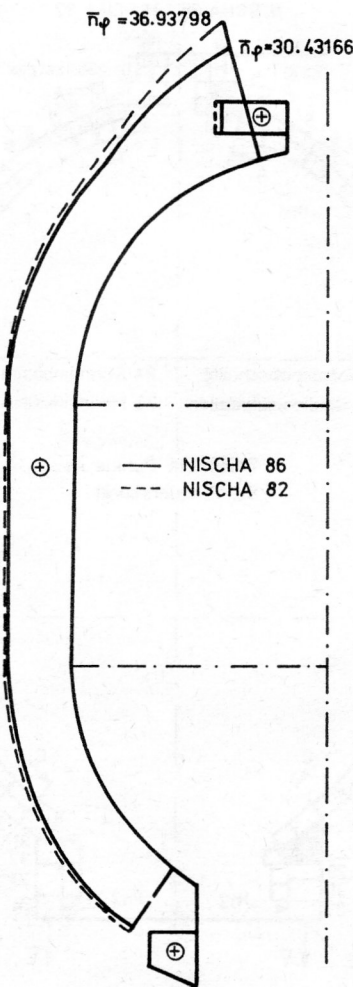


Bild 8
Schnittkraft \bar{n}_φ bei $\bar{p} = 20.0$

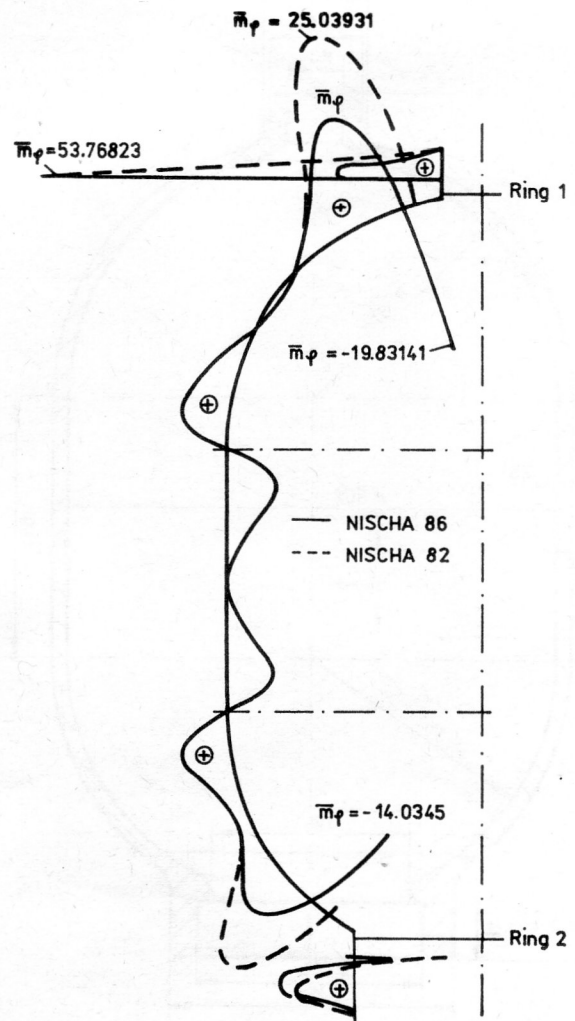


Bild 9
Moment \bar{m}_φ bei $\bar{p} = 20.0$

berücksichtigt werden können. Bei der Kleinheit der zu erwartenden Ringdrehungen wird dieses Problem jedoch praktisch unbedeutend.

Die parallele Untersuchung des Behälters sowohl mit NISCHA 86 als auch mit NISCHA 82 diente dem Zweck, den Einfluß der unterschiedlichen Berechnungsmodelle auf die erzielten Lösungen zu ermitteln. Praktisch spürbare Abweichungen ergaben sich vor allem in den Ringbereichen und den ringnahen Schalenbereichen. Dies soll durch einige ausgewählte Ergebnisse illustriert werden (Bilder 8 bis 10). Dabei sind die dargestellten numerischen Ergebnisse wie folgt normiert:

- Spannungsgrößen $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_o}, \quad \sigma_o = 100 \text{ MPa}$
- Druck $\bar{p}_i = \frac{p_i}{p_o}, \quad p_o = 1 \text{ MPa}$
- Schnittkraft $\bar{n} = \frac{n}{n_o}, \quad n_o = 100 \text{ N/mm}$
- Schnittmoment $\bar{m} = \frac{m}{m_o}, \quad m_o = 100 \text{ N}$
- Verschiebung $\bar{u}_y = \frac{u_y}{u_o}, \quad u_o = 0,1 \text{ mm.}$

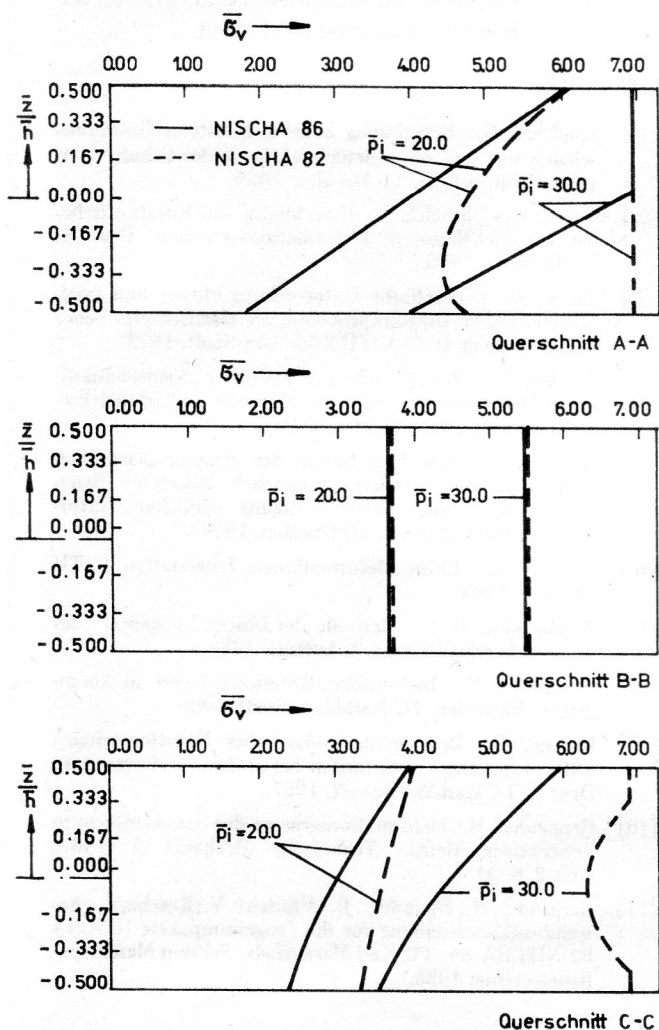


Bild 10
Vergleichsspannung $\bar{\sigma}_v$ in ausgewählten Querschnitten

Als ein genereller Fakt ergab sich dabei, daß das reine Schalenmodell (NISCHA 82) für die ringnahen Schalenbereiche zu hohe Beanspruchungswerte liefert. In den von den Ringen weiter entfernten Schalenbereichen liegt dagegen eine nahezu vollständige Identität der beiden erzielten Lösungen vor, d. h., der Einfluß der Versteifungsringe auf den Spannungs- bzw. Deformationszustand der angeschlossenen Schalenbereiche bleibt örtlich begrenzt.

Für einen Betriebsdruck von 20 MPa bleibt der Behälter mit Ausnahme einiger kleiner Gebiete im Ring 1 (NISCHA 86) bzw. in den Schalenelementen 4 und 31 (NISCHA 82) elastisch. Über den Betriebsdruck von 20 MPa hinaus erfolgte eine Untersuchung des Behälters bis zu einem Druck $p_i = 40 \text{ MPa}$. Bild 11 zeigt für ausgewählte Druckstufen die Ausbreitung der plastischen Gebiete in den Schalenbereichen und in Bild 12 ist das Fortschreiten der Plastifizierung in den Ringen dargestellt. Auch hier erbringt der Vergleich der beiden Berechnungsmodelle (soweit möglich) erkennbare Abweichungen nur in den ringnahen Zonen. Bemerkenswert ist auch die Tatsache, daß es trotz der Ausbildung vollplastischer Querschnitte und einem elastisch-idealplastischen Materialverhalten nicht zum Bauteilversagen, d. h., dem Erreichen der Traglast kommt. Dabei soll unter Traglast der Zustand verstanden werden, bei dem eine beliebige kleine Laststeigerung eine über alle Maßen wachsende Verformung zur Folge hat. Als ein charakteristisches Maß dafür kann die Verschiebung u_y des Punktes E be-

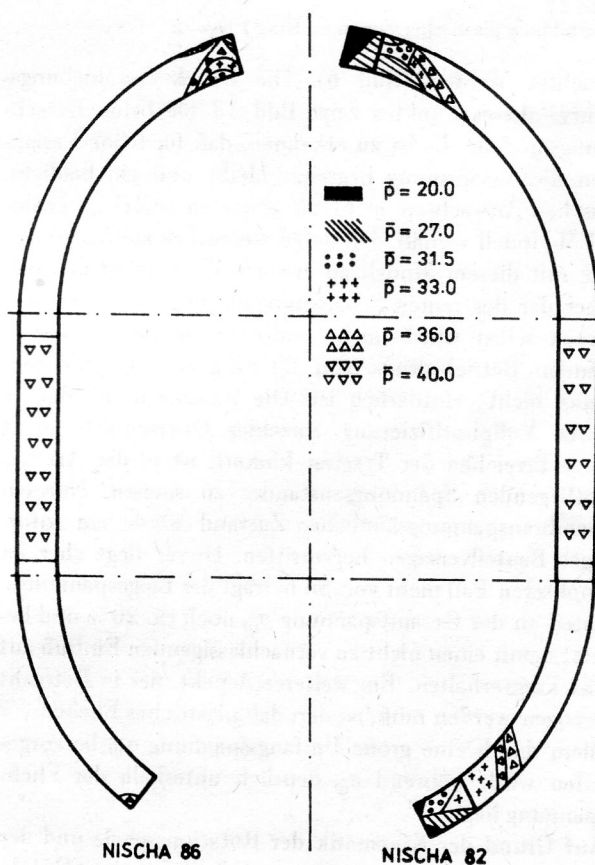


Bild 11
Ausbildung plastischer Zonen im Schalenbereich

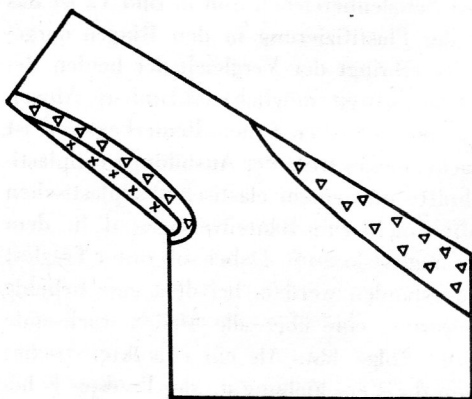
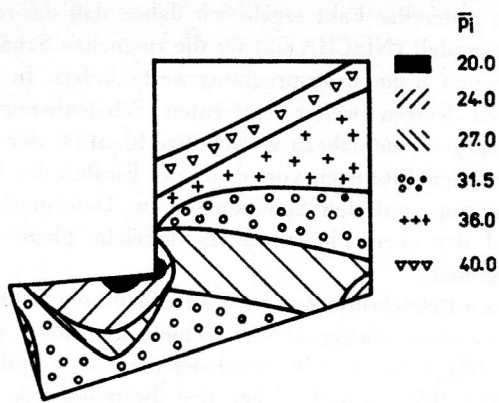


Bild 12
Ausbildung plastischer Zonen im Ring 1 bzw. 2

trachtet werden (Bild 6). Die Druck-Verschiebungskurve dieses Punktes zeigt Bild 13 für beide Berechnungsmodelle. Es ist zu erkennen, daß für beide Varianten die Verformung begrenzt bleibt und ein baldiges, rasches Anwachsen nicht zu erwarten ist. Das Schale/FEM-Modell verhält sich dabei wesentlich steifer, so daß die mit diesem Modell zu erwartende Traglast deutlich über der des reinen Schalenmodells liegt. Der Traglastdruck selbst wurde nicht ermittelt, da für den vorliegenden Betriebsdruck von 20 MPa eine Traglastrechnung nicht erforderlich ist. Die Ursache dafür, daß es trotz Vollplastifizierung einzelner Querschnitte nicht zum Erreichen der Traglast kommt, ist in der Art des vorliegenden Spannungszustandes zu suchen. Nur ein membranspannungsähnlicher Zustand würde ein sofortiges Bauteilversagen hervorrufen. Dieser liegt aber im konkreten Fall nicht vor. So beträgt der Biegespannungsanteil an der Gesamtspannung σ_φ noch ca. 20 % und besitzt damit einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf das Tragverhalten. Ein weiterer Aspekt, der in Betracht gezogen werden muß, ist der, daß plastisches Fließen vor allem durch eine große Umfangsspannung σ_ψ hervorgerufen wird, während σ_φ deutlich unterhalb der Fließspannung liegt.

Auf Grund der Kinematik der Rotationschale und der konkreten Bauteilgeometrie ist deshalb bei dem Druckspeicher trotz der vorhandenen, teilweisen Vollplastifizierung das Tragvermögen noch nicht vollständig erschöpft.

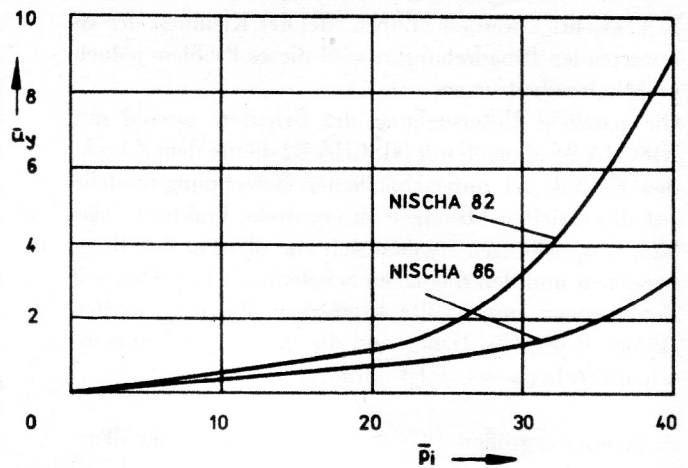


Bild 13
Verschiebung \bar{u}_y des Punktes E in Abhängigkeit vom Druck

Die Auswertung der durchgeführten Untersuchungen verdeutlicht die Vorteile des entwickelten Berechnungsverfahrens. Diese liegen einerseits in der genaueren Berechnung des Spannungs- und Deformationszustandes versteifter Rotationschalen und andererseits daraus resultierend in der Erschließung von Festigkeitsreserven, besonders dann, wenn die kritischen Stellen der Konstruktion als Schale schlecht zu modellieren sind, wie dies bei dem vorgestellten Druckspeicher der Fall ist.

LITERATUR:

- [1] Landgraf, G.: Berechnung beliebig belasteter Rotationschalen mit und ohne Berücksichtigung der Schubverzerrung. Habil.-Schrift. TU Dresden, 1969.
- [2] Röhle, H.; Ulbricht, V.: Berechnung von Rotationschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten. Diss. A, TU Dresden, 1975.
- [3] Höfer, E.: Theoretische Untersuchung ebener und axial-symmetrischer Umformprobleme als elastisch-plastischer Anlaufvorgang. Diss. A, TU Karl-Marx-Stadt, 1973.
- [4] Strobel, W.: Zur Berechnung endlicher elastisch-plastischer Deformationen mit der Methode der finiten Elemente. Diss. A, IH Zwickau, 1984.
- [5] Herrlich, O.: Die Berechnung des elastisch-plastischen Verhaltens von rotationssymmetrisch belasteten Rotationschalen unter Berücksichtigung endlicher Verformungen. Habil.-Schrift, TU Dresden, 1969.
- [6] Günther, H.: Finite Deformationen, Dissertation B, TU Dresden, 1982.
- [7] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 2. Auflage, 1983.
- [8] Bergänder, H.: Inelastische Rotationschalen in konjugierten Variablen. TU Karl-Marx-Stadt, 1986.
- [9] Resche, G.: Berechnung inelastischer Rotationschalen mit kompakten Versteifungen bei großen Verformungen. Diss. A, TU Karl-Marx-Stadt, 1987.
- [10] Bergänder, H.: Deformationsgesetze der Standardform in konvektiver Metrik. Technische Mechanik 8 (1987) Heft 2, S. 31.
- [11] Bergänder, H.; Nitzschke, R.; Ulbricht, V.; Resche, G.: Anwendungsbeschreibung für die Programmpakete NISCHA 82/NISCHA 86. TU Karl-Marx-Stadt, Sektion Maschinenbauelemente, 1986.