

Die Anwendung eines dualen Optimierungsverfahrens zur Masseminimierung von Konstruktionen unter Eigenfrequenzrestriktionen

Uwe Schramm

1. Einleitung

In den letzten Jahren ist die Konstruktionsoptimierung zu einem wichtigen Gebiet der angewandten Mechanik geworden.

Die vorliegende Arbeit stellt einige Ergebnisse der in dem Bericht [1] zusammengefaßten Untersuchungen zur Konstruktionsoptimierung unter Eigenfrequenzrestriktionen vor.

Seit Anfang der 60er Jahre entwickelten sich mit Rechentechnik und FEM auch numerische Methoden zur Konstruktionsoptimierung [2]. Die ersten Verfahren waren einfache Gradientenverfahren. Die Möglichkeiten blieben jedoch begrenzt, da die mehrfach erforderliche FEM-Analyse des Problems zu kostspielig war. Es wurden kleinere Probleme bis maximal 50 Variable gelöst.

Ende der 60er Jahre wurden Optimalitätskriterienmethoden entwickelt. Sie sind einfach realisierbar, haben jedoch einige Nachteile, wie z. B. schlechte Konvergenz. Um 1970 kamen in der Konstruktionsoptimierung verstärkt Reanalyseverfahren zur Aufwandsverringerung zum Einsatz [3], [4]. Insbesondere die Taylorreihenapproximation, nach den Reziproken der Entwurfsparameter entwickelt, wurde eingesetzt. In der weiteren Entwicklung bis heute haben sich Approximationsmethoden in Verbindung mit dualen Optimierungsmethoden durchgesetzt. Aber auch die schrittweise lineare Optimierung und Transformationsmethoden werden eingesetzt. Ebenso wie die Methoden hat sich auch der Umfang der behandelten Probleme entwickelt. Wurden anfangs nur Querschnittsgrößen berücksichtigt, so kommen heute Gestalt [5], [6] und Materialeigenschaften [7] hinzu. Es wird auch begonnen, Strukturen mit geometrisch oder physikalisch nichtlinearem Verhalten zu optimieren [8] bis [10]. Die Tendenz geht dahin, immer komplexere Konstruktionen unter vielfältigen Restriktionen zu berechnen. So sind in [7], [12] vollständig durchgerechnete Flugzeugkonstruktionen als Beispiele angegeben. Heute existiert weltweit eine Vielzahl von Programmsystemen zur Optimierung elastischer Strukturen. Einige seien hier nur genannt: ACCESS, ADS, CONMIN, DUAL2, NEWSUMT, OASIS, SHILOPT. Auf dem Internationalen Symposium zur Konstruktionsoptimierung 1981 in Tucson [13], das den aktuellen Stand zu Beginn der 80er Jahre repräsentierte, wurden viele Anwendungen aus Raum- und Luftfahrttechnik, Kernenergietechnik, Bauwesen und Stahlbau vorgestellt. Aus dem Schiffbau sind Anwendungen zur Optimierung des Stahlschiffkörpers bekannt [14], [15]. So wies auch der 9. ISSC [16] auf die wachsende Bedeutung der Konstruktionsoptimierung

hin. Sicher werden mit der weiteren Einführung von rechnerunterstützten Entwurfs- und Konstruktionssystemen Methoden zur numerischen Auslegung von Konstruktionen Eingang in die Praxis finden.

Parallel zur Weiterentwicklung der numerischen Behandlung von Konstruktionsoptimierungsaufgaben erfolgte auch die analytische Bearbeitung einiger Probleme, was jedoch ohne größere praktische Bedeutung ist.

Das Optimierungsproblem kann wie folgt formuliert werden:

Zielfunktion (ZF): $W(\underline{p}) \Rightarrow \text{MIN}$

$$\begin{aligned} \text{Restriktionen (R): } & g_i(\underline{p}) \leq \bar{g}_i & i = 1 \dots n \\ & h_k(\underline{p}) = 0 & k = 1 \dots l \quad (1) \\ & \underline{p}_j \leq p_j \leq \bar{p}_j & j = 1 \dots m \end{aligned}$$

Die Zielfunktion $W(\underline{p})$ ist zumeist die Masse der Konstruktion. Alle Forderungen an das Verhalten lassen sich über die Restriktion erfassen. Als Restriktionen sind möglich: Spannungen, Verschiebungen, Eigenfrequenzen, Beullasten, aber auch Bewegungswiderstände und andere Größen. Entwurfsparameter p_j sind Querschnittsgrößen, Knotenkoordinaten in FEM-Idealisierungen oder Richtungen von Werkstoffeigenschaften. Die Restriktionen sind im allgemeinen nichtlineare Funktionen der Parameter p_j , das Optimierungsproblem ist somit ein nichtlineares. Werden nur Querschnitte geändert, ist die Masse der Konstruktion eine lineare Funktion von p_j , ansonsten ist auch $W(\underline{p})$ nichtlinear.

Zur Optimierung unter Eigenfrequenzrestriktionen gibt es vergleichsweise wenige Veröffentlichungen. Erste Untersuchungen beschränken sich auf die analytische Behandlung einfacher Probleme [17] bis [19]. Die erste Arbeit zur Optimierung diskretisierter Systeme lieferte Zargamee [20], jedoch ohne geschlossenen Algorithmus. Eine Zusammenfassung von Arbeiten bis 1972 veröffentlichte Pierson [21]. In den meisten Fällen sind Eigenfrequenzrestriktionen Bestandteil größerer Optimierungsaufgaben [7]. Jüngst erschienen einige Beispiele für reine Eigenfrequenzrestriktionen, gelöst mit Optimalitätskriterienmethoden.

Schlüter [22], [23] optimierte versteifte Plattenfelder, wobei die elastische Struktur nach der Methode von Ritz idealisiert wurde. Sadek [24], [25] behandelt Stabtragwerke.

Das Konstruktionsoptimierungsproblem lautet:

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & W(\underline{p}) \Rightarrow \text{MIN} \\ & \underline{\lambda}_i \leq \lambda_i \leq \bar{\lambda}_i & i = 1 \dots n \quad (2) \\ & \underline{p}_i \leq p_i \leq \bar{p}_i & j = 1 \dots m \end{aligned}$$

$W(\underline{p})$ ist die Masse der Konstruktion. Mit (2) ist das zu betrachtende Problem formuliert. Die von einigen Autoren durchgeführte Berechnung von Strukturen maximaler Grundfrequenz bei vorgegebener Masse sind praktisch wenig sinnvoll, da es erforderlich ist, Konstruktionen zu entwickeln, deren Eigenfrequenzen nicht mit den Erregerfrequenzen in Resonanz kommen. Das Vermeiden von Resonanzen ist nur mit der Formulierung (2) möglich.

Im vorliegenden Artikel soll ein Verfahren vorgestellt werden, das bei der Lösung des Problems (2) angewendet wurde. Es handelt sich dabei um einen dualen Algorithmus auf der Grundlage einer linearisierten Taylorreihenentwicklung.

2. Das Optimierungsverfahren

Die Herleitung des Optimierungsverfahrens erfolgt für den Fall beliebiger Restriktionen. Das zu lösende Problem lautet

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & W(\underline{p}) \Rightarrow \text{MIN} \\ \text{R: } & g_i(\underline{p}) - \bar{g}_i \leq 0 \quad i = 1 \dots n \quad (3) \\ & \underline{p}_j \leq p_j \leq \bar{p}_j \quad j = 1 \dots m. \end{aligned}$$

Die Gleichheitsrestriktionen können durch zwei Ungleichungsrestriktionen beschrieben werden.

Die Lösung des OP (3) erfolgt durch eine schrittweise Lösung der linearisierten Formulierung unter Anwendung des Dualitätssatzes von Falk [26]. Nach jedem Optimierungsschritt erfolgt eine vollständige Berechnung der Konstruktion und ein Test, ob ein Optimum vorliegt oder nicht. Die Lösung des Problems (3) liegt vor, wenn gilt

$$\begin{aligned} |(W^{(s)} - W^{(s-1)}) / W^{(s-1)}| &< \epsilon_w \\ \text{und} & \\ |(\bar{g}_i - g_i^{(s)}) / \bar{g}_i| &< \epsilon_g. \end{aligned} \quad (4)$$

Bild 1 zeigt den Gesamt Ablauf. Das erreichte Ergebnis ist nicht notwendig ein globales Minimum, da das OP (3)

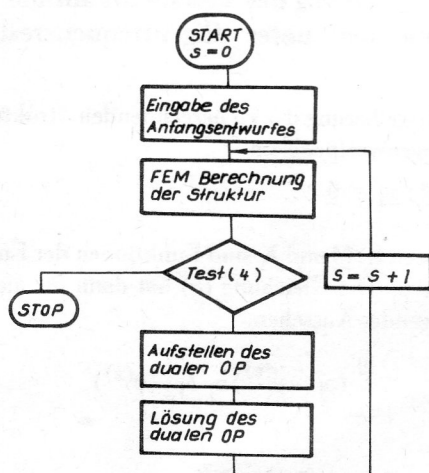


Bild 1
Ablauf des Optimierungsverfahrens

bei Konstruktionsoptimierungsproblemen nicht notwendig konvex ist. Es wird also nur ein lokales Minimum errechnet.

2.1. Die Anwendung einer linearisierten Taylorreihe auf die Berechnung der Zielfunktion und der Restriktionen

Im allgemeinen Fall sind Zielfunktion und Restriktionen nichtlineare Funktionen. Die Zielfunktion ist linearaffin, wenn der Parametervektor \underline{p} nur Querschnittsparameter enthält. Soll auch die Gestalt einer Struktur optimiert werden, so ist $W(\underline{p})$ nichtlinear. Da der Aufwand zur Berechnung der nichtlinearen Restriktionen sehr hoch ist, werden die Restriktionen und Zielfunktion linearisiert.

$$f(\underline{p}) = f(\underline{p}^{(s)}) + \sum_{j=1}^m (p_j - p_j^{(s)}) a_j f_j(\underline{p}^{(s)}) \quad (5)$$

mit

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{f. } e_j > 0 \\ \frac{p_j^{(s)}}{p_j} & \text{f. } e_j < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Der Index j bedeutet $\partial/\partial p_j$.

Für das zu lösende OP Gl. (3) wird e_j so gewählt, daß die Näherungen für W und g_i die größtmöglichen Werte annehmen. Aus der Differenz der Reihenentwicklungen nach p_j (f_p) und seinen Reziproken (f_R)

$$f_p - f_R = f_j \frac{(\bar{p}_j - p_j^{(s)})^2}{p_j} \quad (8)$$

ergibt sich für positive p_j ein e_j zu

$$e_j = f_j. \quad (9)$$

Das Optimierungsproblem (3) lautet mit der gemischten Taylorreihe Gl. (5)

$$\begin{aligned} \text{ZF: } & \sum_{w_j > 0} W_j p_j - \sum_{w_j < 0} W_j \frac{p_j^{(s)2}}{p_j} \Rightarrow \text{MIN} \\ \text{R: } & \sum_{g_{i,j} > 0} g_{i,j} p_j - \sum_{g_{i,j} < 0} g_{i,j} \frac{p_j^{(s)2}}{p_j} - \bar{g}_i \leq 0 \quad (10) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \tilde{g}_i = \bar{g}_i - g_i^{(s)} + \sum_j |g_{i,j}| p_j^{(s)}$$

Die Zielfunktion und die Restriktion (10) sind konvex. Das OP ist ein separables. Diese Linearisierung ist nur in einer gewissen Umgebung von $\underline{p}^{(s)}$ ausreichend genau. Deshalb müssen für die Anwendung Variationsgrenzen für die Parameter p_j eingeführt werden.

$$\underline{p}_j \leq \hat{p}_j \leq p_j \leq \bar{p}_j \leq \bar{p}_j \quad (11)$$

$$\hat{p}_j = \max(\underline{p}_j, (1 - v_{uj}) p_j^{(s)})$$

$$\bar{p}_j = \min(\bar{p}_j, (1 + v_{oj}) p_j^{(s)})$$

Die Parameter v_{uj} und v_{oj} werden gewählt. Es gibt zwei Möglichkeiten. Einmal können diese Größen konstant gehalten werden, für jeden Parameter extra und in Abhängigkeit von der Nummer des Iterationsschrittes bestimmt. Z. B. in der hier verwendeten Form:

$$v_{uj} = v_{oj} = \frac{\varphi(\bar{p}_j - p_j^{(s)})}{s p_j^{(s)}} \quad (12)$$

s – Nummer des äußeren Iterationszyklus

φ – Konstante

Die Anwendung solcher Variationsschranken ist zu empfehlen bei stark nichtlinearen Restriktionen, wie bei der Änderung von Knotenkoordinaten oder Plattendicken.

2.2. Die Herleitung des Optimierungsverfahrens

Nach der für die Lösung klassischer Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen bekannten Lagrangeschen Multiplikatormethode werden Zielfunktion und Restriktionen zu einer zu minimierenden Funktion zusammengefaßt

$$L(\underline{p}, \underline{\mu}) = W(\underline{p}) + \sum_{i=1}^n \mu_i g_i(\underline{p}) \Rightarrow \text{MIN} \quad (13)$$

Für das Optimum dieser Funktion sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt [27]. Zu jedem OP existiert ein duales OP. Mit Hilfe der Dualitätssätze läßt sich von der Lösung des primalen auf die des dualen OP schließen. Nach dem Satz von Wolfe ist das zu Gl. (3) duale OP

$$\text{ZF: } L(\underline{p}, \underline{\mu}) \Rightarrow \text{MAX} \quad (14 \text{ a})$$

$$\text{R: } L_j(\underline{p}, \underline{\mu}) = 0 \quad (14 \text{ b})$$

$$\mu_i \geq 0. \quad (14 \text{ c})$$

Es existiert ein $\underline{\mu}^0 \geq \underline{0}$, so daß $(\underline{p}^0, \underline{\mu}^0)$ Lösung von Gl. (14) ist, und es gilt

$$W(\underline{p}^0) = \text{MIN } W(\underline{p}) = \text{MAX } L(\underline{p}, \underline{\mu}) = L(\underline{p}^0, \underline{\mu}^0). \quad (15)$$

Ist $L(\underline{p}, \underline{\mu})$ konvex und damit $L(\underline{\mu})$ konkav, und kann $L(\underline{\mu})$ geschrieben werden als

$$L(\underline{\mu}) = W(\underline{p}(\underline{\mu})) + \sum_{i=1}^n \mu_i g_i(\underline{p}(\underline{\mu})). \quad (16)$$

So lautet nach dem Dualitätssatz von Falk das zu (3) duale Problem

$$\text{ZF: } L(\underline{\mu}) \Rightarrow \text{MAX} \quad (17)$$

$$\text{R: } \mu_i \geq 0.$$

Dieser Satz ist umkehrbar, d. h. die Lösung von (17) ist auch Lösung von (3). Die genannten Voraussetzungen erfüllen separable Optimierungsprobleme, wie das mit Gl. (10) formulierte.

Für dieses Problem läßt sich Gl. (14b) nach p_j auflösen und in (14a) einsetzen. Damit ergibt $\underline{\mu}$ eindeutig p_j . Über einige Umformungen ergibt sich das zu (10) duale Problem.

$$L(\underline{\mu}) = \sum_{W_{j>0}} W_{j>0} p_j - \sum_{W_{j<0}} W_{j<0} \frac{p_j^{(s)2}}{p_j} + \sum_i \mu_i \left[\sum_{g_{i,j>0}} g_{i,j} p_j - \sum_{g_{i,j<0}} g_{i,j} \frac{p_j^{(s)2}}{p_j} - \tilde{g}_i \right] \Rightarrow \text{MAX} \quad (18)$$

mit

$$\mu_i \geq 0$$

Diese Funktion hat ein Maximum, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist.

$$0 = L_{,\mu_i} = g_i = \sum_{g_{i,j>0}} g_{i,j} p_j - \sum_{g_{i,j<0}} g_{i,j} \frac{p_j^{(s)2}}{p_j} - \tilde{g}_i \quad (19)$$

p_j ist eine Funktion der Lagrangemultiplikatoren.

$p_j(\underline{\mu})$ wird unter Beachtung der Variationsschranken Gl. (11), (12) aus der Bedingung $L_{,j} = 0$ berechnet. Weil die Funktion $L(\underline{\mu})$ konkav ist, ist jede für Gl. (19) gewonnene Lösung ein Maximum der Gl. (18) und nach dem Dualitätssatz Minimum der Funktion $L(\underline{p}, \underline{\mu})$ (13). Da (13) konvex ist, ist es sogar ein globales Minimum.

Das hier angewandte Verfahren entspricht im wesentlichen dem Algorithmus aus [28].

Die Lösung von Gl. (19) erfolgt mit einer Newton-Raphson-Iteration

$$\underline{g}^{(z+1)} = \underline{g}^{(z)} + \underline{H}_{\underline{\mu}}^{(z)} \Delta \underline{\mu}^{(z)} \Rightarrow \underline{0} \quad (20)$$

$\underline{H}_{\underline{\mu}}$ ist dabei die Hessesche Matrix von L bezüglich $\underline{\mu}$. Die Iterationsvorschrift für $\underline{\mu}$ ergibt sich dann zu

$$\underline{\mu}^{(z+1)} = \underline{\mu}^{(z)} + \alpha \Delta \underline{\mu}^{(z)} \quad (21)$$

$$\underline{H}_{\underline{\mu}}^{(z)} \Delta \underline{\mu}^{(z)} = -\underline{g}^{(z)}.$$

α ist ein Parameter zur Schrittweitensteuerung. Der Abbruch der Iteration erfolgt entweder nach einer Norm für $\Delta \underline{\mu}^{(z)}$ oder nach der Änderung von $L^{(z)}(\underline{\mu})$. Auf Probleme bei der Realisierung von (20) im Zusammenhang mit der Lösung von (19) wird in [1] näher eingegangen.

3. Die Anwendung des Verfahrens auf die Masseminimierung unter Eigenfrequenzrestriktionen

Die FE-Modellierung der zu berechnenden Struktur führt auf das Eigenwertproblem

$$(\underline{K} - \lambda_i \underline{M}) \underline{x}_i = \underline{0}. \quad (22)$$

Die Matrizen \underline{K} , \underline{M} und λ_i sind Funktionen der Entwurfsparameter p_j . Die Gleichung (5) hat dann für die Eigenwerte folgendes Aussehen.

$$\lambda_i = \lambda_i^{(s)} + \sum_{j=1}^m (p_j - p_j^{(s)}) a_j \lambda_{i,j}(\underline{p}^{(s)}) \quad (23)$$

mit

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda_{i,j} > 0 \\ \frac{p_j^{(s)}}{p_j} & \text{für } \lambda_{i,j} < 0 \end{cases}$$

Die Ableitung der Eigenwerte $\lambda_{i,j}$ wird zu

$$\lambda_{i,j} = \underline{x}^T (\underline{K}_j - \lambda_i \underline{M}_j) \underline{x}_i \quad (24)$$

berechnet. Parameter können sein: Querschnittsgrößen (Querschnittsflächen, Flächenträgheitsmomente oder Plattendicken) und Knotenkoordinaten der FE-Diskretisierung.

Nähere Erläuterungen zur Berechnung von $\lambda_{i,j}$ sind in [29], [1], [30] und [31] zu finden.

Um das OP Gl. (2) in die Form (3) zu bringen, muß die Forderung $\lambda \geq \lambda$ in $-\lambda \leq -\lambda$ umgeformt werden.

Das Problem lautet dann

$$\text{ZF: } W(p) \Rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{aligned} \text{R: } & \lambda_i \leq \lambda_i \\ & -\lambda_i \leq -\lambda_i \\ & p_j \leq p_j \leq p_j \end{aligned} \quad (25)$$

Für die zweite Eigenwertrestriktion ist dann auch Gl. (23) umzukehren.

Sind mehrere Parameter voneinander abhängig, so sind diese durch einen Parameter zu ersetzen und für den Ersatzparameter p_e ist eine Ableitung $\lambda_{i,e}$ zu ermitteln.

$$p_e = f(p_k)$$

$$\lambda_{i,e} = \sum_k \lambda_{i,k} \frac{\partial p_k}{\partial p_e} \quad (26)$$

Werden die Ableitungen nach Knotenkoordinaten gebildet, so ist $\partial p_k / \partial p_e = 1$, und es sind für einen Systemknoten die Ableitungen nach den Elementknoten einfach zu summieren. Das gleiche ist der Fall, wenn mehrere Elemente gleiche Querschnitte aufweisen sollen, da ja die Parameter verschiedener Elemente als unabhängig voneinander betrachtet werden. Für Balkenelemente ist die Abhängigkeit von Trägheitsmomenten und Querschnittsfläche zu berücksichtigen. Meistens wird hier angenommen, daß die Flächenträgheitsmomente I proportional dem Quadrat der Querschnittsfläche A des Balkens sind.

$$\kappa = A^2 / I = A / i^2 \quad (27)$$

i = Trägheitsradius

κ ist der Profilkennwert [32, S. 222], der für ähnliche Querschnitte annähernd konstant ist. (27) entspricht der Annahme, daß sich der Querschnitt in alle Richtungen gleichmäßig verändert. Als Parameter für die Optimierung wird die Fläche A gewählt, da so die Zielfunktion $W(A)$ linear bleibt. Die Ableitung λ_{i,A_e} lautet, dann

$$\lambda_{i,A_e} = \lambda_{i,A} + \frac{2}{A} (\lambda_{i,I_x} I_x + \lambda_{i,I_y} I_y + \lambda_{i,I_z} I_z). \quad (28)$$

Die Ableitungen der Systemmasse nach den Parametern werden parallel zur Berechnung der Matrizen \underline{K}_j und \underline{M}_j ermittelt. Bei Abhängigkeit mehrerer Parameter sind die Ableitungen W_j analog Gl. (26) zusammenzufassen.

4. Die Realisierung des Algorithmus

Der beschriebene Algorithmus wurde in Verbindung mit dem im VEB Kombinat Schiffbau eingesetzten FE-Programm PASSAD realisiert. Dabei wurde auf der für die

Untersuchungen von Reanalyseverfahren erstellten Version PASSAD REA aufgebaut. Dies konnte mit einigen Änderungen in diesem Programm und durch Abschließen eines Optimierungsblocks geschehen. Die entstandene Version heißt PASSAD OPT. Um den Zyklus zu realisieren, wurde zusätzlich eine untergliederte Datei angelegt, die die notwendigen Elementdaten aufnimmt. Diese Datei wird im ersten Optimierungsschritt erstellt und nach jeder Optimierung aktualisiert. Das gleiche geschieht mit den Vektoren der Knotenkoordinaten.

In die Optimierung können Stab-(Typ 1), Balken-(Typ 2), Scheiben-(Typ 3) und Platten-/Scheibenelemente (Typ 6) einbezogen werden. Als Entwurfsparameter sind die Querschnittsgrößen dieser Elemente möglich. Außerdem lassen sich die Knotenkoordinaten des FE-Modells als Parameter festlegen. Bei der Programmierung wurden alle möglichen rechenzeitsparenden Maßnahmen ergriffen, wie die Restartmöglichkeit bei der Eigenlösung mit Vektorunterraumiteration und eine Neuberechnung der Elementmatrizen nur für wirklich geänderte Elemente.

Die Eigenschwingungsberechnung erfolgt in PASSAD mit konzentrierten Massenmatrizen.

5. Numerische Beispiele

Anhand zweier Beispiele soll die Funktion des Optimierungsalgorithmus erläutert werden.

5.1. Stabsystem mit dem Freiheitsgrad 2 (Beispiel 1)

Bild 2 zeigt dieses einfache System von zwei gelenkig verbundenen Stäben, dessen Masse in Abhängigkeit von den Stabquerschnitten unter Frequenzrestriktionen minimiert werden soll. Dieses Beispiel dient zum Ausprobieren des Algorithmus, deshalb sind die Größen A , I , E , ρ ohne Dimension gegeben. Die Abhängigkeit der Masse W und der Eigenwerte von den Querschnittsflächen der Stäbe ist in einem A_1 - A_2 -Koordinatensystem dargestellt (Bild 4). Die Zielfunktion W ist als lineare Funktion der Entwurfsparameter A_j zu erkennen. Die Eigenwerte sind abhängig vom Verhältnis $\beta = A_1/A_2$. Diese Abhängigkeit ist nichtlinear.

$$W = \rho A_2 l (1 + 2\sqrt{2}\beta) \quad (29)$$

$$\lambda^2 - \frac{4\sqrt{2} + 5\beta}{2(\sqrt{2} + 2\beta)} \lambda + \frac{\beta}{2(\sqrt{2} + 2\beta)} = 0 \quad (30)$$

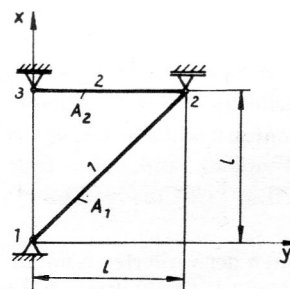


Bild 2
Beispiel 1: Modell

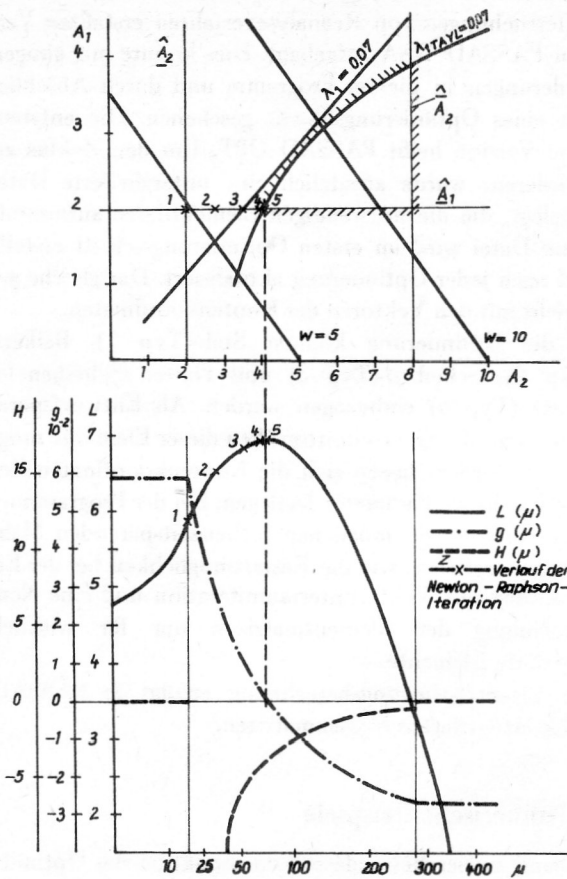


Bild 3
Beispiel 1: Darstellung des dualen Optimierungsproblems

Die Elementmassen sind gleichmäßig auf die Knoten verteilt, so daß die Massenmatrix kondensiert ist. Im Bild 3 ist im oberen Diagramm das linearisierte Optimierungsproblem Gl. (10) für den Iterationsschritt $s = 0$ dargestellt. Im unteren Diagramm ist das dazu duale Problem abgebildet, wobei die μ -Achse mit der A_2 -Achse des oberen Diagramms korrespondiert. Die obere Grenze für λ_1 war in diesem Beispiel 0,07, wobei die Startwerte für $A_1 = A_2 = 4,0$ waren. Die Gesamtlösung des Optimierungsproblems ergibt sich aus der schrittweisen Lösung weiterer dualer Probleme. Der Gesamtverlauf der Problemlösung ist in Bild 4 im oberen Diagramm (\square) dargestellt. Es wurden insgesamt $s = 5$ Schritte benötigt. Die weiteren Verläufe im Bild 4 zeigen die Berechnung des Problems von anderen Startpunkten aus, und das untere Diagramm weist für die o. g. Startwerte den Verlauf von $\lambda_1(s)$ und $W(s)$ aus.

5.2. Stabtragwerk (Beispiel 2)

Das folgende Beispiel wurde von Sadek [25] vorgestellt. Die Masse der Konstruktion (Bild 5) ist durch Variation der Systemknoten und Elementquerschnitte minimiert worden. Für die Grundkreisfrequenz sind dabei feste Werte vorgegeben: a) $\omega_1 = 70 \text{ s}^{-1}$; b) $\omega_1 = 90 \text{ s}^{-1}$; c) $\omega_1 = 100 \text{ s}^{-1}$.

Tabelle 2 enthält die Koordinaten der variierten Knoten. Die Knoten 7–12 in y -Richtung, 13 (0,0) und 14 (35 m, 0) sind fest. Die Grenzen für die Variation der Knoten sind in x -Richtung ± 1 m und in y -Richtung $\pm 0,5$ m.

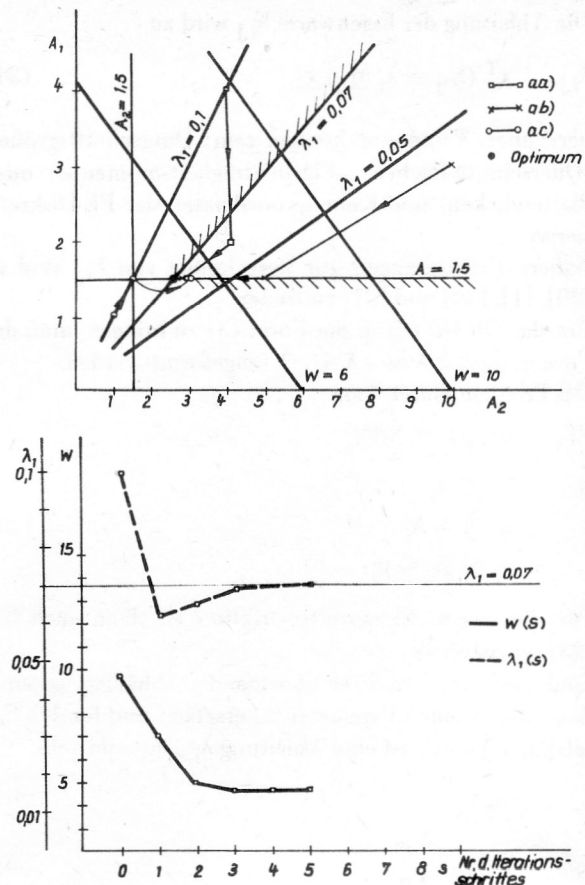


Bild 4
Beispiel 1: Iterationsverläufe

Die Stabquerschnitte betragen für die Elemente 1–14 $25 \pm 5 \text{ cm}^2$ und die Elemente 15–30 $17,5 \pm 5 \text{ cm}^2$. Material ist Stahl ($E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho = 7850 \text{ kg m}^{-3}$). Die Abbruchschranken für die Iteration sind nach Gl. (4) $\epsilon_w = \epsilon_g = 1 \%$.

Für die Berechnung der Optima wurden maximal 5 FE-Rechnungen benötigt. Bei den Beispielen a) und b) haben die Querschnitte der Endkonstruktion die Werte der unteren Schranke. Für Beispiel c) haben die Elemente 1, 3–8 Querschnitte größer als 20 cm^2 , alle anderen Querschnitte haben den Wert der unteren Schranke.

Tabelle 1
Querschnitte der Elemente 1, 3–8 für $\omega_1 = 100 \text{ s}^{-1}$ in cm^2

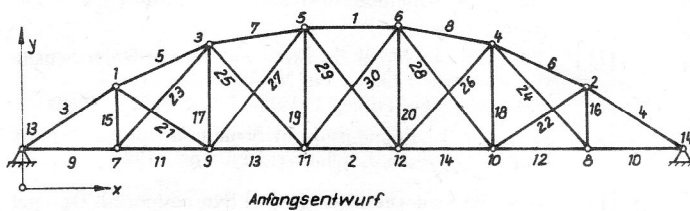
1	3; 4	5; 6	7; 8
24.3	26.6	23.0	28.4

Die Ergebnisse für die Knotenkoordinaten sind in Tabelle 2 zusammengefaßt und in Bild 5 dargestellt.

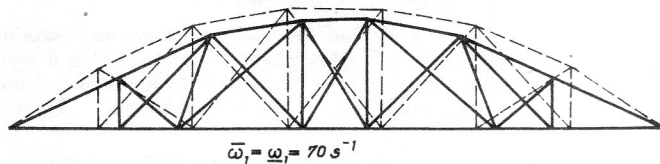
Die Iterationsverläufe Bild 6 zeigen deutlich, daß schon im 1. Optimierungsschritt eine wesentliche Verbesserung des Entwurfes erreicht wird, während die letzten Schritte nur noch kleinere Korrekturen bringen. Die Variationsschranken für die Parameter wurden für die Querschnitte $v_u = 0,5$; $v_o = 1$ und für die Knotenkoordinaten nach Gl. (12) mit $\varphi = 1$ berechnet. Die geringfügigen Abweichungen der Ergebnisse von der Quelle [25] sind da-

Tabelle 2
Beispiel 2: Anfangsentwurf und
Ergebnisse

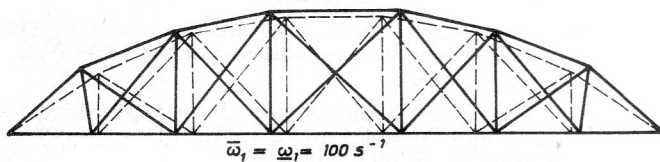
	Anfangs- entwurf	Entwurf		
		$\omega_1 = 70 \text{ s}^{-1}$	$\omega_2 = 90 \text{ s}^{-1}$	$\omega_3 = 100 \text{ s}^{-1}$
$\omega_1 [\text{s}^{-1}]$	81.94	70.01	89.59	99.94
W [kg]	2856.9	2067.8	2168.3	2363.9
Knotenkoord. [m]				
x - 1	5	6	4.417	4
- 2	30	29	30.583	31
- 3	10	11	9	9
- 4	25	24	26	26
- 5	15	15.770	14	14
- 6	20	19.167	21	21
- 7	5	6	4.917	4.698
- 8	30	29	30.080	30.412
- 9	10	9	9	9
- 10	25	26	26	26
- 11	15	15.833	14	14
- 12	20	19.252	21	21
y - 1	3.25	2.75	3.54	3.54
- 2	3.25	2.75	3.54	3.54
- 3	5.5	5.0	5.21	5.54
- 4	5.5	5.0	5.21	5.54
- 5	6.25	5.75	6.18	6.58
- 6	6.25	5.75	6.18	6.58
Anz. d. FE-Lösungen		4	5	5
in [25]	81.94	70.07	89.62	99.90
$\omega_1 [\text{s}^{-1}]$				
W [kg]	2856.9	2150.9	2191.9	2339.7



$W = 2856,9 \text{ kg}$
 $\omega_1 = 81,94 \text{ s}^{-1}$



$W = 2067,8 \text{ kg}$
 $\omega_1 = 70,01 \text{ s}^{-1}$



$W = 2363,9 \text{ kg}$
 $\omega_1 = 99,94 \text{ s}^{-1}$

Bild 5
Beispiel 2: Anfangsentwurf und
Endentwurf
Gestrichelt – Gestalt
des Anfangsentwurfes

mit zu erklären, daß dort ein anderes Optimierungsverfahren verwendet wird, so daß durch den unterschiedlichen Verlauf der Iteration bei der Abbruchschranke $\epsilon = 1 \%$ keine völlige Übereinstimmung erwartet werden kann.

6. Schlußfolgerungen aus den Beispielrechnungen

Die vorgestellten Beispiele verdeutlichen die Funktion des auf der Grundlage der gemischten Taylorreihenap-

proximation hergeleiteten dualen Optimierungsverfahren. Es ist anwendbar auf die Minimierung der Masse von Konstruktionen unter Eigenfrequenzrestriktionen. Das Programm PASSAD OPT ist für Querschnitts- und Gestaltoptimierungsaufgaben geeignet.

Folgende Aussagen lassen sich anhand der Ergebnisse treffen:

- Die Konvergenz der Lösung gegen ein lokales Minimum ist gewährleistet.

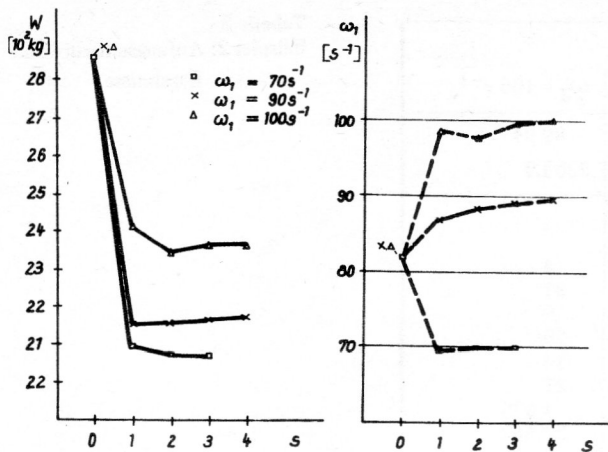


Bild 6
Beispiel 2: Iterationsverläufe

b) Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt wesentlich von den Variations-schranken bei der Lösung des linearisierten OP ab. Für Balken- bzw. Plattenstrukturen wird bei Querschnittsoptimierung die Gl. (12) empfohlen.

Für Gestaltoptimierungen ist grundsätzlich (12) vorzuziehen, wobei die Wahl von φ und p_j entscheidenden Einfluß auf die Konvergenzgeschwindigkeit hat. Für Querschnittsoptimierungen von Stab- und Scheibenstrukturen ist $v_{oj} = v_{uj} = \text{const.}$ ausreichend.

c) Im ersten Optimierungsschritt wird im allgemeinen die wesentliche Entwurfsverbesserung erzielt. Die Masse unterscheidet sich dann nur unwesentlich von der Masse der optimalen Struktur. In den weiteren Schritten wird der Entwurf dann so verändert, daß die Restriktionen erfüllt werden. Sind die Variationsgrenzen im 1. Schritt wesentlich enger gezogen als die Parameterrestriktionen, so sind für diese starke Entwurfsänderung wenige Schritte mehr notwendig.

d) Die Frequenzen der erreichten optimalen Strukturen sind grundsätzlich kleiner oder gleich der festgelegten Restriktionen (gilt für aktive Restriktionen). Dies ist bei der Festlegung der Restriktionen und von ϵ_g zu beachten.

e) Existiert eine optimale Konstruktion zu den gegebenen Restriktionen, so wird diese von verschiedenen Startpunkten der Iteration aus erreicht.

f) Der Hauptaufwand der Berechnung liegt bei der FE-Analyse der Konstruktion, und er ist durch die Begrenzung der Iterationszyklen zu regulieren. Einfluß auf den Aufwand haben somit auch die Abbruchbedingungen ϵ_w und ϵ_g .

Der beschriebene und realisierte Optimierungsalgorithmus ist allgemeingültig und auch auf andere Restriktionen anwendbar. Für eine größere Anzahl von Restriktionen und damit unbekanntes des dualen OP empfiehlt sich die Suche nach einem effektiveren Lösungsalgorithmus als die Newton-Raphson-Iteration.

LITERATUR

- [1] Anwendung von Reanalyse- und Optimierungsverfahren bei Schwingungsproblemen schiffbaulicher Strukturen. F/E-Bericht Nr. ST 14-87-02 / Sektion Schiffstechnik, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock; U. Schramm. - Rostock, 1987.
- [2] Vanderplaats, G. N.: Structural Optimization-Past, Present, Future. AIAA-J. - New York, 20 (1982) 7 - S. 992 - 1000.
- [3] Arora, J. S.: Survey of Structural Reanalysis Techniques. Journal of the Structural Division, ASCE. - New York, 102 (1976) ST4 - S. 783 - 802.
- [4] Schmidt, L. A.; Farshi, B.: Some Approximation Concepts for Structural Synthesis. AIAA-J. - New York, 12 (1974) 5 - S. 692 - 699.
- [5] Topping, B. H. V.: Shape Optimization of Skeletal Structures: A Review. Journal of Structural Engineering, ASCE. - 109 (1983) 8 - S. 1933 - 1951.
- [6] Haftka, R. T.; Grandhi, R. V.: Structural Shape Optimization - A Survey. Comp. Meth. in Appl. Mech. in Appl. Mech. and Engr. - 57 (1986) - S. 91 - 106.
- [7] The OASIS Structural Optimization System: Report Nr. 85 - 3/The Royal Institute of Technology, Dept. of Aeronautical Structures and Materials; B. J. D. Esping. - Stockholm, 1985.
- [8] Hou, J. W.; Benedict, R. L.: The Elastic-Plastic Torsion Problem: A Direct Boundary Problem. Journal of Structural Mechanics. - 12 (1984) 4 - S. 447 - 463.
- [9] Khot, N. S.; Kamat, M. P.: Minimum Weight Design of Truss Structures with Geometric Nonlinear Behavior. AIAA-J. - New York, 23 (1985) 1 - S. 139 - 144.
- [10] Mroz, Z.; Kamat, M. P.; Plaut, R. H.: Sensitivity Analysis and Optimal Design of Nonlinear Beams and Plates. Journal of Structural Mechanics. - 13 (1985) 3/4, S. 245 - 266.
- [11] Haftka, R. T.; Mroz, Z.: First- and Second-Order Sensitivity Analysis of Linear and Nonlinear Structures. AIAA-J. - New York, 24 (1986) 7 - S. 1187 - 1192.
- [12] Morris, A. J.: Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach. Chichester: New York, 1982.
- [13] Proceedings of the International Symposium on Optimal Structural Design. University of Arizona; Hrsg.: E. Atrek, R. H. Gallagher. - Tucson, 1981.
- [14] Huges, O.: A Method for Nonlinear Optimum Design of Large Structures and Application to Naval Ship design. In: Proceedings of the International Symposium on Optimum Structural Design / University of Arizona. - Tucson, 1981. - S. 10/5.
- [15] Hughes, O. F.; Mistree, F.; Zanic, V.: A Practical Method for the Rational Design of Ship Structures. Journal of Ship Research. - 24 (1980) 2 - S. 101 - 113.
- [16] Proceedings of the International Ship Structures Congress. Computation Means/Report of Committee IV.1. - Genoa, 1985.
- [17] Taylor, J. E.: Minimum Mass Bar for Axial Vibration at Specified Natural Frequency. AIAA-J. - New York, 5 (1967) - S. 1911 - 1913.
- [18] Taylor, J. E.: Optimal Design of a Vibrating Bar with Specific Minimum Cross-section. AIAA-J. - New York, 6 (1968) - S. 1379 - 1381.
- [19] Turner, M. J.: Design of Minimum Mass Structures with Specified Natural Frequencies. AIAA-J. - New York, 5 (1967) - S. 406 - 412.
- [20] Zargamee, M. S.: Optimum Frequency of Structures. AIAA-J. - New York, 6 (1968) 4 - S. 719 - 750.
- [21] Pierson, B. L.: A Survey of Optimal Structural Design under Dynamic Constraints. Int. J. for Num. Meth. in Engr. - Chichester: New York, 4 (1972) - S. 491 - 499.
- [22] Schlüter, H.-J.: Optimierung der Eigenschwingungen verrippter Platten. VEB Kombinat Schiffbau, Stammtrieb, Direktorat E; Rostock, 1986. (unveröffentlicht)

- [23] Schlüter, H.-J.: Optimierung von Eigenschwingungen verrippter Platten. *Wiss. Zeitschr. d. WPU Rostock; Naturwiss. Reihe.* – Rostock, 34 (1985) 5 – S. 83 – 87.
- [24] Sadek, E. A.: *Dynamic Optimization of Framed Structures. Computers and Structures.* – Oxford; New York, 21 (1985) 6.
- [25] Sadek, E. A.: *Dynamic Optimization of Framed Structures with Variable Layout. Int. J. for Num. Meth. in Engr.* – Chichester; New York, 23 (1986) 7 – S. 1273 – 1294.
- [26] Fleury, C.: *Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming. Ing. J. for Num. Meth. in Engr.* – Chichester; New York, 14 (1979) – S. 1761 – 1783.
- [27] Elster, K.-H.: *Nichtlineare Optimierung.* – Leipzig, 1978.
- [28] Braibant, V.; Fleury, C.: *An Approximation Concepts Approach to Shape Optimal Design. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engr.* – 53 (1985) – S. 119 – 148.
- [29] Fox, R.-L.; Kapoor, M. P.: *Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvektors. AIAA.-J.* – New York, 6 (1968) 12 – S. 2426 – 2429.
- [30] Schramm, U.; Schlottmann, G.: *Zur Anwendung von Reanalyseverfahren bei Kontinuumschwingungen. In: 6. Tagung Festkörpermechanik; Dynamik und Getriebe-technik/HFR Festkörpermechanik, Dresden, Teil B.* – Leipzig, 1985 – S. XXXVII/1 – 12.
- [31] Schramm, U.: *Zur Anwendung von Reanalyseverfahren bei der Eigenschwingungsberechnung mit der Methode der finiten Elemente. Schiffbau Forschung (im Druck).*
- [32] *Taschenbuch Maschinenbau, Bd. 1/II Grundlagen.* – Berlin, 1980.