

Formulierung eines Wandgesetzes für den Bereich der Rückströmung turbulenter Grenzschichten

W. Szablewski

1. Einleitung

Von fundamentaler Bedeutung in der Theorie turbulenter Grenzschichten sind die Wandgesetze.

Sie beschreiben die Geschwindigkeitsverteilung in der *Unterschicht der Trägheitsschicht*, charakterisiert durch

$$1) y \ll \delta$$

(x, y-Koordinaten längs und normal zur Wand, δ -Grenzschichtdicke)

$$2) \tau_{\text{turb}} \approx \tau_o + \frac{d\bar{p}}{dx} y \quad (1)$$

(τ_{turb} – turbulente Schubspannung

τ_o – Wandschubspannung

$d\bar{p}/dx$ – Druckgradient);

d. h. die Trägheitsglieder der Impulsgleichung sind hier wegen der Haftbedingung als vernachlässigbar anzusehen.

Voraussetzung für die genannten Bedingungen ist relativ dünne Zähigkeitsschicht der Grenzschicht.

Für Grenzschichten $\tau_o > 0$ reduziert sich bei anliegender Strömung im Bereich mit Druckabfall und mäßigem Druckanstieg Gl. (1) auf $\tau \approx \tau_o$; und es resultiert das universelle logarithmische Wandgesetz [1]

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + C \quad (v_* = \sqrt{\tau_o/\rho}) \quad (2)$$

mit den Konstanten

$$\kappa = 0.41; C = 5,10.$$

Im ablösungsnahen Bereich $\tau_o (> 0) \approx 0$ lautet das Wandgesetz [2]

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\sqrt{1 + F \frac{v_* y}{\nu}} - 1 \right) + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{4}{F} \frac{\sqrt{1 + F \frac{v_* y}{\nu}} - 1}{\sqrt{1 + F \frac{v_* y}{\nu}} + 1} + C_* \quad (3)$$

($F = \frac{\nu}{v_*} \frac{d\bar{p}/dx}{\rho v_*^2}$ Formparameter, ν kinematische Zähigkeit).

wobei hier die Integrationskonstante C_* für die jeweiligen F durch Integration über der Zähigkeitsschicht zu ermitteln ist. Nach der Ablösung der Grenzschicht ($\tau_o = 0$) ist ein *wandnaher Bereich mit Rückströmung* (backflow) und der Wandschubspannung $\tau_o < 0$ zu konstatieren.

Es stellt sich das Problem der Formulierung eines Wandgesetzes für diesen Bereich.

2. Formulierung eines Wandgesetzes für den Bereich mit Rückströmung

2.1. Formel nach Simpson [3]

R. L. Simpson hat neuerdings aus seinen Messungen [4] und denen anderer für die Geschwindigkeitsprofile in der *mittleren Schicht* des Bereiches mit Rückströmung, die an die Zähigkeitsschicht schließt, in normierter Form eine Formulierung gefunden, die dort mit den Messungen übereinstimmt (vgl. Bild 1).

Ausgehend von der Feststellung, daß im genannten Bereich die normierten Profile

$$U/|U_N| \text{ über } y/N$$

(U_N -Maximum der mittleren Rückströmung, N – Abstand desselben von der Wand)

einen semilogarithmischen Verlauf zeigen, erhält Simpson aus

$$U/U_\tau = f(yU_\tau/\nu) \quad U_\tau = \sqrt{|\tau_o|/\rho}$$

sehr nahe der Wand und

$$U/|U_N| = g(y/N) \quad (4)$$

weiter weg (Bild 1) mittels einer Argumentation nach Millikan für den Übergangsbereich

$$\frac{U^2}{\nu} f' = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{|U_N|}{N} g'$$

Da die rechte Seite der Gleichung von ν unabhängig ist, gilt das auch für die linke Seite; es folgt

$$f' \sim \frac{1}{yU_\tau/\nu}$$

und damit

$$g' \sim \frac{1}{y/N}$$

Man erhält

$$\frac{U}{|U_N|} = -A \ln \left| \frac{y}{N} \right| - B \quad (5)$$

Die Daten nach Bild 1 ergeben $A = 0,3$ und $B = 1,3$.

Um zu erreichen, daß $U/|U_N| = -1$ bei $y/N = 1$, wird dann die Funktion y/N zur Gleichung (4) addiert.

Simpson formuliert dann

$$\frac{U}{|U_N|} = A \left(\frac{y}{N} - \ln \left| \frac{y}{N} \right| - 1 \right) - 1 \quad \text{mit } B = 1 + A; \quad (6)$$

und diese Funktion produziert

$$\frac{U}{|U_N|} = -1 \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{bei } y/N = 1.$$

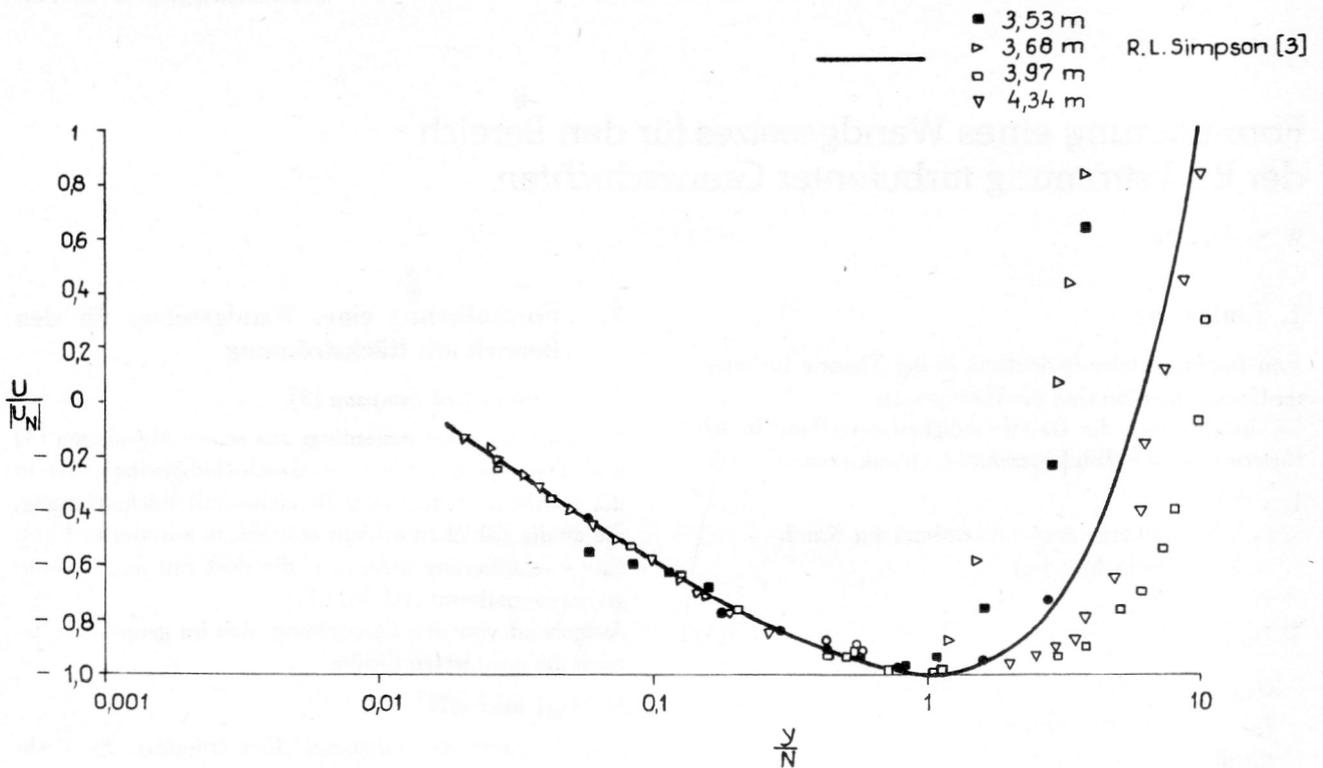


Bild 1
Normalisierte Profile der Rückströmung

Die Formel beschreibt die Geschwindigkeitsprofile in der mittleren Schicht $0.02 < y/N \leq 1$.

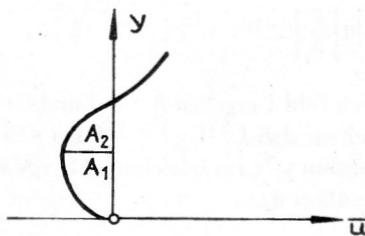
Zu bemerken ist noch, daß die experimentellen Werte von N zu 15% unsicher sind.

2.2. Herleitung des Wandgesetzes für den Bereich mit Rückströmung

Im folgenden geben wir eine einfache Herleitung des Wandgesetzes. Wir unterscheiden im Bereich der Rückströmung zwischen der mittleren Schicht A_1 mit $\partial \bar{u} / \partial y < 0$ und der äußeren Schicht A_2 mit $\partial \bar{u} / \partial y > 0$.

Mittlere Schicht

A_1 : Die Strömung in der mittleren Schicht A_1 hat offenbar den Charakter einer Grenzschicht mit Druckabfall.



In der Gleichung (1) der Trägheitsunterschicht

$$\tau_{\text{turb}} = \tau_0 + \frac{d\bar{p}}{dx} y \quad \left(\tau_0 / \rho - \nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_0 < 0 \right)$$

mit

$$\tau_{\text{turb}} / \rho = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

und der mittleren Länge $l = \kappa y$

setzen wir $\bar{u} = -U$, $x = -X$ und erhalten dann die Gleichung

$$\kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 = \left| \frac{\tau_0}{\rho} \right| + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dX} y$$

$$\frac{d\bar{p}}{dX} = - \frac{d\bar{p}}{dx} < 0 \quad (8)$$

bzw.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y} \sqrt{\left| \frac{\tau_0}{\rho} \right| - \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} y} \quad (9)$$

In dimensionsloser Form mit $V_* = \sqrt{\left| \frac{\tau_0}{\rho} \right|}$ und dem Formparameter

$$F = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}/dx}{V_*^2} \frac{\nu}{V_*} > 0$$

lautet die Gleichung

$$\frac{\partial \bar{u} / V_*}{\partial V_* y / \nu} = - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{V_* y / \nu} \sqrt{1 - F V_* y / \nu} \quad (10)$$

Führen wir $\xi = F V_* y / \nu$ ein, so folgt

$$\frac{\partial \bar{u}_*}{\partial \xi} = - \frac{1}{\kappa} \frac{\sqrt{1 - \xi}}{\xi} \quad (\bar{u}_* = \bar{u} / V_* \cdot y_* = V_* y / \nu); \quad (11)$$

und $|\bar{u}_*|_{\text{max}}$ liegt bei $\xi = 1$.

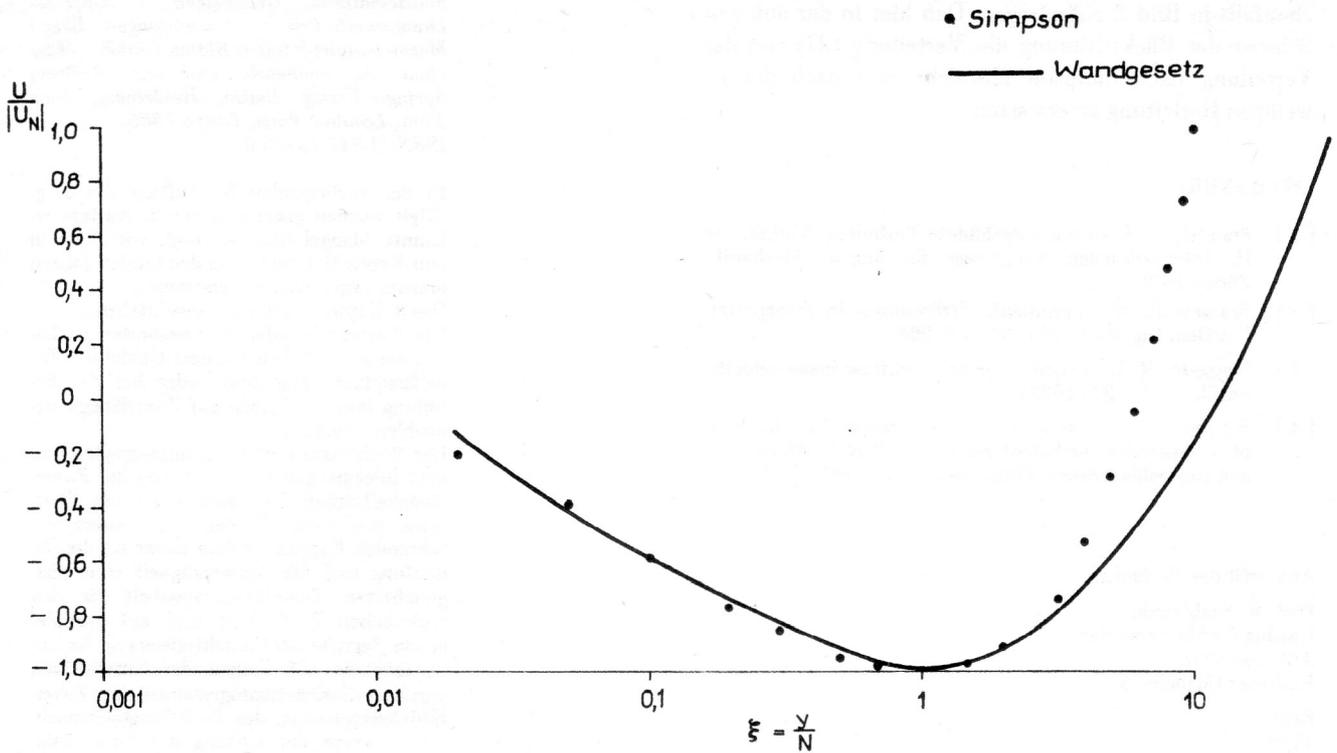


Bild 2
Wandgesetz für den Bereich der Rückströmung

Wir erhalten die Geschwindigkeitsverteilung

$$\bar{u}_* = -\frac{1}{\kappa} (2\sqrt{1-\xi} + \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}} \right|) + C \quad (0 < \xi \leq 1) \quad (12)$$

mit der Integrationskonstante

$$C = -|\bar{u}|_{\max} V_* < 0 \quad (-|\bar{u}|_{\max} = U_N) \quad (13)$$

Die Bestimmung von C erfordert die Integration der Impulsgleichung über der Zähigkeitsschicht, wobei eine Hypothese über den Verlauf der mittleren Länge l in dieser Schicht zu treffen wäre.

Dividieren wir die Gleichung (12) durch

$$|C| = \frac{|\bar{u}|_{\max}}{V_*}$$

so erhalten wir

$$\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|_{\max}} = -1 - \frac{1}{|C|} \frac{1}{\kappa} (2\sqrt{1-\xi} + \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}} \right|) \quad (0 < \xi \leq 1) \quad (14)$$

Setzen wir hier bei $\kappa = 0.41$ die Integrationskonstante $|C| = |\bar{u}|_{\max}/V_* = 10$ bzw. $\kappa |C| = 4.1$ so ergibt das die in Bild 2 wiedergegebene Verteilung, die in der Schicht $0.02 < \xi \leq 1$ nur unwesentlich von der Verteilung nach Simpson bzw. der Messung abweicht.

Dabei ist

$$\xi = \frac{(1/\rho) d\bar{p}/dx}{V_*^2} y = \frac{y}{N} \quad (15)$$

denn $\xi = 1$ ergibt

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{1}{y |\bar{u}|_{\max}} = \frac{1}{N}$$

wie aus (9) folgt.

Äußere Schicht A₂:

Mit $\partial \bar{u} / \partial y > 0$ in der äußeren Schicht der Rückströmung erhalten wir hier nach der Gleichung (1) der Trägheitsunterschicht

$$\kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = - \left| \frac{\tau_0}{\rho} \right| + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} y \quad (16)$$

bzw.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y} \sqrt{- \left| \frac{\tau_0}{\rho} \right| + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} y} \quad (17)$$

Bei Einführung der dimensionslosen Variablen \bar{u}_* , y_* nach (11) lautet die Gleichung

$$\frac{\partial \bar{u}_*}{\partial y_*} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y_*} \sqrt{F y_* - 1} \quad (18)$$

schließlich mit ξ nach (10) folgt

$$\frac{\partial \bar{u}_*}{\partial \xi} = \frac{1}{\kappa} \frac{\sqrt{\xi-1}}{\xi} \quad (19)$$

es resultiert

$$\bar{u}_* = \frac{2}{\kappa} (\sqrt{\xi-1} - \arctg \sqrt{\xi-1}) + \bar{u}_*(1) \quad (1 \leq \xi) \quad (20)$$

mit $\bar{u}_*(1) = C < 0$.

Bei Division durch |C| dann erhalten wir

$$\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|(1)} = -1 + \frac{1}{|C|} \frac{2}{\kappa} (\sqrt{\xi-1} - \arctg \sqrt{\xi-1}) \quad (21)$$

Diese Funktion mit $|C| = 10$ bzw. $\kappa |C| = 4,1$ haben wir ebenfalls in Bild 2 aufgetragen. Daß hier in der äußeren Schicht der Rückströmung die Verteilung (21) von der Verteilung nach Simpson abweicht, war nach der jeweiligen Herleitung zu erwarten.

LITERATUR:

- [1] Prandtl, L.: Über die ausgebildete Turbulenz. Verhdl. des II. Internationalen Kongresses für angew. Mechanik, Zürich 1926.
- [2] Szablewski, W.: Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen. Ing. Arch. 22 (1954), S. 268.
- [3] Simpson, R. L. A model for the backflow mean velocity profile. AIAA 21 (1983).
- [4] Simpson, R. L.; Chew, Y.-T., Shivaprasad: The structure of a separating turbulent boundary. Part 1: Mean flow and Reynolds stresses. Fluid Mech. 113 (1981), S. 23.