

# Kriechen von Konstruktionselementen aus Materialien mit von der Belastung abhängigen Charakteristiken

Aleksandr Aleksejevič Zoločevskij

## 0. Einleitung

Die traditionellen Kriechtheorien [1] bis [3] berücksichtigen den Einfluß der Belastungsart nicht. Ungeachtet dessen zeugen experimentelle Daten von einer wesentlichen Abhängigkeit des Kriechens metallischer und nichtmetallischer Materialien von der Belastungsart. Zur Beschreibung des Einflusses dieses Faktors in der Gleichung für das isotrope Kriechen ist es notwendig, neben der 2. Invarianten auch ungerade Invarianten des Spannungszustandes einzuführen. Einige Autoren [4] bis [7] bevorzugen die erste Invariante des Spannungstensors, andere [1], [7] bis [9] die dritte Invariante des Spannungsdeviators. Eine dritte Gruppe von Autoren [10], [11] verwendet beide Invarianten. Offensichtlich gibt es keine übereinstimmenden Ansichten zu diesem Problem. Es ist unklar, welche der ungeraden Invarianten zur Beschreibung des Kriechens bei den unterschiedlichen Spannungszuständen herangezogen werden muß.

In der vorliegenden Arbeit werden, ausgehend von den allgemeinsten tensoriellen Zusammenhängen zwischen den kinematischen und den Kraftgrößen, Kriechgleichungen für isotrope Materialien auf der Basis der 3 Invarianten des Spannungstensors vorgeschlagen und begründet. Dabei werden die Grenzen für die Anwendung spezieller physikalischer Ansätze, die weniger Invarianten enthalten, aufgestellt. Daneben werden eine Aufgabenformulierung und eine Lösungsmethode für dreidimensionale Randwertaufgaben über das Kriechen von Konstruktionselementen dargestellt, wobei diese aus Materialien mit Deformationscharakteristiken bestehen, welche von der Belastungsart abhängen.

## 1. Experimentelle Ergebnisse über den Einfluß der Belastungsart auf das Kriechen

Gewöhnlich erscheint der Einfluß der Belastungsart als unterschiedliches Materialverhalten bei Zug und Druck (was bei entsprechenden Versuchen beobachtet werden kann) oder als Abhängigkeit des Kriechens vom hydrostatischen Druck.

Zunächst soll ein Vergleich von Kriechkurven gebracht werden. Diese wurden aus einachsigen Experimenten für Zug und Druck gewonnen. Dabei wird die Kriechdeformationsgeschwindigkeit für gleiche Zeitmomente verglichen, wobei diese bei gleichen Spannungen und Temperaturen gemessen wurden. Die Ergebnisse stammen auch vom gleichen Autor. Hierbei sei angemerkt, daß die Feststellung in [12], nach der das Kriechen von Berylliumoxid bei Zug 60mal stärker verlaufen soll als bei Druck, nicht korrekt ist, da diese Feststellung auf der Grundlage von Ergebnissen verschiedener Autoren getroffen wurde.

In [13] sind Kriechkurven bei verschiedenen Temperaturen für die Nickellegierung ЭИ 437 Б, für die Aluminiumlegierung D16T, für wärmebehandeltes Eisen, für Stahl 2X13 angeführt. Dabei wurde nachgewiesen, daß bei den Kriechkurven für Druck sowie denen für Zug alle drei Abschnitte (gedämpftes, stationäres, beschleunigtes Kriechen) vorhanden sind. Im ersten Abschnitt fallen die Kriechkurven zusammen, auf den übrigen Abschnitten ist die Deformationsgeschwindigkeit bei Zug wesentlich größer als bei Druck. Letzteres kann mit dem unterschiedlichen Charakter der Zunahme von Schädigungen beim Kriechen im Material für Zug und Druck erklärt werden.

**Tabelle 1**  
Materialien mit verschiedenen Eigenschaften bei Zug und Druck

Material	Temperatur K	Werte der Konstanten					Quelle
		n	m	r	K <sub>+</sub>	K <sub>-</sub>	
					10 <sup>-7n-r</sup>	Pa <sup>-n</sup> h <sup>-m</sup>	
AK 4 - IT	473	8	1	15	5,0	2,5	[8]
OT - 4	748	4	1	10	13,5	7,5	[7]
BT - 9	673	5,9	0,27	14	1,45	0,51	[7]
Polystyrol	313	1,5	0,38	3	2,37	0,44	[14]
Polymethylmethakrylat	253	3,3	0,78	6	9,41	6,31	[14]
Polyethilen	77	3,2	0,33	6	2,04	1,00	[14]
Polystyrol	333	1,1	0,53	2	1,09	0,29	[14]

Für verschiedene leichte Legierungen und Polymere wurde experimentell nachgewiesen [1], [5] bis [9], [14], daß die Deformationsgeschwindigkeit in den ersten beiden Abschnitten des Kriechens bei Zug 2- bis 4mal und teilweise eine Zehnerpotenz größer ist als die entsprechenden Werte bei Druck.

Für den Zusammenhang

$$|\dot{\epsilon}| = K_{\pm} t^m |\sigma|^n, \quad (1.1)$$

der die Deformation  $\epsilon$ , die Zeit  $t$  und die Spannung  $\sigma$  verbindet, sind in Tabelle 1 für einige Materialien Werte der Konstanten bei Zug (+) und Druck (-) angeführt.

In der Arbeit [15], in der Untersuchungen zu warmfesten Chrom-Nickel-Legierungen angeführt sind, ist aufgezeigt, daß auf den ersten Abschnitten die Kriechkurven steiler bei Zug als bei Druck verlaufen. Ein analoges Bild ergibt sich [10], [15] für Aluminiumlegierungen, für reines Nickel, für Magnesiumlegierungen. Dabei ist für eine Aluminium-Magnesium-Legierung die Deformationsgeschwindigkeit bei Druck um einige Größenordnungen größer als bei Zug [16]. Auf den Abschnitten für stationäres Kriechen können sich die Kurven überschneiden, danach ist die Deformationsgeschwindigkeit bei Zug größer als bei Druck. Vergleichende Untersuchungen werden oft bei gleichen bezogenen Spannungen durchgeführt. Der Ausgangszustand des Materials (Vorhandensein von Restspannungen, Verlängerung von Körnern in Deformationsrichtung usw.) wirkt sich auf das Widerstandsvermögen bei Druckbelastungen aus. Dies gilt auch für die erste Phase, in der die Änderung des Durchmessers der Probe gering ist und die wahren Spannungen bei Zug und Druck fast gleich sind. Bei stärkeren Deformationen führt die Änderung des Durchmessers zum Abfallen der wahren Spannungen bei Druck und zur Zunahme bei Zug. Daher werden zu einander sehr nahe und dann auch höher liegende Kurven bei Zug im Vergleich zu denen bei Druck beobachtet.

Die Kriechgeschwindigkeit bei spröden Materialien bei Zug übersteigt wesentlich die Geschwindigkeit bei Druck. Beispielsweise ist für das großporige, extrem leichte, feuerfeste Material ШТЛ - 0,6 [17] auf dem Abschnitt des stationären Kriechens bei einer Temperatur von 1203 K die Deformation bei Zug um das 2,5fache stärker als bei Druck, jedoch bei 1443 K mehr als das 20fache. Die erhaltenen Resultate werden mit dem unterschiedlichen Öffnen der Poren bzw. der Mikrorisse bei diesen Belastungsbedingungen erklärt. Die Deformation infolge der „Rißöffnung“ bei Zug kann wesentlich sein. Bei Druck kommt sie kaum vor bzw. ist schnell ausgeschöpft.

Die Analyse der experimentellen Daten zeigt den komplizierten Charakter des verschiedenen Widerstandsvermögens von Materialien bei Zug und Druck unter Kriechbedingungen. Die physikalischen Erklärungen für diesen Effekt sind nicht immer überzeugend. Trotzdem sind diese Effekte wie phänomenologische Effekte zu berücksichtigen.

Der Einfluß der Belastungsart erscheint auch als Abhängigkeit des Kriechens vom hydrostatischen Druck, 178

was in [18], [19] experimentell für Metalle (Aluminium, Zink, Wismut) und Polymere (Fluoroplaste, Polyethylen, Zelluloid) nachgewiesen wurde. Auch kommt es zu axialer Deformation unter reiner Torsion. Letzteres wurde experimentell für leichte Legierungen nachgewiesen [9], wenn diese unterschiedliches Zug/Druckverhalten zeigten.

Einige Bemerkungen noch zur Inkompressibilität (Unveränderlichkeit des Volumens) von Materialien beim Kriechen. Diese Forderung, die in den traditionellen Theorien [1] - [3] verwendet wurde, führt bei isotropem Material für einachsigen Zug und Druck auf einen Querkontraktionskoeffizienten für das Kriechen von  $\nu = 0,5$ . Eine experimentelle Überprüfung dieses Faktens, welche auch die für das Kriechen natürliche Streuung der Daten berücksichtigt, stößt auf die Grenzen der modernen Nachweismöglichkeiten. Auch bei dieser Einschränkung ist oft  $\nu \neq 0,5$ . So wurde für einige Stähle  $\nu = 0,35$  [20] ermittelt. Auch sind experimentelle Daten [21] über Änderungen des spezifischen Gewichtes von Kupfer beim Kriechen bekannt. Bei einachsigen Zug- und Druckversuchen mit Titanlegierungen wurde eine Auflockerung beim Kriechen festgestellt [22]. Das Kriechen von Aluminium-Magnesium-Legierungen bei einer Temperatur von 473 K wird von Volumenänderungen begleitet, welche durch Strukturänderungen infolge Alterung hervorgerufen werden [13]. Folglich ist die Ausdehnung der Inkompressibilitätshypothesen auf das Kriechen von Materialien mit ungleichem Zug- und Druckverhalten nicht gerechtfertigt und unbegründet, da es in einer Reihe von Fällen den experimentellen Tatsachen widerspricht.

## 2. Physikalische Zusammenhänge

In diesem Abschnitt sollen konstitutive Gleichungen für isotropes Kriechen formuliert werden, wobei Ausgangspunkt die Ergebnisse von Analysen der Abhängigkeiten vom Einfluß der Belastungsart sind.

Im kartesischen Koordinatensystem werden koaxiale symmetrische Tensoren  $\underline{\underline{P}}$  (Geschwindigkeiten der Kriechdeformationen) und  $\underline{\underline{\Sigma}}$  (Spannungsgeschwindigkeiten) eingeführt. Die allgemeinste Form des Zusammenhanges zwischen den Komponenten  $P_{kl}$  und  $\Sigma_{kl}$  der Tensoren  $\underline{\underline{P}}$  und  $\underline{\underline{\Sigma}}$  hat dann folgendes Aussehen [6] ( $k, l = 1, 2, 3$ )

$$P_{kl} = \frac{1}{3} I_P \delta_{kl} + S \left( \frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{kl}} - \tan \omega \frac{\partial \xi}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (2.1)$$

Dabei bedeuten  $\delta_{kl}$  - Kronecker-Symbol,  $I_P = P_{nn}$ ,  $I_\sigma = \sigma_{nn}$  - erste Invarianten der Tensoren  $\underline{\underline{P}}$ ,  $\underline{\underline{\Sigma}}$ ,  $P_{kl}^0 = P_{kl} - 1/3 I_P \delta_{kl}$ ,  $\sigma_{kl}^0 = \sigma_{kl} - 1/3 I_\sigma \delta_{kl}$  - die Komponenten der entsprechenden Deviatoren,  $P_i = \sqrt{\frac{3}{2} P_{kl}^0 P_{kl}^0}$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{kl}^0 \sigma_{kl}^0}$  - die Intensitäten der Geschwindigkeiten der Kriechdeformationen und der Spannungen,  $S = \sigma_{kl} P_{kl}^0 = \sigma_i P_i \cos \omega$  - spezifische Leistung der Gestaltänderungsdeformation,  $\omega = \xi - \psi$  - Ähnlichkeitsphase für die Deviatoren.

$$\xi = -\frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{9}{2} \frac{\sigma_{ln}^o \sigma_{nk}^o \sigma_{kl}^o}{\sigma_i^3} \right),$$

$$\psi = -\frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{4}{3} \frac{P_{ln}^o P_{nk}^o P_{kl}^o}{\sigma_i^3} \right)$$

Winkel der Form der Tensoren  $\underline{\Sigma}$ ,  $\underline{P}$ . Der Einfluß der Belastungsgeschichte auf das Kriechen bleibt unberücksichtigt.

Zur Konkretisierung der konstitutiven Beziehungen (2.1) sind die Funktionen  $I_p = I_p(I_\sigma, \sigma_i, \xi)$ ,  $S = S(I_\sigma, \sigma_i, \xi)$ ,  $\omega = \omega(I_\sigma, \sigma_i, \xi)$  zu ergänzen, wobei diese von den Argumenten  $I_\sigma, \sigma_i, \xi$  abhängen. Die Auswahl dieser Funktionen ist nicht eindeutig und führt zu dieser oder jener Variante physikalischer Gleichungen (vgl. [1] bis [11]).

Folgende Darstellungen werden für die Invarianten angenommen:

$$I_p = P_o R, S = \frac{2}{3} P_o \sigma_i^2 \pi, \tan \omega = \rho/\pi \quad (2.2)$$

mit

$$R = \frac{(3A+C)J_1}{\sigma_o} + 3\alpha B + \gamma \frac{(3D + \frac{2}{3}K)J_1^2 + (K+E)J_2}{\sigma_1^2}$$

$$\pi = \frac{C}{\sigma_o} + \frac{2}{3} \frac{\gamma(K+E)J_1}{\sigma_1^2} - \frac{\gamma}{3} \frac{E}{\sigma_1^2} \sigma_i \sin 3\xi,$$

$$\rho = \frac{\gamma}{3} \frac{E}{\sigma_1^2} \sigma_i \cos 3\xi, \quad (2.3)$$

$$J_1 = I_\sigma,$$

$$J_2 = \frac{2}{3} \sigma_i^2 + \frac{1}{3} I_\sigma^2,$$

$$J_3 = \frac{1}{9} I_\sigma^3 + \frac{2}{3} I_\sigma \sigma_i^2 - \frac{2}{9} \sigma_i^3 \sin 3\xi,$$

$$P_o \sigma_e = P_{ij} \sigma_{ij} = W,$$

$$\sigma_e = \alpha \sigma + \sigma_o + \gamma \sigma_1,$$

$$\sigma = B J_1, \sigma_o = (A J_1^2 + C J_2)^{1/2},$$

$$\sigma_1 = (D J_1^3 + K J_1 J_2 + E J_3)^{1/3}$$

Dabei sind  $\alpha, \gamma$ -Koeffizienten (Zahlenwerte),  $A, B, C, D, K, E$  – Materialkonstanten,  $W$  – die spezifische Leistung der dissipierten Energie,  $J_1 = \sigma_{nn}, J_2 = \sigma_{kl} \sigma_{kl}, J_3 = \sigma_{nk} \sigma_{kj} \sigma_{jn}$  die Invarianten des Spannungstensors.

Damit lassen sich nach einigen Umformungen die Gln. (2.1) in folgender Form angeben

$$P_{kl} = P_o \left[ \frac{A J_1 \delta_{kl} + C \sigma_{kl}}{\sigma_o} + \alpha B \delta_{kl} + \frac{D J_1^2 \delta_{kl} + E \sigma_{kn} \sigma_{nl} + \frac{K}{3} (J_2 \delta_{kl} + 2 J_1 \sigma_{kl})}{\sigma_1^2} \right] \quad (2.4)$$

bzw.

$$P_{kl} = P_o \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{kl}}$$

Folglich führen die Annahmen (2.2) und (2.3) zu einer Potentialformulierung für die betrachteten Tensoren. Dies ist für die Kriechtheorie bedeutsam [1], da damit die Möglichkeit des Erhalts widerspruchsfreier Resultate gegeben ist.

Weiterhin wird mit  $\sigma_e$  die äquivalente Spannung und  $P_o$  die äquivalente Geschwindigkeit der Kriechdeformation bezeichnet. Die Funktionen stellen die Äquivalenz des einachsigen mit dem zusammengesetzten Spannungszustand her, wobei z. B. folgender Zusammenhang gelten kann

$$P_o = v(\sigma_e) h(q) \quad (2.5)$$

Den Strukturparameter  $q$  kann man verschieden einführen. Wenn  $q = t$  ist ( $t$  – die Zeit), so ergibt sich die Fließtheorie, für die kinematische Gl.  $\frac{dq}{dt} = P_o$  die Verfestigungstheorie. Die Funktion  $h(q)$  kann eine Potenzfunktion ( $q^m$ ) oder Exponentialfunktion  $[\exp(q/d)]$  sein.

Die Funktion  $v(\sigma_e)$  kann ebenfalls Potenzfunktion ( $\sigma_e^n$ ), Exponentialfunktion  $[\exp(\sigma_e/b)]$ , aber auch hyperbolischer Sinus  $[\sinh(\sigma_e/a)]$  sein. Die konkrete Auswahl dieser Funktionen erfolgt bei der Approximation der Kriechkurven, die aus den Grundversuchen stammen. Die Koeffizienten in den vorgeschlagenen konstitutiven Gln. (2.4) und (2.5) lassen sich im Rahmen der Fließtheorie bei

$$v(\sigma_e) = \sigma_e^n, h(q) = m t^{m-1} \quad (2.6)$$

nach folgender Methodik ermitteln. Als Grundversuch für das Kriechen werden solche Versuche betrachtet, bei denen sich in den Proben ein einachsiger Spannungszustand herausbildet:

- Einachsiger Zug ( $\sigma_{11} \neq 0$ ), der in Angriffsrichtung der Belastung auf  $P_{11} = m K_+ \sigma_{11}^n t^{m-1}$  und in Querrichtung auf  $P_{22} = -m Q \sigma_{11}^n t^{m-1}$  führt.
- Einachsiger Druck ( $\sigma_{11} \neq 0$ ), bei dem sich in Angriffsrichtung der Belastung  $P_{11} = -m K_- |\sigma_{11}|^n t^{m-1}$  herausbildet.
- Torsion ( $\sigma_{12} \neq 0$ ), bei der die Geschwindigkeit der Winkeldeformation  $2P_{12} = m L \sigma_{12}^n t^{m-1}$  und die Geschwindigkeit der axialen Kriechdeformation  $P_{11} = m M \sigma_{12}^n t^{m-1}$  betragen.
- Belastung durch hydrostatischen Druck ( $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -|I_\sigma|/3$ ), wobei sich  $P_{11} = P_{22} = P_{33} = -m P |\sigma_{11}|^n t^{m-1}$  einstellt.

Für jeden der betrachteten Fälle sind die aus (2.4) bis (2.6) folgenden Gln. aufzubauen. Dabei erhält man die Parameter in den konstitutiven Gln.

$$C = L^{2r}/2, \quad \alpha B = M / (\sqrt{2C})^n, \quad A = X^2 - C,$$

$$6\gamma^3 D = [\sqrt{9A+3C} - 3\alpha B - (3P)^r] - 3(T-\alpha B)^3$$

$$+ 18 \left( \frac{A}{\sqrt{A+C}} + \alpha B + QK_+^{-nr} \right) (T-\alpha B)^2, \quad (2.8)$$

$$2\gamma^3 K = 3(T-\alpha B)^3 - [\sqrt{9A+3C} - 3\alpha B - (3P)^r]^3$$

$$- 24 \left( \frac{A}{\sqrt{A+C}} + \alpha B + QK_+^{-nr} \right) (T-\alpha B)^2,$$

$$\gamma^3 E = (T-\alpha B)^3 - \gamma^3 D - \gamma^3 K, \quad T = (K_+^r - K_-^r)/2,$$

$$X = (K_+^r + K_-^r)/2, \quad r = 1/(n+1).$$

Auf der Grundlage der erhaltenen Beziehungen (2.8) kann man die Grenzen der Anwendung spezieller konstitutiver Gln., die aus (2.4) folgen und eine geringere Anzahl von Invarianten enthalten, ermitteln. Wenn auf der Basis der Grundversuche folgende Gln. ermittelt wurden

$$T = ML^{-nr}, \quad \sqrt{9X^2 - 3L^{2r}} = 3T + (3P)^r, \quad (2.9)$$

so folgt aus (2.8) die Forderung  $\gamma = 0$ , und somit gilt

$$\sigma_e = \alpha\sigma + \sigma_o,$$

d. h. die äquivalente Spannung enthält in diesem Fall nur die erste und die zweite Invariante des Spannungszustandes. Dabei gehen die konstitutiven Gln. (2.4) in folgende lineare tensorwertige Gln. über

$$P_{kl} = P_o \left( \frac{AJ_1 \delta_{kl} + C\sigma_{kl}}{\sigma_o} + \alpha B \delta_{kl} \right), \quad (2.10)$$

die 3 Parameter enthalten. Folglich können die Gln. (2.9) als „Empfehlung“ zur Anwendung der physikalischen Gln. (2.10) aufgefaßt werden.

Für den Fall, daß aus den Grundversuchen

$$3T^3 - [\sqrt{9X^2 - 3L^{2r}} - (3P)^r] = TY = 0, \quad M = 0, \quad (2.11)$$

mit

$$Y = T \left( X - \frac{1}{2} L^{2r} X^{-1} + QK_+^{-nr} \right)$$

folgt, so erhält man nach Gl. (2.8)  $\alpha B = D = K = 0$  und die physikalischen Beziehungen (2.4) gehen in folgende Form über

$$P_{kl} = P_o \left( \frac{AJ_1 \delta_{kl} + C\sigma_{kl}}{\sigma_o} + \frac{E\sigma_{kn} \sigma_{nl}}{\sigma_1^2} \right). \quad (2.12)$$

Daraus kann man schlußfolgern, daß die Gln. (2.11) als Bedingung zur Anwendung nichtlinearer tensorwertiger konstitutiver Gln. in der Form (2.12) gilt. Dabei enthält (2.12) die zweite und die dritte Spannungsinvariante und 3 Parameter.

Wenn aus den Grundversuchen die Gln.

$$[\sqrt{9X^2 - 3L^{2r}} - (3P)^r]^3 = 3T^3 - 18TY,$$

$$M = 0, \quad T^3 = -3TY \quad (2.13)$$

mit

$$Y = T \left( X - \frac{1}{2} L^{2r} X^{-1} + QK_+^{-nr} \right)$$

folgen, so ergibt sich nach (2.8)  $\alpha B = D = E = 0$ . Unter Beachtung dieser Forderungen lassen sich die Konstitutivgl. (2.12) wie folgt formulieren

$$P_{kl} = P_o \left( \frac{AJ_1 \delta_{kl} + C\sigma_{kl}}{\sigma_o} + \gamma K \frac{J_2 \delta_{kl} + 2J_1 \sigma_{kl}}{3\sigma_1^2} \right). \quad (2.14)$$

Diese Konstitutivgl. enthalten die erste und die zweite Spannungsinvariante und 3 Parameter.

Die hier erhaltenen 3-Parameter-Gln. sind nicht die einzigen Gln., die aus (2.12) folgen können.

Beispielsweise, wenn aus den Grundversuchen

$$K_+ = K_-, \quad M = P = 0, \quad Q = \frac{1}{2} K_+, \quad L^{2r} = 3K_+^{2r} \quad (2.15)$$

folgt, so ergibt sich aus (2.8)  $\alpha B = \gamma = 0$ ,  $C = -3A$ . Dabei gehen die physikalischen Beziehungen (2.12) in die bekannten Beziehungen [1] über

$$P_{kl} = \frac{3}{2} \sqrt{A} \frac{P_o}{\sigma_i} \sigma_{kl}^o. \quad (2.16)$$

Diese gelten für Materialien, die von der Belastungsart unabhängig sind. Folglich läßt sich der Rückschluß ziehen, daß die traditionellen Gln. (2.16) nur bei Erfüllung aller Bedingungen (2.15) gültig sind. Die Nichterfüllung bereits einer der Gln. (2.15) führt dazu, daß die Gln. (2.16) nicht verwendet werden können.

### 3. Vergleich theoretischer und experimenteller Ergebnisse

Die Anwendung der Daten aller bisher betrachteten Grundversuche wird durch die technischen Möglichkeiten ihres Erhaltens erschwert. Daher sollen nachfolgend einige Möglichkeiten zur Anwendung der 3-Parameter-Gln. (2.10), (2.12) und (2.14) anstelle der allgemeinen Konstitutivgl. (2.4) analysiert werden.

Zunächst wird das Kriechen der Aluminium-Legierung AK 4-IT bei einer Temperatur von 473 K [8], [9] betrachtet. Das Verhalten dieses Materials bei Torsion kann mit Gl. (2.7) beschrieben werden:  $n = 8$ ,  $m = 1$ ,  $M = 11, 6 \cdot 10^{-7} n^{-13} p_a^{-n} h^{-1}$ . Bei Zug und Druck gelten die Gln. (1.1). Die entsprechenden Werte der Konstanten sind in Tabelle 1 angeführt. Auf der Grundlage dieser Versuchsdaten lassen sich aus den Gln. (2.8) die unbekannt Parameter in den physikalischen Gln. (2.10), (2.12) und (2.14) unter Verwendung der Darstellungen (2.5) und (2.6) ermitteln.

In Tabelle 2 sind für die aufgezeigten Spannungswerte die experimentell ermittelten Geschwindigkeiten  $P_{11}^*$  und  $2P_{12}^*$  angeführt (entsprechend axiale und Schubdeformation in dünnwandigen Rohren aus dem betrach-

**Tabelle 2**  
Kriechen einer Aluminiumlegierung

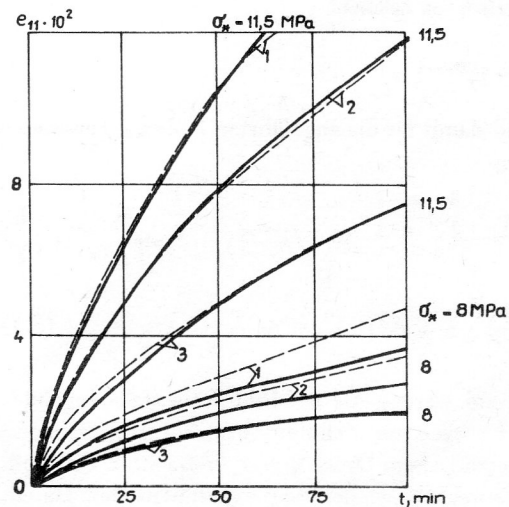
$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$	$P_{11}^*$	$2P_{12}^*$	$P_{11}$	$2P_{12}$	$P_{11}$	$2P_{12}$	$P_{11}$	$2P_{12}$
				(2.10)		(2.12)		(2.14)	
MPa		$10^5 \text{ h}^{-1}$							
147,8	35,4	1,64	1,32	2,11	1,77	2,14	1,83	2,17	1,83
107,5	62,0	1,20	2,40	1,29	2,56	1,35	2,75	1,34	2,72
58,3	81,3	0,694	3,37	0,857	3,92	0,925	4,38	0,870	4,29
-60,6	84,4	-0,722	3,64	-0,748	4,25	-0,694	3,79	-0,754	3,89
-115,8	66,9	-1,26	2,61	-1,39	3,09	-1,33	2,87	-1,37	2,95
-152,9	36,57	-1,74	1,42	-1,45	1,32	-1,43	1,27	-1,47	1,30

teten Material für das stationäre Kriechverhalten). Die Rohre sind axial durch eine Kraft (Zug oder Druck) und durch ein Torsionsmoment belastet. In der Tabelle sind ebenfalls die theoretischen Werte  $P_{11}$ ,  $2P_{12}$  der Deformationsgeschwindigkeiten, die nach den Gln. (2.10), (2.12) und (2.14) ermittelt wurden, angeführt. Unter Beachtung der wesentlichen Unterschiede im Zug/Druckverhalten der Aluminiumlegierung und der natürlichen Streuung der experimentellen Daten kann man ein befriedigendes Zusammenfallen von berechneten und experimentell ermittelten Daten feststellen. Dabei können keine Aussagen über die Vorteile bestimmter Gln. getroffen werden, da die theoretischen Werte dicht zueinander liegen. Somit kann beim zweidimensionalen Spannungszustand eine 3-Parameter-Gl. in der Form (2.10), (2.12) oder (2.14) unter Verwendung von Daten bestimmter Grundversuche über Zug, Druck und Torsion angewendet werden.

Welchen Einfluß hat hydrostatischer Druck auf das Kriechen? Bei einachsigem Zug ( $\sigma_{11} = \sigma_*$ ) kann man unter atmosphärischem Druck  $I_\sigma = \sigma_i = \sigma_*$ ,  $\sin 3\xi = -1$  setzen. Bei einachsigem Zug ( $\sigma_{11} = \sigma_*$ ) mit überlagertem hydrostatischem Druck  $p$  erhält man  $I_\sigma = \sigma_* - 3p$ ,  $\sigma_i = \sigma_*$ ,  $\sin 3\xi = -1$ . Folglich lassen sich die experimentell beobachteten Unterschiede der Kriechkurven [18], [19] im Rahmen von Konstitutivgleichungen, die nur die erste Invariante des Spannungstensors enthalten, beschreiben. Physikalische Gln., die ausschließlich die Spannungsintensität und den Winkel der Form des Spannungszustandes verwenden (vgl. [1], [7] bis [9]), können diese experimentellen Fakten nicht beschreiben. Außerdem widerspiegeln die Gln. (2.4) und die speziellen Ausdrücke (2.10), (2.12) und (2.14) zumindest qualitativ den Einfluß hydrostatischen Drucks auf das Kriechen.

Auf Bild 1 sind in Volllinien experimentell ermittelte Kriechdeformationen  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$  in Abhängigkeit von der Zeit für Zelluloid bei einer Temperatur von 338 K [19] bei einachsigem Druck ( $\sigma_{11} = \sigma_*$ ) mit überlagertem hydrostatischem Druck  $p$  dargestellt.  $p$  kann verschiedene Werte annehmen, wobei die Ziffern 1 -  $p = 0$  (fehlender Druck), 2 -  $p = \sigma_*/3$ , 3 -  $p = 2\sigma_*/3$  und  $\epsilon_{11} = \epsilon_{11} - \epsilon_{22}$  entsprechen.

Diese experimentellen Ergebnisse lassen sich befriedigend mit der in der Arbeit vorgeschlagenen Vorgehens-



**Bild 1**  
Kriechen von Zelluloid in Grundversuchen

weise beschreiben. Günstig sind dabei die linearen tensorwertigen Gln. (2.10), da sie besonders einfach sind. Die Kriechkurven für Zelluloid werden durch folgende Beziehungen beschrieben:

$$p = 0: \epsilon_{11} = K_1(t+1)^m \sigma_*^n, \quad p = \sigma_*/3: \epsilon_{11} = K_0(t+1)^m \sigma_*^n,$$

$$p = 2\sigma_*/3: \epsilon_{11} = K_2(t+1)^m \sigma_*^n.$$

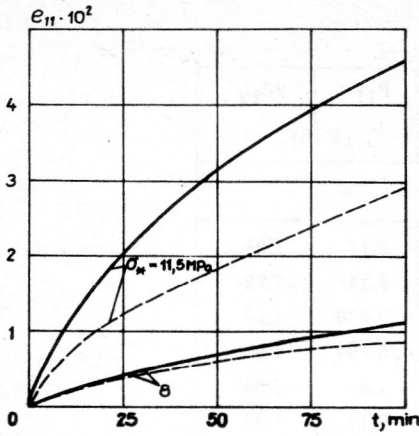
Als punktierte Linien sind die Ergebnisse der Rechnungen auf Bild 2 dargestellt. Dabei wurden folgende Konstanten verwendet:

$$n = 3,38, \quad m = 0,65, \quad K_1 = 2,034 \cdot 10^{-6-n} \text{ MPa}^{-n} \text{ min}^{-m}$$

$$K_0 = 1,530 \cdot 10^{-6-n} \text{ MPa}^{-n} \text{ min}^{-m},$$

$$K_2 = 9,697 \cdot 10^{-7-n} \text{ MPa}^{-n} \text{ min}^{-m}.$$

Ungeachtet dessen, daß die angeführten Approximationen gewisse Abweichungen bei kleinen Zeitwerten zulassen, wurde insgesamt eine befriedigende Übereinstimmung von theoretischen und experimentellen Ergebnissen erzielt. Weiterhin kann man in den physikalischen Beziehungen (2.10)



**Bild 2**  
Vergleich theoretischer Ergebnisse und experimenteller Daten für das Kriechen von Zelluloid

$$P_o = m(t+1)^{m-1} \sigma_e^n$$

setzen und damit für die angeführten Fälle die Parameter bestimmen

$$C = K_o \frac{2}{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}, 2(\sqrt{A+C})^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{K_1}{C}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{K_2}{C}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\alpha B = \left(\frac{K_1}{C}\right)^{\frac{1}{n}} (\sqrt{A+C})^{\frac{1}{n}} - \sqrt{A+C} \quad (3.1)$$

Abschließend werden die auf Bild 2 ebenfalls angeführten Kriechkurven für Zelluloid bei Zug mit überlagerter hydrostatischem Druck  $p = \sigma_*$  betrachtet. Die Volllinien entsprechen wieder den experimentellen Daten, die punktierten Linien – den Ergebnissen, die durch die Integration der Konstitutivgl. (2.10) unter Verwendung der Parameter (3.1) erhalten wurden. Auch hier ist eine gute Übereinstimmung zu verzeichnen, womit ein Nachweis der Richtigkeit der theoretischen Ergebnisse nach den vorgeschlagenen Beziehungen beim zusammengesetzten Spannungszustand erbracht wurde.

#### 4. Kriechen von Konstruktionselementen

Es wird das Kriechen eines zylindrischen Rotationskörpers bei nichtaxialsymmetrischer Belastung betrachtet. Die Gleichgewichtsbeziehungen lauten für das Zylinderkoordinatensystem

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial \Theta} + \sigma_r - \sigma_\Theta \right) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + F_r = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_\Theta}{\partial \Theta} + 2\tau_{r\Theta} \right) + \frac{\partial \tau_{z\Theta}}{\partial z} + F_\Theta = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{z\Theta}}{\partial \Theta} + \tau_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0.$$

Hierbei sind  $\sigma_k, \tau_{ij}$  – die Komponenten des Spannungstensors, ( $k, i, j = r, \Theta, z$ ),  $F_k$  – die Volumenkräfte und  $r, \Theta, z$  die Zylinderkoordinaten.

Die Cauchyschen Beziehungen lauten

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\Theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \Theta} + u \right), \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{r\Theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \Theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (4.2)$$

$$\gamma_{z\Theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \Theta}$$

mit  $\epsilon_k, \gamma_{ij}$  – als lineare und Winkeldeformationen sowie  $u, v, w$  als Verschiebungen.

Die physikalischen Beziehungen sind in diesem Fall

$$\epsilon_z = a_{11} \sigma_z + a_{12} \sigma_\Theta + a_{13} \sigma_r + P_z,$$

$$\epsilon_\Theta = a_{12} \sigma_z + a_{22} \sigma_\Theta + a_{23} \sigma_r + P_\Theta,$$

$$\epsilon_r = a_{13} \sigma_z + a_{23} \sigma_\Theta + a_{33} \sigma_r + P_r,$$

$$\gamma_{r\Theta} = a_{44} \tau_{r\Theta} + P_{r\Theta}, \quad (4.3)$$

$$\gamma_{rz} = a_{55} \tau_{rz} + P_{rz},$$

$$\gamma_{z\Theta} = a_{66} \tau_{z\Theta} + P_{z\Theta}.$$

Dabei setzen sich die Deformationen aus den elastischen Komponenten, die mit Hilfe des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes (Konstanten  $a_{mn}, m, n = 1, \dots, 6$ ) bestimmt werden, und den Kriechdeformationen  $P_k, P_{ij}$  ( $k, i, j = r, \Theta, z$ ) zusammen. Letztere werden aus den Gl. (2.4) ermittelt.

Die Beziehungen (4.1) – (4.3) führen auf folgendes zu lösende System von partiellen Differentialgl.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial \Theta} + \sigma_r - \sigma_\Theta \right) - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - F_r,$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{z\Theta}}{\partial \Theta} + \tau_{rz} \right) - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - F_z,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_\Theta}{\partial \Theta} + 2\tau_{r\Theta} \right) - \frac{\partial \tau_{z\Theta}}{\partial z} - F_\Theta, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \epsilon_r, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \gamma_{rz} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \gamma_{r\Theta} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \Theta} - v \right)$$

mit

$$\gamma_{rz} = a_{55} \tau_{rz} + P_{rz}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \epsilon_\Theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \Theta} + u \right),$$

$$\gamma_{z\Theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \Theta}, \quad \gamma_{r\Theta} = a_{44} \tau_{r\Theta} + P_{r\Theta},$$

$$\tau_{z\Theta} = (\gamma_{z\Theta} - P_{z\Theta}) / a_{66}, \quad \Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad (4.5)$$

$$\sigma_z = [(\epsilon_z - a_{13} \sigma_r - P_z) a_{22} - (\epsilon_\Theta - a_{23} \sigma_r - P_\Theta) a_{12}] / \Delta,$$

$$\sigma_\Theta = [(\epsilon_\Theta - a_{23} \sigma_r - P_\Theta) a_{11} - (\epsilon_z - a_{13} \sigma_r - P_z) a_{12}] / \Delta,$$

$$\epsilon_r = a_{13} \sigma_z + a_{23} \sigma_\Theta + a_{33} \sigma_r + P_r.$$

Es wird angenommen, daß an den Rändern des Körpers der Länge  $l$  bei  $z = 0, l$  folgende Randbedingungen

$$u = v = \sigma_z = 0 \quad (4.6)$$

erfüllt sind. An den Randflächen  $r = r_0, r_1$  können beliebige (zulässige) Randbedingungen gelten. Weiterhin lassen sich alle in (4.4) bis (4.6) eingehende Funktionen folgendermaßen darstellen:

$$X(r, \Theta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{X}_{kn}(r) \cos k\Theta + X'_{kn}(r) \sin k\Theta] \sin \lambda_n z,$$

$$Y(r, \Theta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{Y}_{kn}(r) \sin k\Theta + Y'_{kn}(r) \cos k\Theta] \sin \lambda_n z,$$

$$\varphi(r, \Theta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{\varphi}_{kn}(r) \cos k\Theta + \varphi'_{kn}(r) \sin k\Theta] \cos \lambda_n z,$$

$$\psi(r, \Theta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{\psi}_{kn}(r) \sin k\Theta + \psi'_{kn}(r) \cos k\Theta] \cos \lambda_n z$$

mit

$$X = \left\{ \sigma_r, \sigma_z, \sigma_{\Theta}, u, P_r, P_z, P_{\Theta}, \epsilon_r, \epsilon_{\Theta}, F_r \right\},$$

$$Y = \left\{ \tau_{r\Theta}, v, F_{\Theta}, x_{r\Theta}, P_{r\Theta} \right\}, \quad \psi = \left\{ \tau_{z\Theta}, \gamma_{z\Theta}, P_{z\Theta} \right\},$$

$$\varphi = \left\{ \tau_{rz}, w, F_z, \gamma_{rz}, P_{rz} \right\}, \quad \lambda_n = n\pi/l.$$

Analoge Beziehungen lassen sich für die Belastungen, die auf die Ränder  $r = r_0, r_1$  wirken, aufstellen. Für den Fall, bei dem die Randbedingungen (4.6) erfüllt sind, lassen sich die Variablen in (4.4) und (4.5) separieren, und man erhält ein System von gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgl.

$$(i = 1, \dots, 6)$$

$$\frac{dy_i}{dr} = f_i \quad (4.7)$$

mit den Randbedingungen für  $r = r_0, r_1$ .

Hierbei ist

$$y = \left\{ \hat{\sigma}_r, \hat{\tau}_{rz}, \hat{\tau}_{r\Theta}, \hat{u}, \hat{w}, \hat{v} \right\}$$

oder

$$y = \left\{ \sigma'_r, \tau'_{rz}, \tau'_{r\Theta}, u', w', v' \right\}.$$

Die formulierte Randwertaufgabe ist infolge ihrer Nichtlinearität gemeinsam mit der Cauchyschen Aufgabe zu lösen

$$\frac{dP_k}{dt} = f_k(\sigma_p, \tau_{mn}), \quad \frac{dP_{ij}}{dt} = F_{ij}(\sigma_p, \tau_{mn}) \quad (4.8)$$

$$(p, m, n, k, i, j = r, \Theta, z)$$

Die rechten Anteile  $f_k, F_{ij}$  werden entsprechend der gewählten Kriechtheorie bestimmt.

Die Integration der Cauchyschen Aufgabe (4.8) erfolgt mit Hilfe des Kutta-Merson-Verfahrens, wobei gleich-

Tabelle 3

Ergebnisse der Berechnung eines zylindrischen Körpers

Fall	$w \cdot 10^5, m$	
	vorliegende Arbeit	Arbeit [23]
1	0,525	0,527
2	0,498	0,500

zeitig eine fünffache Lösung in jedem Zeitschritt der entsprechenden Randwertaufgabe (4.7) mit Hilfe der Methode der diskreten Orthogonalisierung von S. K. Godunov und dem Beibehalten der entsprechenden Anzahl der Reihenglieder in den verwendeten Doppelreihen erfolgt. Somit wird für jeden fixierten Zeitschritt  $t$  der Spannungs-Deformationszustand im betrachteten räumlichen Körper ermittelt.

Der erarbeitete Algorithmus ist als Programm in PL/1 für das Betriebssystem OS auf einer ESER-Anlage realisiert.

Als Testbeispiel wurde die elastische Deformation eines Zylinders mit den geometrischen Maßen  $l = 0,12 m$ ,  $r_0 = 0,054 m$ ,  $r_1 = 0,066 m$  gerechnet. Die Belastung erfolgt an der Innenseite mit Druck.

$$q = q_0 \cos \Theta \sin \lambda_n z \quad (q_0 = 1 \text{ MPa}).$$

Der Zylinder bestand aus isotropem Material mit einem Elastizitätsmodul von  $E = 100 \text{ GPa}$  und einer Querkontraktionszahl  $\nu = 0,3$ . In den Rechnungen wurden 44 Punkte (davon 11 Punkte zur Orthogonalisierung) bei der Integration über die Zylinderdicke verwendet. In Tabelle 3 sind die Amplitudenwerte für die Durchbiegungen an der Innenseite (1) und Außenseite (2) angeführt. Es wurde gute Übereinstimmung mit den Daten aus [23] erzielt.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. — Москва: Наука, 1966. — 752 с.
- [ 2 ] Малинин, Н. Н.: Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. — Москва: Машиностроение, 1981. — 221 с.
- [ 3 ] Шестериков, С. А., Локошенко, А. М.: Ползучесть и длительная прочность металлов. — В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого тела. — Москва: ВИНТИ, 1980, т. 13. — с. 3 — 104.
- [ 4 ] Малинин, Н. Н.; Хажинский, Г. М.: Влияние шарового тензора напряжений на ползучесть металлов. — В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. — Москва: Машиностроение, 1975. — с. 280 — 285.
- [ 5 ] Соснин, О. В.: О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. — ПМТФ 1970, № 5, с. 136 — 139.
- [ 6 ] Цвелодуб, И. Ю.: О некоторых возможных путях построения теории установившейся ползучести сложных сред. — Изв. АН СССР. Мех. тв. тела 1981, № 2, с. 48 — 55.

- [ 7 ] Горев, Б. Г., Рубанов, В. В., Соснин, О. В.: О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. – ПМТФ 1979, № 4, с. 121 – 128.
- [ 8 ] Цвелодуб, И. Ю.: О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах. – Динамика сплошной среды. Сб. статей. Институт гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1976, вып. 25, с. 113 – 121.
- [ 9 ] Горев, Б. В., Рубанов, В. В., Соснин, О. В.: О ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. – В кн.: Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наукова думка, 1978, с. 223 – 232.
- [ 10 ] Лебедев, А. А.: О критериях эквивалентности в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии. – Проблемы прочности 1970, № 4, с. 45 – 48.
- [ 11 ] Бойков, В. Н., Лазаренко, Э. С.: Кратковременная ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению – сжатию. – Изв. вузов. Машиностроение 1976, № II, с. 8 – 14.
- [ 12 ] Vandervoort, R. R., Varnore, W. L.: Compressive creep of polycrystalline berillium oxide. – J. Amer. Ceram. Soc. 46(1963)4, p. 180 – 184.
- [ 13 ] Лепин, Г. Ф.: Ползучесть металлов и критерии жаропрочности. – Москва: Металлургия, 1976. – 344 с.
- [ 14 ] Борсенко, В. Н., Песчанская, Н. Н., Синани, А. Б., Степанов, В. А.: Ползучесть линейных неориентированных полимеров при растяжении, сжатии и кручении. – Механика полимеров, 1970, № 1, с. 24 – 28.
- [ 15 ] Sully, A. N.: Creep testing in compression for simple creep assessment. – Product Engineering 24(1953)4, p. 150 – 153.
- [ 16 ] Богоявленский, Д. С.: Ползучесть сплава АМГ при изгибе. – Научные труды Воронежского инженерно – строительного института 1965, сб. II, вып. 2, с. 62 – 74.
- [ 17 ] Перас, А. Я., Даукнис, В. И.: Прочность огнеупорной керамики и методы ее исследования. – Вильнюс: Моклас, 1977. – 183 с.
- [ 18 ] Лебедев, А. А., Ковальчук, Б. И., Гигиняк, Ф. Ф., Ломашевский, В. П.: Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. – Справочник. – Киев: Наукова думка, 1983. – 368 с.
- [ 19 ] Nishitani, T.: Mechanical behavior of nonlinear viscoelastic celluloid under superimposed hydrostatic pressure. – Trans. ASME. J. Pressure. Vessel Technol. 100 (1978)3, p. 271 – 276.
- [ 20 ] Кичаев, Е. К.: О поперечной деформации при ползучести. – Механика. – Сб. статей, Куйбышевский государственный университет. – Куйбышев: 1976, вып. 9 с. 13 – 15.
- [ 21 ] Розенберг, В. М.: Ползучесть металлов. – Москва: Металлургия, 1976. – 267 с.
- [ 22 ] Никитенко, А. Ф., Соснин, О. В., Торшенов, Н. Г., Шокало, И. К.: О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. – ПМТФ 1971, № 2, с. 118 – 122.
- [ 23 ] Григоренко, Я. М., Василенко, А. Т., Панкратова, Н. Д.: Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Киев: Вища школа, 1985. – 190 с.