

Die Ermittlung effektiver Eigenschaften für viskoelastische ebene Flächentragwerke

Holm Altenbach

0. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1] wurden, ausgehend von einer direkt formulierten Theorie für ebene Flächentragwerke (gekoppeltes Platten/Scheibenproblem) die konstitutiven Gleichungen für den Fall viskoelastischen Materialverhaltens abgeleitet. Diese konstitutiven Gleichungen haben ein breiteres Anwendungsgebiet als andere, aus der Literatur bekannte Gleichungen, da man mit ihnen sowohl über den Querschnitt homogene als auch inhomogene (beispielsweise mehrschichtige) Flächentragwerke analysieren kann. Hauptproblem bei der erfolgreichen Anwendung der vorgeschlagenen konstitutiven Gleichungen ist jedoch die Identifikation aller Materialfunktionen des zweidimensionalen Modellkontinuums durch die entsprechenden Funktionen des dreidimensionalen Kontinuums.

Für die Ermittlung der effektiven Eigenschaften (Materialfunktionen) stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Die erste besteht in einer experimentellen Ermittlung der entsprechenden Ausdrücke, was jedoch oftmals schwierig und aufwendig ist. Ein zweiter Weg besteht darin, daß bestimmte Aufgaben nach der zweidimensionalen Theorie und der dreidimensionalen Theorie gelöst werden. Ein anschließender Vergleich der Lösungen führt dann auf die zu ermittelnden effektiven Eigen-

schaften des zweidimensionalen viskoelastischen Modellkontinuums, die sich als Ausdrücke der Materialfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und der Querschnittsgeometrie ergeben. Die Methodik der Ermittlung der effektiven Eigenschaften ist auf Bild 1 dargestellt. In der Arbeit werden mögliche Randwertaufgaben zur Ermittlung der effektiven Eigenschaften des zweidimensionalen Modellkontinuums vorgestellt. Das reale Flächentragwerk besteht aus isotropem viskoelastischen Material, wobei sich die Materialeigenschaften in Dickenrichtung ändern können. Die Materialfunktionen bzw. -parameter unterliegen bezüglich der Dickenrichtung keinerlei weiteren Einschränkungen, d. h. sie können sich stetig bzw. sprunghaft ändern. Damit lassen sich mit den gewonnenen effektiven Eigenschaften beliebige mehrschichtige Flächentragwerke betrachten. Außerdem wird in der Theorie die Querschubdeformation berücksichtigt.

1. Konstitutive Gleichungen der räumlichen linearen Viskoelastizitätstheorie im isotropen Fall

Die konstitutiven Gleichungen der linearen Viskoelastizitätstheorie lassen sich als integrale und differentielle Ausdrücke bzw. im Falle stationärer Schwingungen mit Hilfe von komplexen Moduln formulieren. Ausgehend von [2] werden diese hier in folgender Form angegeben:

– integrale Beziehungen

$$\sigma(\underline{r}, z, t) = 3 \int_{-\infty}^t R_K(z, t-\tau) \dot{\epsilon}(\underline{r}, z, \tau) d\tau, \quad (1.1)$$

$$\underline{s}(\underline{r}, z, t) = 2 \int_{-\infty}^t R_G(z, t-\tau) \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{r}, z, \tau) d\tau$$

bzw.

$$\epsilon(\underline{r}, z, t) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^t K_K(z, t-\tau) \dot{\sigma}(\underline{r}, z, \tau) d\tau, \quad (1.2)$$

$$\underline{e}(\underline{r}, z, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t K_G(z, t-\tau) \dot{\underline{s}}(\underline{r}, z, \tau) d\tau,$$

wobei

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{3} (\underline{E} \cdot \cdot \underline{\sigma}) \underline{E} + \underline{s} = \frac{1}{3} \sigma \underline{E} + \underline{s}, \quad (1.3)$$

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{3} (\underline{E} \cdot \cdot \underline{\epsilon}) \underline{E} + \underline{e} = \frac{1}{3} \epsilon \underline{E} + \underline{e}$$

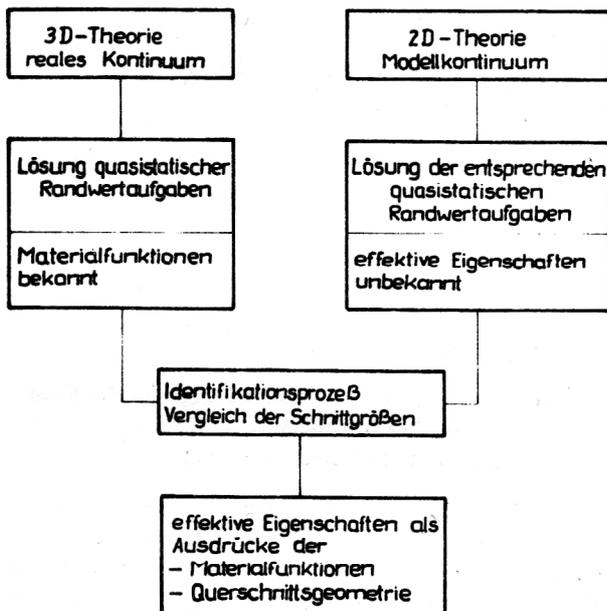


Bild 1
Methodik der Ermittlung effektiver Eigenschaften

ist. Außerdem bedeuten in (1.1) – (1.3) $\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}$ Spannungs-, Deformationstensor, $\underline{s}, \underline{e}$ die entsprechenden Deviatoren, $\underline{r} = \underline{r}(x_1, x_2)$ der Radius-Vektor, x_1, x_2, z orthogonale Koordinaten, t die Zeitkoordinate, $(\)^*$ die Ableitung nach der Zeit, \underline{E} der Einheitstensor, R_G, R_K die Funktionen der Schub- bzw. Volumenrelaxation, K_G, K_K die entsprechenden Kriechfunktionen. Der Zusammenhang zwischen Relaxations- und Kriechfunktionen läßt sich wie folgt angeben

$$\frac{d}{dt} \int_0^t R_K(z, t-\tau) K_K(z, \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t R_G(z, t-\tau) K_G(z, \tau) d\tau = 1.$$

Es sei an dieser Stelle nochmals unterstrichen, daß sich die Kriech- und Relaxationsfunktionen mit der Koordinaten in Dickenrichtung z ändern können.

– differentielle Beziehungen

$$\begin{aligned} M(z, D) \sigma(\underline{r}, z, t) &= N(z, D) \epsilon(\underline{r}, z, t), \\ Q(z, D) \underline{s}(\underline{r}, z, t) &= L(z, D) \underline{e}(\underline{r}, z, t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

wobei

$$\begin{aligned} M(z, D) &= \sum_{b=0}^{M_0} m_b(z) D^b, \\ N(z, D) &= \sum_{b=0}^{N_0} n_b(z) D^b, \\ Q(z, D) &= \sum_{b=0}^{Q_0} q_b(z) D^b, \\ L(z, D) &= \sum_{b=0}^{L_0} l_b(z) D^b \end{aligned} \quad (1.5)$$

gilt. In (1.4), (1.5) bedeuten $D = \frac{d}{dt}$ Ableitung nach der Zeit, D^b b -te Ableitung und m_b, n_b, q_b, l_b sind Koeffizienten, die die physikalisch-mechanischen Eigenschaften des Material kennzeichnen und allgemein von der Koordinaten z abhängen können.

– Verwendung von komplexen Moduln

Für den Fall, daß sich Spannungen und Deformationen harmonisch ändern, d. h.

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}(\underline{r}, z, t) &= \underline{\epsilon}_0(\underline{r}, z) e^{i\omega t}, \\ \underline{\sigma}(\underline{r}, z, t) &= \underline{\sigma}_0(\underline{r}, z) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

gilt (ω ist die Frequenz), erhält man für die integralen Beziehungen (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned} \sigma_0(\underline{r}, z) &= 3R_K^*(z, i\omega) \epsilon_0(\underline{r}, z), \\ \underline{s}_0(\underline{r}, z) &= 2R_G^*(z, i\omega) \underline{e}_0(\underline{r}, z), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0(\underline{r}, z) &= \frac{1}{3} K_K^*(z, i\omega) \sigma_0(\underline{r}, z), \\ \underline{e}_0(\underline{r}, z) &= \frac{1}{2} K_G^*(z, i\omega) \underline{s}_0(\underline{r}, z), \end{aligned} \quad (1.8)$$

wobei

$$R_K^*(z, i\omega) = R_K'(z, \omega) + i R_K''(z, \omega), \quad (1.9)$$

$$R_K'(z, \omega) = \omega \int_0^\infty R_K(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad (1.10)$$

$$R_K''(z, \omega) = \omega \int_0^\infty R_K(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

usw. ist. Für die differentiellen Beziehungen gilt analog

$$\begin{aligned} \sigma_0(\underline{r}, z) &= \frac{\sum_{b=0}^{N_0} n_b(z) (i\omega)^b}{\sum_{b=0}^{M_0} m_b(z) (i\omega)^b} \epsilon_0(\underline{r}, z) \\ &= \frac{N(z, i\omega)}{M(z, i\omega)} \epsilon_0(\underline{r}, z), \\ \underline{s}_0(\underline{r}, z) &= \frac{\sum_{b=0}^{Q_0} q_b(z) (i\omega)^b}{\sum_{b=0}^{L_0} l_b(z) (i\omega)^b} \underline{e}_0(\underline{r}, z) \\ &= \frac{Q(z, i\omega)}{L(z, i\omega)} \underline{e}_0(\underline{r}, z). \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. Die Grundgleichungen für viskoelastische Flächentragwerke

Das hier betrachtete viskoelastische Flächentragwerk, dessen mechanisches Modell ein zweidimensionales Modellkontinuum ist, wobei jeder Punkt des Kontinuums den kinematischen Freiheitsgrad 5 (3 Verschiebungen, 2 Verdrehungen) hat, läßt sich mit folgenden Gleichungen beschreiben [3]:

– geometrische Beziehungen

$$\begin{aligned} \underline{\mu}(\underline{r}, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \nabla \underline{u}(\underline{r}, t) \cdot \underline{a} + [\nabla \underline{u}(\underline{r}, t) \cdot \underline{a}]^T \right\}, \\ \underline{\gamma}(\underline{r}, t) &= \nabla \underline{u}(\underline{r}, t) \cdot \underline{n} + \underline{e} \cdot \underline{\varphi}(\underline{r}, t), \\ \underline{\kappa}(\underline{r}, t) &= \nabla \underline{\varphi}(\underline{r}, t), \\ \underline{u}(\underline{r}, t) &= u_1(\underline{r}, t) \underline{e}_1 + u_2(\underline{r}, t) \underline{e}_2 + w(\underline{r}, t) \underline{n}, \\ \underline{\varphi}(\underline{r}, t) &= -\varphi_2(\underline{r}, t) \underline{e}_1 + \varphi_1(\underline{r}, t) \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

– Quasi-Statikgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{T}(\underline{r}, t) + \underline{q}(\underline{r}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \underline{M}(\underline{r}, t) + \underline{T}_x(\underline{r}, t) + \underline{m}(\underline{r}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei bedeuten $u_\alpha, w, \varphi_\alpha$ Verschiebungen in der Fläche, quer zur Fläche, Verdrehungen ($\alpha = 1, 2$), $\underline{\mu}, \underline{\gamma}, \underline{\kappa}$ Deformationstensoren, $\underline{T}, \underline{M}$ Kräfte- und Momententensor, \underline{T}_x Vektorinvariante des Kräftetensors, ∇ – zweidimensionaler Nablaoperator bezüglich der Flächenkoordinaten $x_\alpha, \underline{q}, \underline{m}$ Flächenkräfte und -momente, $\underline{e}_\alpha, \underline{n}$ orthonormierte Vektorbasis auf der Fläche und $(\)^T$ – Transponieren.

Den Abschluß der Grundgleichungen bilden die konstitutiven Gleichungen, die in [1] angeführt sind. Diese gelten für den Fall allgemeiner Anisotropie und für dünne

Flächentragwerke. Die Anzahl der zu ermittelnden Er-
satzigenschaften reduziert sich für den isotropen Fall
wesentlich, was ohne Schwierigkeiten mit Hilfe der Sym-
metrietheorie nachgewiesen werden kann [4]. Ohne auf
Einzelheiten einzugehen, seien hier nur die Endresultate
angeführt.

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{T}}(\underline{r}, t) \cdot \underline{a} &= \int_{-\infty}^t [({}^{(4)}\underline{\underline{A}}^*(t-\tau) \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}(\underline{r}, \tau) \\ &+ ({}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*(t-\tau) \cdot \underline{\underline{\dot{k}}}(\underline{r}, \tau))] d\tau, \\ \underline{\underline{T}}(\underline{r}, t) \cdot \underline{n} &= \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\Gamma}}^*(t-\tau) \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}}(\underline{r}, \tau) d\tau, \\ \underline{\underline{M}}^T(\underline{r}, t) &= \int_{-\infty}^t [\underline{\underline{\dot{u}}}(\underline{r}, \tau) \cdot ({}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*(t-\tau) \\ &+ ({}^{(4)}\underline{\underline{C}}^*(t-\tau) \cdot \underline{\underline{\dot{k}}}(\underline{r}, \tau))] d\tau, \end{aligned} \right\} (2.3)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} ({}^{(4)}\underline{\underline{A}}^* &= A_1^* \underline{a}_1 \underline{a}_1 + A_2^* (\underline{a}_2 \underline{a}_2 + \underline{a}_4 \underline{a}_4), \\ ({}^{(4)}\underline{\underline{B}}^* &= B_1^* \underline{a}_1 \underline{a}_3 + B_2^* (\underline{a}_2 \underline{a}_4 - \underline{a}_4 \underline{a}_2), \\ ({}^{(4)}\underline{\underline{C}}^* &= C_1^* \underline{a}_3 \underline{a}_3 + C_2^* (\underline{a}_2 \underline{a}_2 + \underline{a}_4 \underline{a}_4), \\ \underline{\underline{\Gamma}}^* &= \Gamma^* \underline{a}_1, \\ \underline{a}_1 &= \underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \underline{e}_2 = \underline{a}, \\ \underline{a}_2 &= \underline{e}_1 \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \underline{e}_2, \\ \underline{a}_3 &= \underline{e}_1 \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \underline{e}_1 = \underline{c}, \\ \underline{a}_4 &= \underline{e}_1 \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \underline{e}_1 \end{aligned} \right\} (2.4)$$

gilt. Die Tensoren $({}^{(4)}\underline{\underline{A}}^*, ({}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*, ({}^{(4)}\underline{\underline{C}}^*, \underline{\underline{\Gamma}}^*$ werden als
Tensoren der effektiven Eigenschaften bezeichnet, deren
Komponenten $A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^*, C_1^*, C_2^*, \Gamma^*$ von den
physikalisch-mechanischen Charakteristika und der
Querschnittsgeometrie abhängen. Sie zu bestimmen ist
Ziel der vorliegenden Arbeit.

3. Ermittlung der effektiven Eigenschaften

3.1. Einführende Bemerkungen

Die Ermittlung der effektiven Eigenschaften soll hier
entsprechend der auf Bild 1 dargestellten Methodik er-
folgen. Dazu sind nachfolgend Randwertaufgaben der
Viskoelastizitätstheorie für eine viskoelastische Schicht
der Dicke h und entsprechende Aufgaben nach der hier
vorgestellten Theorie zu lösen. Bei der Lösung entspre-
chender Aufgaben kann man die Methode der Integral-
operatoren, der Laplace-Transformation, der Iljuschin-
Approximation u. a. verwenden [5]. Während die Me-
thode der Integraloperatoren nur für das integrale Vis-
koelastizitätsgesetz anwendbar ist, kann die Laplace-
Transformation für die integralen und differentiellen
Beziehungen eingesetzt werden. Daher soll im weiteren
nur die Laplace-Transformation verwendet werden. Die-
se ist wie folgt definiert [6]

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (3.1)$$

wobei $f(t)$ die Originalfunktion, $\bar{f}(p)$ die Bildfunktion,
 p die Variable des Bildraums und t die Zeitkoordinate
sind. Mit Hilfe von (3.1) lassen sich die Integral- bzw.
Differentialgleichungen der Zeit, die in den Abschnitten
1 und 2 eingeführt wurden, in algebraische Gleichungen
der Variablen des Bildraums p überführen. Um die Dar-
stellung übersichtlich zu halten, wird bei der Anwendung
der Laplace-Transformation von Anfangsbedingungen
gleich Null ausgegangen.

Zur Ermittlung der effektiven Eigenschaften sind im Fal-
le des isotropen Materials 2 Testaufgaben zu lösen: Bie-
gung mit überlagertem Zug sowie Torsion unter Einwir-
kung eines konstanten (bezüglich der Koordinaten x_α)
Randmomentes. Nachfolgend werden diese Aufgaben für
die verschiedenen Materialgesetze gelöst.

3.2. Effektive Eigenschaften bei Anwendung des inte- gralen Materialgesetzes

Biegung mit überlagertem Zug: Für den Fall, daß der
Streifen bei $z = \pm \frac{h}{2}$ belastungsfrei ist, läßt sich $\sigma_{zz} = 0$
an jeder Stelle der viskoelastischen Schicht ($|z| \leq \frac{h}{2}$,
 $|x_1| \leq x_{01}$, $|x_2| < \infty$) annehmen. Wenn der Streifen,
wie auf Bild 2 gezeigt, beansprucht wird, so erhält man
folgendes Deformationsfeld

$$\underline{\underline{\epsilon}}(z, t) = [f_1(t) + f_2(t)z] \underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_{zz}(z, t) \underline{n} \underline{n}. \quad (3.2)$$

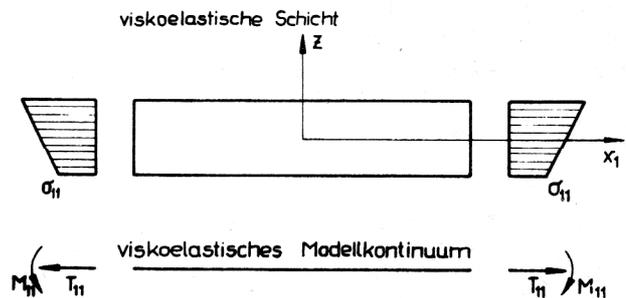


Bild 2
Biegung mit überlagertem Zug

Nach Ausführung der Laplace-Transformation in (3.2)
und anschließendem Einsetzen in das transformierte
Materialgesetz (1.1) erhält man folgende Spannungen
im Bildraum

$$\bar{\underline{\underline{\sigma}}}(z, p) = p [\bar{f}_1(p) + \bar{f}_2(p)z] \quad (3.3)$$

$$[F_1(z, p) \underline{e}_1 \underline{e}_1 + F_2(z, p) \underline{e}_2 \underline{e}_2],$$

wobei

$$F_1(z, p) = \frac{4 \bar{R}_G(z, p) [3 \bar{R}_K(z, p) + \bar{R}_G(z, p)]}{3 \bar{R}_K(z, p) + 4 \bar{R}_G(z, p)},$$

$$F_2(z, p) = \frac{2 \bar{R}_G(z, p) [3 \bar{R}_K(z, p) - 2 \bar{R}_G(z, p)]}{3 \bar{R}_K(z, p) + 4 \bar{R}_G(z, p)} \quad (3.4)$$

ist.

Der Übergang von den Spannungen zu den Schnittgrö-
ßen erfolgt traditionell [7]

$$\underline{T}(\underline{r}, t) = \langle \underline{a} \cdot \underline{\sigma}(\underline{r}, z, t) \rangle, \quad (3.5)$$

$$\underline{M}(\underline{r}, t) = \langle \underline{a} \cdot \underline{\sigma}(\underline{r}, z, t) z \cdot \underline{c} \rangle,$$

wobei

$$\langle (\) \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\) dz$$

das Symbol für das Integral über die Dicke des Flächen-tragwerks ist. Analoge Beziehungen gelten für die transformierten Größen. Im Fall der ersten Aufgabe erhält man somit aus (3.3) bei Anwendung der Beziehungen (3.5)

$$\left. \begin{aligned} \underline{T}(\underline{p}) &= p \langle [\bar{f}_1(\underline{p}) + \bar{f}_2(\underline{p}) z] \\ &\quad [F_1(z, p) \underline{e}_1 \underline{e}_1 + F_2(z, p) \underline{e}_2 \underline{e}_2] \rangle, \\ \underline{M}(\underline{p}) &= p \langle z [\bar{f}_1(\underline{p}) + \bar{f}_2(\underline{p}) z] \\ &\quad [F_1(z, p) \underline{e}_1 \underline{e}_2 - F_2(z, p) \underline{e}_2 \underline{e}_1] \rangle. \end{aligned} \right\} (3.6)$$

In der analogen Aufgabe für das Modellkontinuum kann von folgenden Verschiebungen und Verdrehungen ausgegangen werden

$$\underline{u}(\underline{r}, t) = f_1(t) x_1 \underline{e}_1 - \frac{1}{2} f_2(t) x_1^2 \underline{n}, \quad (3.7)$$

$$\varphi(\underline{r}, t) = f_2(t) x_1 \underline{e}_2.$$

Die Gleichungen (3.7) beziehen sich auf den unteren Teil des Bildes 2. Nach der Transformation der Gln. (3.7) und Einsetzen in die transformierten Gln. (2.1) erhält man folgende Deformationstensoren im Bildraum

$$\left. \begin{aligned} \underline{\bar{\mu}}(\underline{p}) &= \bar{f}_1(\underline{p}) \underline{e}_1 \underline{e}_1, \\ \underline{\bar{\gamma}}(\underline{p}) &= 0, \\ \underline{\bar{\kappa}}(\underline{p}) &= \bar{f}_2(\underline{p}) \underline{e}_1 \underline{e}_2. \end{aligned} \right\} (3.8)$$

Nach Einsetzen der Deformationstensoren (3.8) in die transformierten konstitutiven Gln. (2.3) erhält man unter Beachtung von (2.4)

$$\left. \begin{aligned} \underline{T}(\underline{p}) &= p \left\{ [\bar{A}_1^*(\underline{p}) + \bar{A}_2^*(\underline{p})] \bar{f}_1(\underline{p}) \right. \\ &\quad + [-\bar{B}_1^*(\underline{p}) + \bar{B}_2^*(\underline{p})] \bar{f}_2(\underline{p}) \left. \right\} \underline{e}_1 \underline{e}_1 \\ &\quad + p \left\{ [\bar{A}_1^*(\underline{p}) - \bar{A}_2^*(\underline{p})] \bar{f}_1(\underline{p}) \right. \\ &\quad + [-\bar{B}_1^*(\underline{p}) - \bar{B}_2^*(\underline{p})] \bar{f}_2(\underline{p}) \left. \right\} \underline{e}_2 \underline{e}_2, \\ \underline{M}(\underline{p}) &= p \left\{ [\bar{B}_1^*(\underline{p}) + \bar{B}_2^*(\underline{p})] \bar{f}_1(\underline{p}) \right. \\ &\quad + [-\bar{C}_1^*(\underline{p}) + \bar{C}_2^*(\underline{p})] \bar{f}_2(\underline{p}) \left. \right\} \underline{e}_1 \underline{e}_2 \\ &\quad + p \left\{ [-\bar{B}_1^*(\underline{p}) + \bar{B}_2^*(\underline{p})] \bar{f}_1(\underline{p}) \right. \\ &\quad + [\bar{C}_1^*(\underline{p}) + \bar{C}_2^*(\underline{p})] \bar{f}_2(\underline{p}) \left. \right\} \underline{e}_2 \underline{e}_1. \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Ein Vergleich der Gln. (3.6) und (3.9) ergibt folgende effektive Eigenschaften

$$\left. \begin{aligned} &[\bar{A}_1^*(\underline{p}); \bar{B}_1^*(\underline{p}); \bar{C}_1^*(\underline{p})] \\ &= \langle F(z, p) [1; -z; z^2] \rangle, \\ &[\bar{A}_2^*(\underline{p}); \bar{B}_2^*(\underline{p}); \bar{C}_2^*(\underline{p})] \\ &= \langle F^*(z, p) [1; z; z^2] \rangle \end{aligned} \right\} (3.10)$$

mit

$$\begin{aligned} F(z, p) &= \frac{1}{2} [F_1(z, p) + F_2(z, p)] \\ &= \frac{9 \bar{R}_G(z, p) \bar{R}_K(z, p)}{3 \bar{R}_K(z, p) + 4 \bar{R}_G(z, p)}, \end{aligned}$$

$$F^*(z, p) = \frac{1}{2} [F_1(z, p) - F_2(z, p)] = \bar{R}_G(z, p). \quad (3.11)$$

Torsionsaufgabe: Für den Fall, daß auf den Rand $x_1 = \pm x_{01}$ ein bezüglich der Koordinaten x_α konstantes Moment $M^*(t)$ wirkt (Bild 3), verformt sich das Modellkontinuum folgendermaßen

$$\underline{u} = u_2(x_1, t) \underline{e}_2, \quad \varphi = -\varphi_2(x_1, t) \underline{e}_1. \quad (3.12)$$

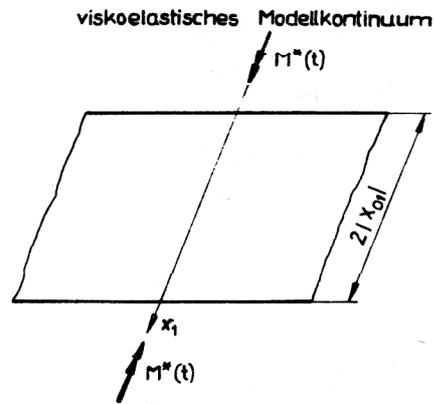


Bild 3
Zur Torsionsaufgabe

Nach Ausführung der Laplace-Transformation und Einsetzen in die transformierten Ausdrücke der Deformationstensoren (2.1) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \underline{\bar{\mu}}(x_1, p) &= \frac{1}{2} \bar{u}_2(x_1, p),_{11} \underline{a}_4, \\ \underline{\bar{\gamma}}(x_1, p) &= \bar{\varphi}_2(x_1, p) \underline{e}_2, \\ \underline{\bar{\kappa}}(x_1, p) &= -\bar{\varphi}_2(x_1, p),_{11} \underline{e}_1 \underline{e}_1. \end{aligned} \right\} (3.13)$$

Dabei ist $(\)_{,1}$ die Ableitung nach x_1 .

Die Gln. (3.13) werden in die transformierten konstitutiven Gln. (2.3) eingesetzt

$$\begin{aligned} \underline{T}(x_1, p) &= p [\bar{A}_2^*(\underline{p}) \bar{u}_2(x_1, p),_{11} + \bar{B}_2^*(\underline{p}) \bar{\varphi}_2(x_1, p),_{11}] \underline{a}_4 \\ &\quad + p \bar{\Gamma}^*(\underline{p}) \bar{\varphi}_2(x_1, p) \underline{e}_2 \underline{n}, \\ \underline{M}(x_1, p) &= -p [\bar{B}_2^*(\underline{p}) \bar{u}_2(x_1, p),_{11} \\ &\quad + \bar{C}_2^*(\underline{p}) \bar{\varphi}_2(x_1, p),_{11}] \underline{a}_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nach Einsetzen in die transformierten Quasi-Statikgn. (2.2) erhält man folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} &\bar{A}_2^*(\underline{p}) \bar{u}_2(x_1, p),_{11} \\ &+ \bar{B}_2^*(\underline{p}) \bar{\varphi}_2(x_1, p),_{11} = 0, \\ &\bar{B}_2^*(\underline{p}) \bar{u}_2(x_1, p),_{11} + \bar{C}_2^*(\underline{p}) \bar{\varphi}_2(x_1, p),_{11} \\ &- \bar{\Gamma}^*(\underline{p}) \bar{\varphi}_2(x_1, p) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Das System (3.15) führt bei den Randbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 = \pm x_{01} : \underline{e}_1 \cdot \underline{T} &= 0, \\ \underline{e}_1 \cdot \underline{M} &= -M^*(t) \underline{e}_1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

auf die Lösung

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x_1, p) &= -\frac{\bar{B}_2^*(p)}{\bar{A}_2^*(p)} \bar{\varphi}_2(x_1, p), \\ \bar{\varphi}_2(x_1, p) &= \bar{M}^*(p) \frac{\bar{A}_2^*(p)}{\bar{A}_2^*(p) \bar{C}_2^*(p) - \bar{B}_2^*(p)^2} \\ &\quad \cdot \frac{\text{sh } \lambda(p) x_1}{\lambda(p) \text{ch } \lambda(p) x_{01}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

mit

$$\lambda^2(p) = \frac{\bar{\Gamma}^*(p) \bar{A}_2^*(p)}{\bar{A}_2^*(p) \bar{C}_2^*(p) - \bar{B}_2^*(p)^2}$$

Für die viskoelastische Schicht wird folgendes Verschiebungsfeld vorausgesetzt

$$u = \tilde{w} = 0, \quad v = v(x_1, z, t). \quad (3.18)$$

Damit ergeben sich für die transformierten Spannungen

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(x_1, z, p) &= p \bar{R}_G(z, p) [\bar{v}(x_1, z, p)_{,1} \underline{a}_4 \\ &\quad + \bar{v}(x_1, z, p)_{,z} (\underline{e}_1 \underline{n} + \underline{n} \underline{e}_1)], \end{aligned} \quad (3.19)$$

wobei mit ()_{,z} die Ableitung nach z bezeichnet wird.

Nach dem Einsetzen in die entsprechenden Quasi-Statikgl. erhält man

$$\begin{aligned} \bar{R}_G(z, p) \bar{v}(x_1, z, p)_{,11} \\ + [\bar{R}_G(z, p) \bar{v}(x_1, z, p)_{,z}]_{,z} = 0. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung hat bei folgenden Randbedingungen

$$z = \pm \frac{h}{2} : \underline{n} \cdot \underline{\sigma} = 0$$

die Lösung

$$\bar{v}(x_1, z, p) = B \bar{V}(z, p) \frac{\text{sh } \lambda_0(p) x_1}{\lambda_0(p) \text{ch } \lambda_0(p) x_{01}}, \quad (3.20)$$

wobei $\lambda_0(p)$ die dem Modul nach kleinste nichttriviale Lösung nachfolgender Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned} [\bar{R}_G(z, p) \bar{V}(z, p)_{,z}]_{,z} \\ + \lambda_0^2(p) \bar{R}_G(z, p) \bar{V}(z, p) = 0 \\ z = \pm \frac{h}{2} : \bar{V}(z, p)_{,z} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

und B eine noch aus den Randbedingungen zu bestimmende Konstante darstellt.

Die Lösung (3.20) wird jetzt in (3.19) eingesetzt. Mit Hilfe von (3.5) werden die Schnittgrößen ermittelt

$$\begin{aligned} \bar{T}(x_1, p) &= \frac{Bp}{\lambda_0(p) \text{ch } \lambda_0(p) x_{01}} \\ &< \bar{R}_G(z, p) [\bar{V}(z, p) \lambda_0(p) \text{ch } \lambda_0(p) x_1 \underline{a}_4 \\ &\quad + \bar{V}(z, p)_{,z} \text{sh } \lambda_0(p) x_1 (\underline{e}_1 \underline{n} + \underline{n} \underline{e}_1)] >, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}(x_1, p) &= -\frac{Bp}{\text{ch } \lambda_0(p) x_{01}} \\ &< z \bar{R}_G(z, p) \bar{V}(z, p) \text{ch } \lambda_0(p) x_1 > \underline{a}_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Integration von (3.21) nach z ergibt unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \lambda_0(p) &\neq 0 \\ < \bar{R}_G(z, p) \bar{V}(z, p) > = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Der Vergleich der Lösungen der Aufgabe nach der zweidimensionalen Theorie und der Aufgabe nach der dreidimensionalen Theorie ergibt bei Beachtung der Gl. (3.23) und der Randbedingungen (3.16) eine völlige Übereinstimmung der Schnittgrößen für den Fall, daß $\lambda(p) = \lambda_0(p)$ ist, wobei $\lambda_0(p)$ aus (3.21) zu bestimmen ist. Damit erhält man abschließend

$$\bar{\Gamma}^*(p) = \lambda^2(p) \frac{\bar{A}_2^*(p) \bar{C}_2^*(p) - \bar{B}_2^*(p)^2}{\bar{A}_2^*(p)}, \quad (3.24)$$

wobei $\bar{A}_2^*(p)$, $\bar{B}_2^*(p)$ und $\bar{C}_2^*(p)$ als bekannt vorausgesetzt werden. Für die Verschiebungen erhält man keine völlige Übereinstimmung. Für sie wird die Erfüllung nachfolgender Bedingung gefordert

$$\begin{aligned} < \bar{R}_G(z, p) [\bar{v}(x_1, z, p) - \bar{u}_2(x_1, p) - z \bar{\varphi}_2(x_1, p)]^2 > = \min_{u_2, \varphi_2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.3. Effektive Eigenschaften bei Anwendung des differentiellen Materialgesetzes

In diesem Fall sind die gleichen Aufgaben wie im vorhergehenden Fall zu lösen, wobei die Lösungen nach der zweidimensionalen Theorie vollständig erhalten bleiben. Für die Lösung der ersten Aufgabe nach der dreidimensionalen Theorie ist in (3.3) $F_1(z, p)$ bzw. $F_2(z, p)$ durch nachfolgende (mit Stern gekennzeichnete) Ausdrücke zu ersetzen

$$\left. \begin{aligned} F_1^*(z, p) &= \frac{L(z, p)}{pQ(z, p)} \frac{2Q(z, p)N(z, p) + M(z, p)L(z, p)}{Q(z, p)N(z, p) + 2M(z, p)L(z, p)} \\ F_2^*(z, p) &= \frac{L(z, p)}{pQ(z, p)} \frac{Q(z, p)N(z, p) - M(z, p)L(z, p)}{Q(z, p)N(z, p) + 2M(z, p)L(z, p)} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Die Gln. (3.10) bleiben gleichfalls erhalten, jedoch gilt statt (3.11)

$$\begin{aligned} F(z, p) &= \frac{1}{2} [F_1^*(z, p) + F_2^*(z, p)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{L(z, p)}{pQ(z, p)} \frac{3Q(z, p)N(z, p)}{Q(z, p)N(z, p) + 2M(z, p)L(z, p)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$F^*(z, p) = \frac{1}{2} [F_1^*(z, p) - F_2^*(z, p)] = \frac{1}{2} \frac{L(z, p)}{pQ(z, p)}$$

Für die zweite Aufgabe behält (3.2.4) seine Gültigkeit, jedoch ist $\lambda(p)$ aus folgender Gl. zu bestimmen

$$\begin{aligned} \frac{L(z, p)}{Q(z, p)} \bar{V}(z, p)_{,z} \\ + \lambda^2(p) \frac{L(z, p)}{Q(z, p)} \bar{V}(z, p) = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$z = \pm \frac{h}{2} : \bar{V}(z, p)_{,z} = 0.$$

3.4. Effektive Eigenschaften bei Verwendung komplexer Moduln

Auch in diesem Fall werden die Testaufgaben in Analogie zu Abschnitt 3.2 gelöst. Beispielsweise erhält man bei Verwendung der Gln. (1.8), (1.7) statt (3.3) folgende Spannungen

$$\underline{\sigma}_o = (f_1 + f_2 z)$$

$$[F_3(z, i\omega) \underline{e}_1 \underline{e}_1 + F_4(z, i\omega) \underline{e}_2 \underline{e}_2]$$

mit

$$F_3(z, i\omega) = \frac{4R_G^*(z, i\omega) [3R_K^*(z, i\omega) + R_G^*(z, i\omega)]}{3R_K^*(z, i\omega) + 4R_G^*(z, i\omega)},$$

$$F_4(z, i\omega) = \frac{2R_G^*(z, i\omega) [3R_K^*(z, i\omega) - 2R_G^*(z, i\omega)]}{3R_K^*(z, i\omega) + 4R_G^*(z, i\omega)} \quad (3.29)$$

bzw. für den Fall der Gln. (1.11) ist (3.29) wie folgt zu ersetzen

$$\left. \begin{aligned} F_3^*(z, i\omega) &= \frac{L(z, i\omega)}{i\omega Q(z, i\omega)} \\ \frac{2Q(z, i\omega)N(z, i\omega) + M(z, i\omega)L(z, i\omega)}{Q(z, i\omega)N(z, i\omega) + 2M(z, i\omega)L(z, i\omega)}, \\ F_4^*(z, i\omega) &= \frac{L(z, i\omega)}{i\omega Q(z, i\omega)} \\ \frac{Q(z, i\omega)N(z, i\omega) - M(z, i\omega)L(z, i\omega)}{Q(z, i\omega)N(z, i\omega) + 2M(z, i\omega)L(z, i\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Für die effektiven Eigenschaften ergeben sich ähnliche Ausdrücke wie (3.10). Für die zweite Aufgabe kann man $\Gamma^*(i\omega)$ wie $\Gamma^*(p)$ bestimmen, jedoch ergibt sich $\lambda(i\omega)$ aus folgender Aufgabe

$$[R_G^*(z, i\omega) V(z),_z + \lambda^2(i\omega) R_G^*(z, i\omega) V(z)] = 0,$$

$$z = \pm \frac{h}{2} : V(z),_z = 0$$

bzw.

$$\left[\frac{L(z, i\omega)}{Q(z, i\omega)} V(z),_z \right],_z + \lambda^2(i\omega) \frac{L(z, i\omega)}{Q(z, i\omega)} V(z) = 0,$$

$$z = \pm \frac{h}{2} : V(z),_z = 0.$$

4. Beispiel: Sandwich-Platte

An dieser Stelle soll der auf Bild 4 dargestellte Querschnitt einer Sandwich-Platte betrachtet werden, wobei von einer integralen Formulierung des Materialgesetzes ausgegangen wird. Die Deckschichten sollen rein elastisch sein, d. h. die Gln. (1.1) sind wie folgt zu ersetzen

$$\sigma(\underline{r}, z, t) = 3K_D \epsilon(\underline{r}, z, t),$$

$$\underline{s}(\underline{r}, z, t) = 2G_D \underline{e}(\underline{r}, z, t). \quad (4.1)$$

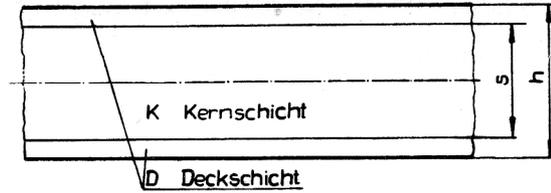


Bild 4
Querschnitt einer Sandwichplatte

Die Kernschicht besteht aus viskoelastischem Material, wobei das erste Axiom der Rheologie [8] gültig sein soll. Ein solches Material verhält sich bei allseitigem Druck rein elastisch, womit für die Kernschicht das Materialgesetz (1.1) folgendermaßen zu ersetzen ist

$$\sigma(\underline{r}, z, t) = 3K_K \epsilon(\underline{r}, z, t), \quad (4.2)$$

$$\underline{s}(\underline{r}, z, t) = 2 \int_{-\infty}^t R_{GK} (t-\tau) \underline{e}(\underline{r}, z, \tau) d\tau.$$

In (4.2) und (4.1) sind K_D , K_K die Kompressionsmoduln der Deckschichten bzw. der Kernschicht, G_D der Schubmodul der Deckschichten und R_{GK} die Schubrelaxationsfunktion der Kernschicht.

Offensichtlich erhält man in diesem Sonderfall für die effektiven Eigenschaften $\bar{B}_1^*(p)$, $\bar{B}_2^*(p)$ den Wert Null, da der Querschnitt bezüglich der Geometrie und den Materialeigenschaften symmetrisch ist. Weiterhin gilt

$$\bar{A}_1^*(p) = \frac{9G_D K_D}{(3K_D + 4G_D)p} (h-s) + \frac{9\bar{R}_{GK}(p) K_K}{3K_K + 4\bar{R}_{GK}(p)p} s,$$

$$\bar{A}_2^*(p) = \frac{1}{p} G_D (h-s) + \bar{R}_{GK}(p) s,$$

$$\bar{C}_1^*(p) = \frac{3G_D K_D}{4(3K_D + 4G_D)p} (h^3 - s^3) + \frac{3}{4} \frac{\bar{R}_{GK}(p) K_K}{3K_K + 4\bar{R}_{GK}(p)p} s^3,$$

$$\bar{C}_2^*(p) = \frac{1}{12} \left[\frac{1}{p} G_D (h^3 - s^3) + \bar{R}_{GK}(p) s^3 \right].$$

$\Gamma^*(p)$ läßt sich folgendermaßen bestimmen

$$\Gamma^*(p) = \lambda^2(p) \bar{C}_2^*(p),$$

wobei $\lambda^2(p)$ die Lösung folgender Differentialgleichung ist

$$\bar{V}(z, p),_{zz} + \lambda^2(p) \bar{V}(z, p) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist bei folgenden Randbedingungen

$$z = \pm \frac{h}{2} : \bar{V}(z, p),_z = 0$$

und den Übergangsbedingungen

$$\bar{V}(z, p) \Big|_{z = \pm(\frac{s}{2} + 0)} = \bar{V}(z, p) \Big|_{z = \pm(\frac{s}{2} - 0)},$$

$$G_D \bar{V}(z, p)_{,z} \Big|_{z = \pm (\frac{s}{2} + 0)}$$

$$= \bar{R}_{G_K}(p) p \bar{V}(z, p) \Big|_{z = \pm (\frac{s}{2} - 0)}$$

zu lösen.

Eine weitere Konkretisierung ist nur bei zusätzlichen Annahmen möglich. Nachfolgend soll $h \cong s$ (dünne Deckschichten) und das Maxwell-Modell für die Kernschicht gültig sein. Danach ist [9]

$$\underline{s}(\underline{r}, z, t) = 2G_K \int_{-\infty}^t e^{-G_K(t-\tau)/\mu_K} \underline{\dot{e}}(\underline{r}, z, \tau) d\tau$$

mit G_K als Schubmodul und μ_K als Dämpfungskoeffizient der Kernschicht. μ_K/G_K wird auch als Relaxationszeit bezeichnet. Offensichtlich gilt in diesem Fall folgende Schubrelaxationsfunktion

$$\bar{R}_{G_K}(t) = G_K e^{-G_K t/\mu_K}$$

Die entsprechende Laplace-Transformierte ist

$$\bar{R}_{G_K}(p) = G_K \frac{1}{p + \frac{G_K}{\mu_K}}$$

Oftmals ist der Schubmodul der Kernschicht wesentlich kleiner als der der Deckschichten. Wenn die Größenordnung $O(G_K/G_D)$ viel kleiner als $O(h-s/s)$ ist, so erhält man für die Ersatzseigenschaften $\bar{A}_1^*(p)$, $\bar{A}_2^*(p)$, $\bar{C}_1^*(p)$, $\bar{C}_2^*(p)$ die aus der Theorie der elastischen Sandwich-Platten bekannten elastischen Näherungen [10]

$$\bar{A}_1^*(p) \cong A_1 = \frac{9G_D K_D}{(3K_D + 4G_D)p} (h-s),$$

$$\bar{A}_2^*(p) \cong A_2 = \frac{1}{p} G_D (h-s),$$

$$\bar{C}_1^*(p) \cong C_1 = \frac{3G_D K_D}{4(3K_D + 4G_D)p} (h^3 - s^3),$$

$$\bar{C}_2^*(p) \cong C_2 = \frac{1}{12p} G_D (h^3 - s^3).$$

Für $\bar{\Gamma}^*(p)$ ergibt sich folgende Näherung

$$\bar{\Gamma}^*(p) \cong \frac{4G_K}{G_D} \frac{p}{(p + \frac{G_K}{\mu_K} s (h-s))} \frac{G_D}{12p} (h^3 - s^3)$$

$$= \frac{G_K}{3} \frac{1}{p + \frac{G_K}{\mu_K}} \frac{h^2 + sh + s^2}{s} \cong \frac{G_K s}{p + \frac{G_K}{\mu_K}}$$

Dieser Wert stimmt vollständig mit dem in [11] angegebenen überein, wobei in [11] die differentielle Formulierung des Materialgesetzes als Ausgangspunkt diente.

5. Abschließende Bemerkungen

Die hier vorgestellte Methode der Ermittlung effektiver Eigenschaften viskoelastischer ebener Flächentragwerke eignet sich gut zur globalen Analyse, wobei auch geschichtete Flächentragwerke betrachtet werden können. Die ermittelten Ausdrücke sind allgemeiner als entsprechende, aus der Literatur bekannte Angaben. Die hiermit vollständig vorgestellte Flächentragwerkstheorie besitzt noch einen weiteren Vorteil: Effekte, die mit der Querschubdeformation verbunden sind, können berücksichtigt werden. Diese Effekte können auch bei Aufgaben zum Kriechen viskoelastischer Flächentragwerke wesentlichen Einfluß auf die Qualität der Ergebnisse haben [12].

Das Beispiel des Abschnittes 4 zeigt, daß es nur in wenigen Fällen gelingt, analytische Ausdrücke für die effektive Eigenschaft $\Gamma^*(p)$ in geschlossener Form zu ermitteln. Hier bedarf es offensichtlich noch weiterer Untersuchungen zu günstigen Rechenverfahren, die eine näherungsweise Ermittlung möglich machen. Diese sollten sinnvollerweise mit der Lösung des Umkehrproblems, d. h. des Ermitteln der Lösung im Originalraum, verbunden werden.

LITERATUR

- [1] Altenbach, H.: Konstitutive Gleichungen für viskoelastische ebene Flächentragwerke. Technische Mechanik 7 (1986), 4.
- [2] Christensen, R. M.: Theory of Viscoelasticity. New York, Academic-Press, 1971.
- [3] Altenbach, H.: Zur Theorie der inhomogenen Cosserat-Platten. ZAMM 65 (1985), 12, 638 - 641.
- [4] Altenbach, H.: Die Ermittlung der Deformationsenergie für dünne Platten und Schalen mit in Dickenrichtung veränderlichen Materialeigenschaften. Wiss. Zeitschrift der TH „Otto von Guericke“ Magdeburg 28 (1984), 2, 29 - 33.
- [5] Огибалов П. М., Ломакин В. А., Кишкин Б. П.: Механика полимеров. Москва, Изд. МГУ, 1975.
- [6] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979.
- [7] Новожилов В. В.: Теория тонких оболочек. Ленинград, Судпромгиз, 1962.
- [8] Reiner, M.: Rheologie. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1968.
- [9] Backhaus, G.: Deformationsgesetze. Berlin, Akademie-Verlag, 1983.
- [10] Reissner, E.: Small bending and stretching of Sandwich-Type shells. NACA-Report 975, 1950.
- [11] Altenbach, H.: Eine direkt formulierte Biegetheorie für viskoelastische Ein- und Mehrschichtplatten. Technische Mechanik 7 (1986), 3.
- [12] Тетерс Г. А.: Сложное нагружение и устойчивость оболочек из полимерных материалов. Рига, Зинатне, 1969.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. H. Altenbach
Technische Hochschule „Otto von Guericke“ Magdeburg
PSF 124
Magdeburg
3010