

# Zur Modellierung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen von Stahlbeton

Helge Bergander, Hartmut Köppler

## 1. Einleitung

Während derzeit von der in der DDR bereitgestellten Elektroenergie etwa 10 % in Kernkraftwerken erzeugt werden, müssen in den nächsten Jahrzehnten der größte Teil der Wärmekraftwerke durch Kernkraftwerke ersetzt werden. Damit wird der Bau von Objekten der Kernenergetik schnell zunehmen. Diese stellen eine Reihe von besonderen Anforderungen, denen in der Projektierung Rechnung getragen werden muß. U. a. ist unbedingt zu sichern, daß im Falle von Havarien die Umwelt zuverlässig geschützt ist. Dadurch werden sehr massive Konstruktionen erforderlich, die extremen mechanischen und thermischen Beanspruchungen ausgesetzt sind.

Vorzugsweise eingesetzte Materialien sind Beton und Stahl in Stahlbeton-, Spannbeton- und Verbundkonstruktionen aus Stahlbeton und Stahl. Im Beton treten bereits unter Gebrauchslasten plastische, viskoelastische und viskoplastische Verformungen auf, und es bilden sich Risse. Eine möglichst wirklichkeitsnahe Beschreibung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (SVB) des Betons ist für die ökonomische Bemessung und zuverlässige Beurteilung der Sicherheit von Bauwerken der Kernenergetik eine wichtige volkswirtschaftliche Aufgabe. In vielen Fällen sind auch 3D-Berechnungen unumgänglich. Die vorliegende Arbeit ist die theoretische Aufbereitung der momentanen und zeitabhängigen SVB des Betons zur rechentechnischen Realisierung innerhalb des PS FEMA.

Bei der numerischen Modellierung der SVB des Betons, seiner fortschreitenden Rißbildung bis hin zum Versagen sind gegenüber vielen anderen Materialien einige Besonderheiten zu beachten:

- unterschiedliche Festigkeit bei Zug- und Druckbeanspruchung;
- in Abhängigkeit von der Art des Spannungszustandes erfolgt die Rißbildung infolge Abriß oder Schub;
- Dilatationseffekte, d. h. bei Überschreiten eines bestimmten Spannungsniveaus tritt im Zusammenhang mit der Mikrorißbildung eine Gefügearauflockerung ein, die zur Volumenvergrößerung führt;
- viskoelastische und viskoplastische Verzerrungen des Betons können im Vergleich zu den momentanen Verzerrungen mehrfache Werte annehmen;
- die SVB unterliegen wesentlichen Alterungserscheinungen.

In der vorliegenden Arbeit werden die SVB bis zum Reißen des Betons behandelt. Die Formulierung der SVB des gerissenen Betons mit Berücksichtigung der Bewehrung bleibt einer weiteren Arbeit vorbehalten.

## 2. Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung

Bei der Entwicklung hinreichend universeller Programmsysteme ist eine weitgehende Unabhängigkeit von speziellen Deformationsgesetzen von sehr großer Bedeutung. Das einheitliche Konzept der Gleichungen des nichtlinear-inelastischen Materialverhaltens für FEM-Programmentwicklungen [3], [4], [5] soll hier für die Beschreibung der SVB des Betons angewendet werden. Der besondere Vorteil besteht darin, daß mit diesem Konzept weitgehend allgemeinste differentielle SVB berücksichtigt und daß zunächst verwendete SVB mit relativ geringem Aufwand durch andere ersetzt werden können.

Als Variable des Deformationsgesetzes werden  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\epsilon}$ ,  $\underline{h}$  und  $T$  als Funktionen der Zeit  $t$  eingeführt. Die Vektoren  $\underline{\sigma}$  und  $\underline{\epsilon}$  enthalten nur die Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors, die beim konkreten Feldproblem einen Beitrag zur mechanischen Leistung pro Volumeneinheit  $\dot{W}$  liefern.

$$\dot{W} = \underline{\epsilon}^T \dot{\underline{\sigma}} \quad (1)$$

Werden aus Gründen der Umformung des Deformationsgesetzes oder durch das Feldproblem Komponenten des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors benötigt, die nicht identisch verschwinden, aber keinen Beitrag zu  $\dot{W}$  liefern können, so werden diese Komponenten in  $\underline{h}$  eingegliedert. Der Vektor  $\underline{h}$  enthält sämtliche interne Variable des Deformationsgesetzes, die alle dadurch ausgezeichnet sind, daß sie nicht in die raumbezogenen Differentialgleichungen des Feldes eingehen.  $T$  ist das Temperaturfeld, das in der Regel als Differenz zu einem Bezugszustand angegeben wird. Es soll vorausgesetzt werden, daß die Verzerrungen klein sind sowie das Temperaturfeld bekannt ist und nicht von Dissipationsvorgängen wesentlich beeinflusst wird.

Die Grundform der Standardformulierung ist die Auflösung nach den Spannungen, die bei Programmen auf der Grundlage der Deformationsmethode benötigt wird:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{C}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{d}_T(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \dot{T} + \underline{d}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \quad (2)$$

$$\dot{\underline{h}} = \underline{B}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{e}_T(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \dot{T} + \underline{e}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}, \underline{h}, T) \quad (3)$$

Die Matrizen  $\underline{C}$  und  $\underline{B}$  und die Vektoren  $\underline{d}$ ,  $\underline{e}$ ,  $\underline{d}_T$  und  $\underline{e}_T$  charakterisieren das konkrete Materialverhalten und hängen im allgemeinen Fall von  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\epsilon}$ ,  $\underline{h}$  und  $T$  ab. Im Falle der Alterung des Materials, was für Beton typisch ist (d. h. von der Belastung und der Temperatur unabhängiger Änderungen der Materialeigenschaften mit der Zeit) hängen sie auch explizit von  $t$  ab.

### 3. SVB des Betons

Der Beton, eines der wichtigsten Baumaterialien, zeichnet sich durch sehr kompliziertes Spannungs-Formänderungsverhalten aus. Für ungerissenen Beton sind nichtlineare momentane SVB, Kriechen und Schwinden zu unterscheiden.

#### 3.1. Momentane SVB des ungerissenen Betons

Für die momentanen SVB des Betons wird die differentielle Standardformulierung am Beispiel der Deformationstheorie der Plastizität von Geniev u. a. [13] vorgenommen. Dabei handelt es sich um ein finites Deformationsgesetz. Die im Abschnitt 2 gezeigte Vorgehensweise gestattet ohne Schwierigkeiten auch die Verarbeitung differentieller Deformationsgesetze. Mit der Theorie von Geniev werden insbesondere berücksichtigt:

- das nichtlineare Spannungs-Verzerrungs-Verhalten des Betons;
- der Einfluß der 1. Invarianten des Spannungstensors auf die Abhängigkeit zwischen den Invarianten der Spannungs- und Verzerrungsdeviatoren;
- die Kompressibilität und der Dilatationseffekt des Betons;
- die Abhängigkeit der Grenzdeformationen des Betons von der Art des Spannungszustandes;
- die Forderung nach dem direkten Übergang von den SVB des Betons zur Bruchbedingung.

Die Theorie von Geniev ist eine Verallgemeinerung der Festigkeitshypothese von Mohr für den Beton und gibt dessen charakteristische Brucharten infolge Abriß und infolge Gleiten wieder. Der Zugbruch wird bei einer anzugebenden Zugspannung erreicht, während der Schubbruch nach der Theorie von Mohr beschrieben wird. Wie in [13] an vielen Vergleichen mit experimentellen Daten gezeigt ist, wird mit der Theorie von Geniev für den zweiachsigen Spannungszustand (Druck – Druck, Druck – Zug, Zug – Zug) das Spannungs-Verzerrungs-Verhalten des Betons gut erfaßt. Die größeren Abweichungen erhält man für den zweiachsigen Druck. Das kann dadurch erklärt werden, daß versucht wurde, für die verschiedenen Spannungsverhältnisse die Festigkeitsbedingung durch eine Gleichung zu beschreiben. Sinnvoll erscheint daher auch der Weg, für verschiedene Spannungsverhältnisse auch unterschiedliche Festigkeitsbedingungen anzugeben [17]. Nach [13] wird der Beton bis zur Rißbildung als nichtlinear isotropes Material angenommen. Als physikalische Grundeigenschaft wird die Beziehung zwischen den *Intensitäten* der Schubspannungen und Schubverzerrungen verwendet.

Zunächst werden folgende Größen definiert:

$\Gamma = \sqrt{-4J_{D2}}$ ,  $\Gamma_c$ ,  $\Gamma_s$  – Schubverzerrungsintensität des aktuellen Formänderungszustandes, Grenzwert für reinen Schub und Grenzwert für die aktuellen Spannungsverhältnisse;  $J_{D2} = -\frac{1}{2}(\epsilon_{ij} - \epsilon\delta_{ij})(\epsilon_{ij} - \epsilon\delta_{ij}) - 2$ . Invariante des Verzerrungsdeviators mit  $\epsilon = J_1/3$  und  $J_1 = \epsilon_{kk} - 1$ . Invariante des Verzerrungstensors;  $T = \sqrt{-I_{D2}}$ ,  $T_c$ ,  $T_s$  – Schubspannungsintensität des aktuellen Spannungszustandes, Grenzwert für reinen Schub und Grenzwert für die aktuellen Spannungsverhältnisse;  $I_{D2} = -\frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) - 2$ . Invariante des Spannungsdeviators mit  $\sigma = I_1/3$  und

$I_1 = \sigma_{kk} - 1$ . Invariante des Spannungstensors.

Als grundlegende physikalische Abhängigkeit der Deformationstheorie von Geniev gilt:

$$T = G(\Gamma) \Gamma \quad (4)$$

Dabei wird angenommen, daß  $G(\Gamma)$  eine lineare Funktion der Schubverzerrungsintensität ist.

$$G(\Gamma) = G_0(1 - \Gamma/(2\Gamma_s)) \quad (5)$$

Die Volumendeformation  $\vartheta = J_1$  ergibt sich zu

$$\vartheta = \vartheta_\sigma + \vartheta_\Gamma = \sigma/K(\Gamma) + g_0 \Gamma^2 \quad (6)$$

Darin sind

$$K(\Gamma) = K_0(1 - \Gamma/(2\Gamma_s)) \quad (7)$$

– der Volumendeformationsmodul;  $g_0$  der Dilatationsmodul;  $\vartheta_\Gamma$ -Dilatation (Volumenvergrößerung infolge Gefügeauflockerung bei der Rißbildung).

Die Verminderung von  $K$  mit zunehmender Schubverzerrungsintensität resultiert aus der fortschreitenden Rißenwicklung im Beton. Bei reinem Schub ( $I_1 = 0$ ) ist im Grenzzustand  $\vartheta = \vartheta_c = \vartheta_\Gamma = g_0 \Gamma_c^2$  ( $\vartheta_c$  – Grenzvolumenverzerrung bei reinem Schub). Daher kann der Dilatationsmodul nach der Beziehung

$$g_0 = \vartheta_c / \Gamma_c^2 \quad (8)$$

ermittelt werden. Endgültig werden die in [13] für die Deformationstheorie der Plastizität des Betons vorgeschlagenen SVB wie folgt angegeben:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G(\Gamma)} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) + \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} \quad (9)$$

$\vartheta$  ist aus Gl. (6) zu entnehmen. Dabei wird die Ähnlichkeit und Koaxialität der Spannungs- und Verzerrungsdeviatoren vorausgesetzt. Gl. (9) kann man für  $i=j=1$  umschreiben:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E(\Gamma)} (\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) + \frac{g_0}{3} \Gamma^2 \quad (10)$$

Entsprechend ergeben sich  $\epsilon_{22}$  und  $\epsilon_{33}$  durch zyklisches Vertauschen der Indexe. Dabei wäre für

$$E(\Gamma) = 3G(\Gamma)/(1 + G_0/(3K_0)) \quad (11)$$

und für

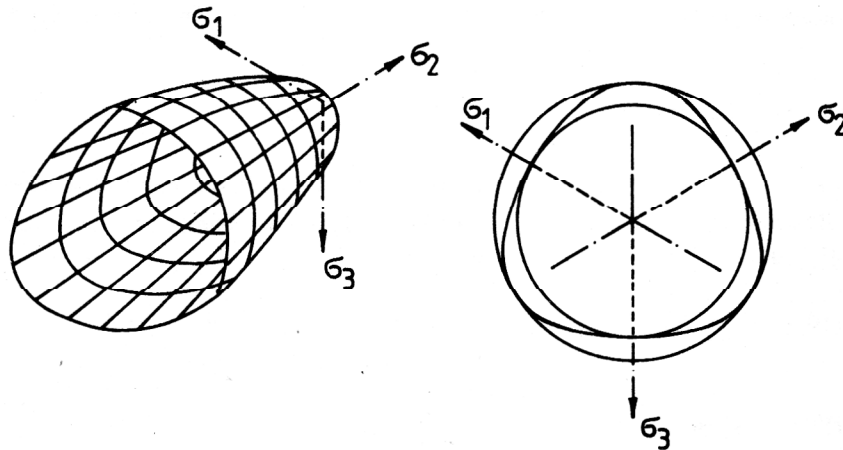
$$\nu = (1 - 2G_0/(3K_0))/(2 + 2G_0/(3K_0)) \quad (12)$$

zu setzen. Die Abhängigkeit zwischen  $G_0$  und  $K_0$  läßt sich angeben, wenn man einen Wert für die Querkontraktionszahl  $\nu$  festlegt. Mit  $\nu = 1/6$  wird  $K_0 = 7G_0/6$  und weiterhin

$$E(\Gamma) = 7G(\Gamma)/3 = E_0(1 - \Gamma/(2\Gamma_s)); \quad E_0 = 7G_0/3; \quad E(\Gamma_s) = E_0/2;$$

Das Bruckkriterium wird in [13] folgendermaßen festgelegt (Bild 1):

$$T^2 - T_c \lambda (1 + \delta) T - T_c^2 (1 + \delta) = 0 \quad (13)$$



**Bild 1**  
Grenzfläche nach Geniev (isometrische Darstellung, Schnitt normal zur Raumdiagonalen)

Darin sind

$$\lambda = -(T_c(R_b - R_{bt})/(R_b R_{bt}))(I_1/(-I_{D2})^{1/2}); \quad \delta = -\frac{\sqrt{3}}{2}(R_b R_{bt}/T_c^2 - 3)(I_{D3}/(-I_{D2})^{3/2}); \quad (14)$$

$R_b$  – Betondruckfestigkeit;  $R_{bt}$  – Betonzugfestigkeit;

$$I_{D3} = \frac{1}{3} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})(\sigma_{jk} - \sigma \delta_{jk})(\sigma_{ki} - \sigma \delta_{ki}) - 3. \text{ Invariante des Spannungsdeviators.}$$

Die Auflösung der Gl. (13) nach  $T$  ergibt

$$T = T_s = T_c k(\lambda, \delta) \text{ mit} \quad (15)$$

$$k(\lambda, \delta) = \lambda(1 + \delta)/2 + \sqrt{\lambda^2(1 + \delta)^2/4 + 1 + \delta} \quad (16)$$

Geniev [13] schlägt vor, die Abhängigkeit zwischen der Grenzs Schubspannungsintensität bei beliebigem Spannungszustand zu der bei reiner Schubbeanspruchung (Gl. (15)) auch für die Schubverzerrungsintensitäten anzuwenden.

$$\Gamma_s = \Gamma_c k(\lambda, \delta) \quad \text{mit } k(\lambda, \delta) \text{ nach Gl. (16).} \quad (17)$$

### 3.2. Zeitabhängige SVB des ungerissenen Betons

Die Verzerrung zur Zeit  $t$  infolge eines vom Zeitpunkt  $t_0$  an wirkenden konstanten Spannungszustandes  $\sigma_{ij}^0$  besteht aus drei Anteilen

$$\epsilon_{ij}(t) = \epsilon_{ij}^m(\sigma_{kl}^0) + \epsilon_{ij}^c(\sigma_{kl}^0, t, t_0) + \epsilon_{ij}^s(t, t_0). \quad (18)$$

Hierin ist  $\epsilon_{ij}^m$  die momentane Reaktion gemäß Abschnitt 3.1,  $\epsilon_{ij}^c$  der Kriechanteil und  $\epsilon_{ij}^s$  der Anteil infolge Schwindens. Die Veränderung der Eigenschaften der momentanen SVB im Laufe der Zeit (z. B. [1], [2], [12]) wird im Sinne der Annahmen des Abschnittes 3.1 vernachlässigt.

Im Kriechanteil wird die Separation infolge des Einflusses des Spannungszustandes und der Zeit vorausgesetzt. Diese Annahme gestattet stets eine ausreichend genaue Approximation und ist in der Literatur über das Betonkriechen üblich [1], [2], [12]:

$$\epsilon_{ij}^c = F_{ij}(\sigma_{kl}^0) \varphi(t, t_0) \quad (19)$$

Dabei wird die Kriechzahl in bezug auf den einachsigen Versuch so definiert, daß

$$\epsilon_{11}^c = F_{11}(\sigma_{11}^0) \varphi(t, t_0) \quad \text{gilt und bei kleinen Spannungen im linearen Grenzfall schließlich } \epsilon_{11}^c = \frac{\sigma_{11}^0}{E_0} \varphi(t, t_0) \quad (20), (21)$$

folgt. Hierin ist  $E_0$  der lineare Elastizitätsmodul der momentanen SVB, der aus Gl. (11) für  $\Gamma = 0$  folgt.

Bei der Verallgemeinerung von Gl. (19) auf Spannungszustände, die sich im Laufe der Zeit verändern, ist zu beachten, daß dabei zwei unterschiedliche Phänomene zu beachten sind.

Einerseits vollzieht sich ein viskoser Prozeß mit ständig zunehmender Viskosität infolge der Aushärtung des Materials. Dieser Prozeß führt auf die Theorie des Alterns [9], [21] und wird durch eine Gleichung des Typs

$$\epsilon_{ij}^{cA} = F_{ij}(\sigma_{kl}(t)) \psi_A(t) \quad (22)$$

beschrieben. Diese Art der Kriechverformung ist irreversibel, und die Kriechneigung nimmt mit dem Alter ab (Bild 2).

Zum zweiten verhält sich der Beton viskoelastisch. Die geeignete Beschreibung ist die Theorie der elastischen Nachwirkung [7], im Sinne der Kategorisierung nichtlinear-viskoelastischer SVB eine Haupttheorie des Kriechens mit der Begründung [18]:

$$\epsilon_{ij}^{cN}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \varphi_N(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} F_{ij}(\sigma_{kl}(\tau)) d\tau = - \int_{t_0}^t F_{ij}(\sigma_{kl}(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_N(t-\tau) d\tau \quad (23)$$

mit der Voraussetzung  $\varphi_N(0) = 0$ . Die Kriechkurven infolge Belastungen, die zu verschiedenen Zeiten aufgebracht werden, sind parallel in Richtung der Zeitachse verschoben (Bild 2). Eine kombinierte Theorie („Nachwirkungstheorie des Alterns“ [2], [8], [12], [19]) setzt beide Teilesetze anteilig voraus:

$$\epsilon_{ij}^c(t, t_0) = - \int_{t_0}^t F_{ij}(\sigma_{kl}(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(t, \tau) d\tau \quad (24)$$

mit

$$\varphi(t, \tau) = k \varphi_A(t, \tau) + (1-k) \varphi_N(t-\tau) \quad (25)$$

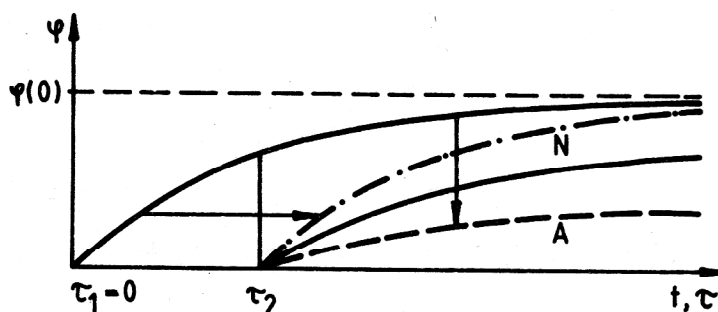


Bild 2  
Kriechkurvenverlauf (A – Theorie des Alterns, N – Theorie der elastischen Nachwirkung)

und

$$\varphi_A(t, \tau) = \int_0^t \psi_A(\Theta) d\Theta - \int_0^\tau \psi_A(\Theta) d\Theta. \quad (26)$$

Für eine bestimmte Referenzkriechzahl

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0(t) \quad (27)$$

gilt unter der Annahme der proportionalen Aufteilung für alle Zeiten

$$\psi_A(t) = \dot{\varphi}_0(t); \quad \varphi_N(t) = \varphi_0(t - t_0). \quad (28), (29)$$

Als einfaches Beispiel sei

$$\varphi_0(t) = \varphi_{\infty} \cdot (1 - e^{-\gamma t}) \quad (30)$$

zu  $t_0 = 0$  angeführt. Dann gilt

$$\psi_A(t) = \varphi_{\infty} \gamma e^{-\gamma t} \quad (31.1)$$

$$\varphi_N(t) = \varphi_{\infty} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (31.2)$$

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_{\infty} (k (e^{-\gamma \tau} - e^{-\gamma t}) + (1 - k) (1 - e^{-\gamma (t - \tau)})) \quad (31.3)$$

Zur Struktur der Tensorfunktion  $F_{ij}(\sigma_{kl})$  in Gl. (19) bzw. (24) wird im allgemeinsten Fall in Übereinstimmung mit den momentanen SVB Isotropie vorausgesetzt:

$$F_{ij} = F_0 \delta_{ij} + F_1 \sigma_{ij} + F_2 \sigma_{ik} \sigma_{kj}. \quad (32)$$

Die Faktoren  $F_k$  sind Funktionen von drei beliebigen, aber unabhängigen Invarianten des Spannungstensors, z. B.

$$F_k = F_k(\sigma, T, I_{D3}). \quad (33)$$

Das einfachste nichtlineare Modell dieses Typs beruht ausschließlich auf dem Einfluß der 2. Invarianten des Spannungsdeviators auf die Gestaltänderung:

$$F_0 = -\frac{\sigma}{2G_0} f(T) \quad (34.1)$$

$$F_1 = \frac{1}{2G_0} f(T) \quad (34.2)$$

$$F_2 = 0 \quad (34.3)$$

und in Anlehnung an [8] kann für die Funktion  $f(T)$  beispielsweise

$$f(T) = 1 + \eta \left(\frac{T}{T_c}\right)^m; \quad m > 1 \quad (35)$$

angesetzt werden. Ist die Schubspannungsintensität  $T$  klein gegenüber  $T_c$ , gilt mit  $f(T) \approx 1$  die lineare Theorie bei InkompRESSibilität.

## 4. Standardformulierung der SVB des Betons

### 4.1. Standardformulierung der momentanen SVB des ungerissenen Betons

Gl. (9) gibt die momentanen SVB des ungerissenen Betons für monotone Belastung nach Geniev an.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G(\Gamma)} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) + \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij}$$

Mit der Festlegung

$$\dot{\underline{\epsilon}} = [\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}, \dot{\gamma}_{12}, \dot{\gamma}_{23}, \dot{\gamma}_{31}]^T$$

wobei  $\dot{\gamma}_{ij} = 2 \dot{\epsilon}_{ij}$

$$\dot{\underline{\sigma}} = [\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}]^T$$

kann man schreiben

$$\underline{B}_\epsilon \dot{\underline{\epsilon}} = \underline{B}_\sigma \dot{\underline{\sigma}}$$

bzw. nach der Auflösung nach den Spannungszuwüchsen, die im Programm auf der Grundlage der Deformationstheorie benötigt wird:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{C} \dot{\underline{\epsilon}} \quad \text{mit} \quad \underline{C} = \underline{B}_\sigma^{-1} \underline{B}_\epsilon \quad (36)$$

Mit Verwendung der Gln. (5) bis (7) sowie  $K_o = 7G_o/6$  geht Gl. (9) über in:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G_o} \frac{\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}}{1 - \Gamma/(2\Gamma_s)} + \left( \frac{2\sigma}{7G_o(1 - \Gamma/(2\Gamma_s))} + \frac{g_o}{3} \Gamma^2 \right) \delta_{ij} \quad (37)$$

Zur Überführung in die differentielle Standardformulierung ist Gl. (37) nach der Zeit abzuleiten (bei den momentanen SVB ist die Zeit eine fiktive Variable).

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2G_o} \frac{(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma} \delta_{ij})(1 - \Gamma/(2\Gamma_s)) - (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})(1 - \Gamma/(2\Gamma_s))'}{(1 - \Gamma/(2\Gamma_s))^2} \\ &+ \left( \frac{2}{7G_o} \frac{\dot{\sigma}(1 - \Gamma/(2\Gamma_s)) - \sigma(1 - \Gamma/(2\Gamma_s))'}{(1 - \Gamma/(2\Gamma_s))^2} + \frac{2}{3} g_o \Gamma \dot{\Gamma} \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (38)$$

Mit Verwendung der Gl. (17) und  $\dot{\Gamma}_s = \Gamma_c \dot{k}(\lambda, \delta)$  findet man

$$(1 - \Gamma/(2\Gamma_s))' = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{J}_{D2}}{\Gamma_s \sqrt{-J_{D2}}} + \frac{\Gamma \Gamma_c}{\Gamma_s^2} \dot{k}(\lambda, \delta) \right)$$

Mit Gl. (16) kann man anschreiben:

$$\dot{k}(\lambda, \delta) = A_1 \dot{\lambda} + A_2 \dot{\delta} = C_1 \dot{I}_1 + C_2 (-\dot{I}_{D2}) + C_3 \dot{I}_{D3}$$

Darin sind

$$C_1 = A_1 B_1 (-I_{D2})^{-1/2}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} A_1 B_1 I_1 (-I_{D2})^{-3/2} - \frac{3}{2} A_2 B_2 (-I_{D2})^{-5/2} I_{D3} \quad N = 2(\lambda^2(1+\delta)^2 + 4(1+\delta))^{1/2}$$

$$C_3 = A_2 B_2 (-I_{D2})^{-3/2} \quad B_1 = -T_c (R_b - R_{bt}) / (R_b R_{bt})$$

$$A_1 = (1+\delta)/2 + \lambda(1+\delta)^2/N \quad B_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} (R_b R_{bt}/T_c^2 - 3)$$

$$A_2 = \lambda/2 + (\lambda^2(1+\delta) + 2)/N$$

Schließlich ergibt sich für die Ableitungen der Verzerrungen der Ausdruck

$$\dot{\epsilon}_{ij} = R(7\dot{\sigma}_{ij} - 3\dot{\sigma}\delta_{ij}) - Q_{ij} \dot{J}_{D2} - U_{ij} (C_1 \dot{I}_1 + C_2 (-\dot{I}_{D2}) + C_3 \dot{I}_{D3}) \quad (39)$$

mit den Abkürzungen

$$R = 1/(14 G_o (1 - \frac{1}{2} \Gamma/\Gamma_s))$$

$$Q_{ij} = (-J_{D2})^{-1/2} ((7\sigma_{ij} - 3\sigma\delta_{ij}) / (28 G_o \Gamma_s (1 - \frac{1}{2} \Gamma/\Gamma_s)^2) + \frac{2}{3} g_o \Gamma \delta_{ij})$$

$$U_{ij} = (7\sigma_{ij} - 3\sigma\delta_{ij}) \Gamma \Gamma_c / (28 G_o \Gamma_s^2 (1 - \frac{1}{2} \Gamma/\Gamma_s)^2)$$

Weiterhin werden die Ableitungen der 1. Invarianten des Spannungstensors, der 2. Invarianten des Spannungs- und des Verzerrungsdeviators und der 3. Invarianten des Spannungsdeviators, die in Gl. (39) vorkommen, gebildet.

$$\dot{I}_1 = \dot{\sigma}_{kk}$$

$$\dot{I}_{D2} = -(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}$$

$$\dot{J}_{D2} = -(\epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\dot{I}_{D3} = D_{ij} \dot{\sigma}_{ij}$$

$$D_{ij} = \frac{\partial I_{D3}}{\partial \sigma_{ij}} = (\sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik}) (\sigma_{kj} - \sigma \delta_{kj}) + \frac{2}{3} I_{D2} \delta_{ij}$$

Die Gl. (39) kann nun in die Form der Gl. (36) überführt werden.

#### 4.2. Standardformulierung der zeitabhängigen SVB des ungerissenen Betons

Die Überführung von Gl. (23) in einen differentiellen Operator erfordert die Approximation der Kriechzahl  $\varphi_N$  als Exponentialreihe. Dieser Prozeß soll am Beispiel (30) demonstriert werden. Aus (23) folgt mit (30)

$$\epsilon_{ij}^{cN} = \int_{t_0}^t F_{ij}(\sigma_{kl}(\tau)) \varphi_{\infty} \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \quad (40)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^{cN} &= -\gamma \int_{t_0}^t F_{ij}(\sigma_{kl}(\tau)) \varphi_{\infty} \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau + F_{ij}(\sigma_{kl}(t)) \varphi_{\infty} \gamma \\ \dot{\epsilon}_{ij}^{cN} &= \varphi_{\infty} \gamma F_{ij}(\sigma_{kl}) - \gamma \epsilon_{ij}^{cN}. \end{aligned} \quad (41)$$

Der Vektor  $\underline{h}$  wird nun durch

$$\underline{h} = [\epsilon_{11}^{cN}, \epsilon_{22}^{cN}, \epsilon_{33}^{cN}, \epsilon_{12}^{cN}, \epsilon_{23}^{cN}, \epsilon_{31}^{cN}]^T \quad (42)$$

aufgebaut. Weiter sei

$$\underline{f}(\underline{\sigma}) = [F_{11}, F_{22}, F_{33}, 2F_{12}, 2F_{23}, 2F_{31}]^T. \quad (43)$$

Dann lautet die Gl. (41) in Matrixschreibweise

$$\dot{\underline{h}} = \varphi_{\infty} \gamma \underline{f} - \gamma \underline{h} \quad (44)$$

Aus Gl. (18) folgt unter Beachtung der Gln. (24) und (25) bei unterdrücktem Schwindanteil

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^m - k \psi_A \underline{f} + (1 - k) \dot{\underline{h}} \quad (45)$$

und schließlich ergeben sich mit Gl. (36) in der Form

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{C} \underline{\dot{\epsilon}}^m \quad (46)$$

die beiden Gleichungssätze

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{C} \underline{\dot{\epsilon}} + k \psi_A \underline{C} \underline{f} - (1 - k) (\varphi_{\infty} \gamma \underline{C} \underline{f} - \gamma \underline{C} \underline{h}) \quad (47.1)$$

$$\dot{\underline{h}} = \varphi_{\infty} \gamma \underline{f} - \gamma \underline{h}. \quad (47.2)$$

Folglich gilt

$$\underline{d} = k \psi_A \underline{C} \underline{f} - (1 - k) \underline{C} \underline{e} \quad (48.1)$$

$$\underline{e} = \gamma (\varphi_{\infty} \underline{f} - \underline{h}) \quad (48.2)$$

$$\underline{d}_T = \underline{0}; \underline{e}_T = \underline{0}; \underline{B} = \underline{0} \quad (48.3)$$

und  $\underline{C}$  wird dem Geniev-Modell entsprechend Abschnitt 4.1. entnommen. Der verbleibende Teil der Standardformulierung lautet

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{C} \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{d} \quad (49.1)$$

$$\dot{\underline{h}} = \underline{e}. \quad (49.2)$$

#### LITERATUR

- [1] Александровский, С. В.: Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. — Москва: Стройиздат. 1973.
- [2] Арутюнян, Н. Х.: Некоторые вопросы теории ползучести. — Москва: Гостехиздат. 1952.
- [3] Bergander, H.: Einheitliches Konzept der Gleichungen des nichtlinear-inelastischen Materialverhaltens für FEM-Programmentwicklungen. — In: Vorträge zum Problemseminar „Finite Elemente II“. — TU Dresden 1977. — S. 206 — 225.
- [4] Bergander, H.: Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung. — In: ZAMM. — 60 (1980). — S. 509 — 519.
- [5] Bergander, H.: Zur Formulierung von Materialgleichungen in FEM-Programmen. — 2. Weiterbildungsseminar „Schiffsfestigkeit“, WPU Rostock 1983, — S. 203 — 221.
- [6] Berndt, E.: Die Darstellung der räumlichen Kriech- und Relaxationserscheinungen des Betons durch die elastisch-viskoelastische Analogie und spezielle Anwendungsmöglichkeiten bei mehrachsigen Spannungszuständen. — 1981. — 154 S. Dresden, TU, Diss. B.

- [ 7 ] Boltzmann, L.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. – Wien, Berlin, 10, 1974 .
- [ 8 ] Бондаренко, В. М.; Бондаренко, С. В.: Инженерные Методы нелинейной теории железобетона. – Москва: Стройиздат. 1982. – 287 стр.
- [ 9 ] Dischinger, F.: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. – In: Bauingenieur. – Berlin 18 (1937), S. 487, S. 520, 20 (1939), S. 53, S. 63 .
- [10] Здоренко, В. С.: Расчет железобетонных балок-стенок с учетом деформаций ползучести и усадки бетона МКЭ. – В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев, вып. 33 /1978/. – стр. 61 – 65 .
- [11] Eibl, J.: Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton. – In: Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 260, Berlin, 1976. – 335 S.
- [12] Гвоздев, А. А.: Ползучесть бетона и пути его исследования. – В сб.: Исследование прочности и ползучести строительных материалов. – Москва: Госстройиздат, 1955.
- [13] Гениев, Г. А.; Киссюк, В. Н.; Тюпин, Г. А.: Теория пластичности бетона и железобетона. – Москва: Стройиздат. 1974. – 316 стр.
- [14] Козак, А. Л.: Некоторые результаты численного моделирования разрушения железобетонных конструкций в условиях трехосного напряженного состояния. – Киев, КИСИ, 1980. – 19 стр.
- [15] Козачевский, А. И.; Зячин, А. М.: Исследование параметров нелинейности дилатационной модели деформационной теории пластичности бетона. – В кн.: Статика и динамика сложных строительных конструкций. – Межвуз. темат. сб. трудов. – Ленинград, ЛИСИ, 1982. – стр. 38 – 46.
- [16] Köppler, H.: Die rechnerische Erfassung der rheologischen Betoneigenschaften. – In: Wiss. Zeitschr. d. HAB Weimar. – Weimar 16 (1969) 6, – S. 521 – 524 .
- [17] Kupfer, H.: Mehrachsige Beanspruchung und Untersuchungsmethoden des Betons. – In: WZ d. TU Dresden. – Dresden 16 (1968) 6. – S. 1515 – 1518 .
- [18] Persoz, V.: Le principe de superposition de Boltzmann Cahier. – Groupe franritudes rhicl. 1957 .
- [19] Прокопович, И. Е.: Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. – Москва: Госстройиздат. 1963. – 260 стр.
- [20] Sektion Maschinen-Bauelemente: Anwendungsbeschreibung und Programmierschrift für das Programm NIMAV. – TH Karl-Marx-Stadt, 1983. – 38 S.
- [21] Whitney, C. S.: Plain and Reinforced Concrete Arches. – In: Journ. Amer. Concr. Inst. N 7, 1932 .