

# Wege und Ziele der Konzepte in der Bruchmechanik<sup>1)</sup>

H. G. Hahn

## 1. Einleitung

Der Bruch ist eine der interessantesten Erscheinungen in der Festkörpermechanik, indes sind die dabei auftretenden physikalischen Vorgänge noch nicht restlos geklärt. Die Bruchmechanik, die heute eine sehr ausgedehnte Disziplin ist, beschäftigt sich mit den ingenieurmäßigen Aspekten des Bruchgeschehens. Es wird die Haltbarkeit bzw. Lebensdauer angerissener Bauteile untersucht, wobei gegenüber den konventionellen Betrachtungen des Versagens neue Gesichtspunkte herangezogen werden. Die Bruchmechanik wurzelt in der 1920 entwickelten Theorie von Griffith für den Bruch ideal spröder Körper. Danach hängt der Bruchvorgang mit dem Verhalten von Rissen in festen Körpern zusammen. Die stets in Bauteilen vorhandenen Risse (oder Defekte) sind die Ansatzstellen für das Weiterreißen, das dann zur vollständigen Trennung führen kann.

In der theoretischen Behandlung wird das Wachstum eines vorhandenen Risses energetisch betrachtet. Als grundlegend gilt die wohlbekannte Formel von Griffith

$$\sigma \sqrt{a} = \text{konst.} \quad (1)$$

wobei  $\sigma$  die äußere Spannung und  $a$  die Rißlänge bedeuten.

Die Theorie liefert den Instabilitätspunkt, bei dem sich ein Riß unkontrolliert ausbreiten kann. Zugrundegelegt ist vollkommen sprödes Materialverhalten (d. h. keine plastischen Verformungen) und die Berechnung wird linear-elastisch ausgeführt.

Die Bedürfnisse der Technik führten zu einer Wiederaufnahme der Griffithschen Ideen etwa ein Vierteljahrhundert später durch Orowan, Irwin u. a. (Literaturhinweise auf diese grundlegenden Arbeiten finden sich z. B. in [1] oder [2]). Schwierigkeiten ergaben sich bei der Anwendung der Theorie auf metallische Werkstoffe, z. B. Stahl. Aus Erweiterungen der Annahmen von Griffith entstand die Linear-elastische Bruchmechanik (LEBM), die eine gewisse stürmische Entwicklung erfuhr und zu beachtlichen praktischen Erfolgen führte. Die Anwendungen fußen auf einer Anzahl verschiedener Konzepte, die unterschiedliche Wege gehen und die im Lauf der Zeit gewissen Modifikationen unterworfen wurden. Das Hauptziel bleibt dabei immer die Vorhersagbarkeit des instabilen Sprödbruchs. Weitere Fragen betreffen die langsame (unterkritische) Rißverlängerung, z. B. bei Ermüdungsbelastung, ferner den Rißfortschritt und die Rißablenkung im Fall überlagerter Beanspruchungen.

Im Verlauf der vergangenen 10 bis 15 Jahre haben sich bestimmte Zweifel an der Allgemeingültigkeit der verschiedenen, z. T. rivalisierenden, Konzepte ergeben, nicht zuletzt durch eine immer mehr erweiterte Experimentiertechnik. Die grundlegenden Konzepte weisen Un-

sicherheiten auf und sind Wandlungen unterworfen. Die endgültige Klarstellung der theoretischen Grundlagen wird erst die zukünftige Forschung erbringen müssen.

## 2. Die wichtigsten Konzepte der LEBM

Die vier wichtigsten Konzepte der LEBM, die in den letzten 30 Jahren entwickelt wurden, sind in Tafel 1 zusammengestellt. Sie gehen von der elastischen Rißtheorie in Zusammenhang mit den energetischen Umsetzungen beim Beginn des Rißfortschritts aus.

### 2.1. Energiefreisetzung an der Rißspitze und Spannungsintensitätsfaktoren

Die von Irwin vorgenommene Erweiterung der Bruchtheorie spröder Körper besagt, daß die bei einer Rißverlängerung freigesetzte Energie für den Rißfortpflanzungsvorgang insgesamt verfügbar ist. Bruch soll demnach eintreten, wenn an einer Rißspitze für die Spannungen und Verzerrungen eine kritische Kombination vorliegt. Der physikalische Trennvorgang spielt sich in der engeren Umgebung einer Rißspitze ab, die man heute allgemein als Prozeßzone bezeichnen kann. Von Irwin wurde die Energiefreisetzungsrate

$$\mathcal{G} = \left| \frac{\partial U}{\partial a} \right| \quad (2)$$

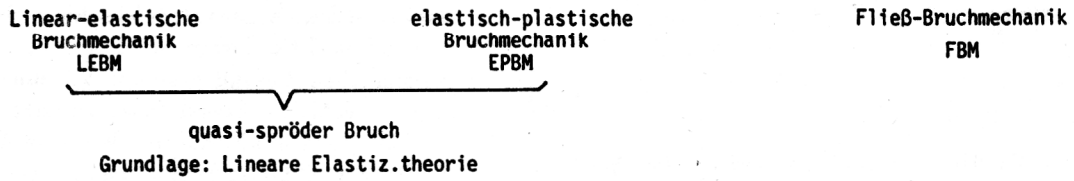
als eine neue Materialeigenschaft eingeführt, die sich aus den Gegebenheiten an einer Rißspitze berechnen läßt. Bei instabiler Rißvergrößerung, die den Bruchbeginn charakterisiert, nimmt  $\mathcal{G}$  einen kritischen Wert  $\mathcal{G}_c$  an, der experimentell ermittelt werden muß. Dies ist das älteste und zugleich fundamentale Konzept der LEBM. Von Irwin wurde die Größe  $\mathcal{G}$  auch als Rißausbreitungskraft interpretiert.

Zur Beschreibung der Gegebenheiten an einer Rißspitze wurde (fußend auf asymptotischen elastizitätstheoretischen Lösungen [3] bzw. den Rißeigenfunktionen von Williams [4]) das sogenannte Rißnahfeld eingeführt. Mit der Einteilung der möglichen Rißverformungsarten in drei sogenannten Moden I, II und III ergibt sich die Spannungsverteilung in unmittelbarer Umgebung der Rißspitze (vgl. Bild 1)

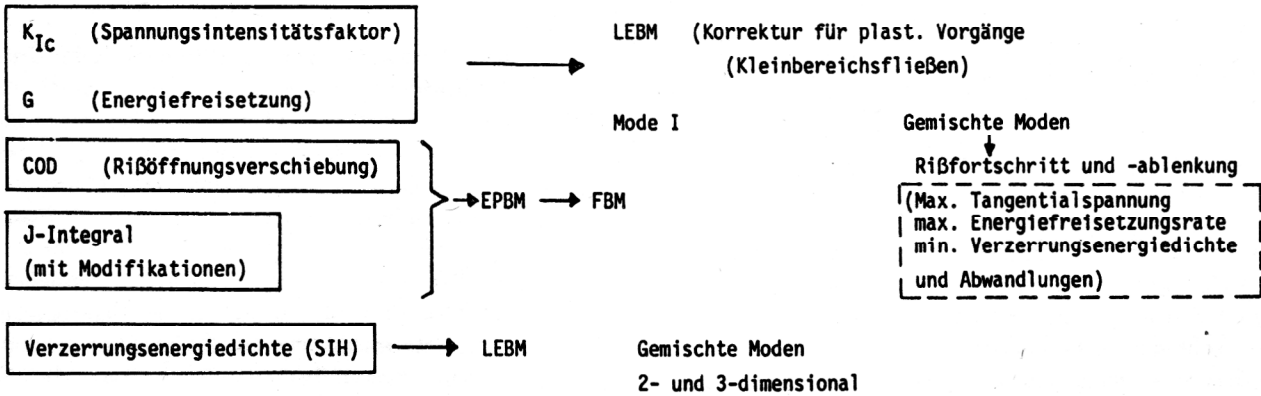
$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{ij}^I(\varphi) + K_{II} f_{ij}^{II}(\varphi) + K_{III} f_{ij}^{III}(\varphi)] \quad (3)$$

1) Erweiterte Fassung eines Vortrags auf dem VII. Symposium „Verformung und Bruch“ 1985 Magdeburg. Herr Prof. Dr. Dr. Heinz Neuber zum 80. Geburtstag gewidmet.

**Tafel 1**  
Übersicht über die wichtigsten Konzepte der Bruchmechanik und ihre Anwendungsbereiche

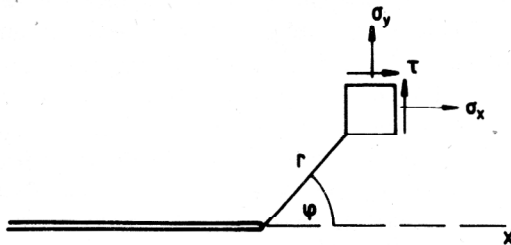


Wichtigste Konzepte



Weitere Konzepte:

R-Kurve (mit  $G$  oder  $K_{Ic}$  bzw.  $J_c$ ), Äquivalente Energiemethode, Nichtlineare-Energiemethode, 2-Parameter-Konzept (NEWMAN), COA (Rißöffnungswinkel), Final-Stretch (WNUK) u.a.



**Bild 1**  
Polarkoordinaten und Spannungskomponenten an einer Rißspitze

Die dimensionslosen Funktionen  $f_{ij}(\varphi)$  hängen nur vom Winkel  $\varphi$  ab. Die sogenannten Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I, K_{II}, K_{III}$  hingegen sind von  $r$  und  $\varphi$  unabhängig. Sie beschreiben gewissermaßen die „Stärke“ des Rißnahfelds und sind kennzeichnende Parameter der Verhältnisse an einer Rißspitze. Ganz entsprechend lassen sich die Verschiebungskomponenten an einer Rißspitze darstellen.

Charakteristisch für die LEBM ist die Spannungssingularität  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  an der Rißspitze. Im allgemeinen Fall wird der Ausdruck für die Spannungskomponenten durch nicht-singuläre Terme erweitert.

Aufgrund linear-elastischer Rechnungen (mit dem reversiblen Rißschließungsmodell) ergibt sich nach Irwin der Zusammenhang

$$K^2 = G E \quad (\text{ebener Spannungszustand ESZ}) \quad (4)$$

$$K^2 = G \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{ebener Verzerrungszustand EVZ})$$

Für das Eintreten der Instabilität (d. h. den Bruchbeginn) ist dann, beim bisher meist betrachteten Mode I-Fall

$$K_I = K_{Ic} \quad (5)$$

Die experimentell zu ermittelnde Größe  $K_{Ic}$  für EVZ wird als Rißzähigkeit (Fracture Toughness) bezeichnet und stellt sich als geometrieunabhängige Materialkenngröße dar.

Vorausgesetzt ist dabei, daß sich der Riß bei Mode I in seiner eigenen Richtung ausbreitet. Bei überlagerter Beanspruchung (sogenannte gemischte Moden) ist dies nicht mehr zutreffend, hier tritt eine Rißablenkung auf (vgl. Abschnitt 2.5.).

2.1.1. Erweiterung des  $K_{Ic}$ -Konzepts zur Erfassung von Rißspitzenplastizität

Das Auftreten plastischer Zonen in mäßigem Umfang an einer Rißspitze (sogenanntes Kleinbereichsfließen) kann durch entsprechende Korrekturen erfaßt werden. Hierzu

wurden von Irwin [5] verschiedene Möglichkeiten der Abschätzung vorgeschlagen. Sie führen zur Definition einer effektiven Rißlänge

$$a_{\text{eff}} = a + r_{\text{pl}}^*$$

$$\text{mit } r_{\text{pl}}^* = \frac{a}{2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_F} \right)^2 \quad (6)$$

wobei  $a$  die wirkliche Rißlänge und  $\sigma_F$  die einachsige Fließspannung bedeuten. Für einen sogenannten Griffith-Riß (Riß der Länge  $2a$  in einer unendlichen Scheibe bei Zug) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} K &= \sigma \sqrt{\pi a_{\text{eff}}} = \sigma \sqrt{\pi a \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_F} \right)^2 \right]} \\ &= \sigma \sqrt{\pi \left( a + \frac{K^2}{2\pi\sigma_F^2} \right)} \end{aligned} \quad (7)$$

Die grundlegenden Beziehungen der LEBM sind damit weiterhin anwendbar und das damit geschaffene Konzept von Irwin hat sich für hochfeste, spröde Werkstoffe als sehr brauchbar für praktische Zwecke erwiesen.

Es darf indes nicht außerachtgelassen werden, daß den von Irwin vorgeschlagenen Modifizierungen letztlich nur eine „Elastisierung“ der elastisch-plastischen Verhältnisse an einem Riß zugrundeliegt. Vom theoretischen Standpunkt aus bleibt dies sehr unbefriedigend.

Weitere analytische Möglichkeiten ergeben sich durch verbesserte Rißmodelle, z. B. von Barenblatt [6] mit glatt schließenden Rißflanken und der Einführung einer „autonomen“ Endzone mit Kohäsivkräften. Die Simulation der plastischen Zone an einer Rißspitze erfolgt im elastisch-plastischen Rißmodell von Dogdale [7], das eine Beseitigung der Spannungssingularität an der Rißspitze beinhaltet. Verwandte Lösungen sind das Versetzungs-Rißmodell von Bilby et. al. [8]. Wie Broberg ausführlich diskutiert (z. B. [9]), lassen sich die verschiedenen Konzepte der LEBM gemeinsam unter dem Barenblatt-schen Prinzip der autonomen Endzone eines Risses, für das sich mittlerweile der Begriff der Prozeßzone eingebürgert hat, einordnen.

### 2.1.2. Rißwiderstand

Im Zusammenhang mit der Ermittlung der Rißzähigkeit für quasi-spröden Bruch von Metallen taucht das Konzept der Rißwiderstandskurve (R-Kurve) auf. Bereits in der Interpretation der Griffith-Theorie kann der Energiefreisetzungsrates die zur Rißerweiterung erforderliche Energie gegenübergestellt werden. Diese wird als Rißwiderstand (oder Rißwiderstandskraft) bezeichnet und entspricht im Fall ideal-spröder Körper der Oberflächenenergie.

Im Anwendungsbereich der LEBM bedeutet der Rißwiderstand hauptsächlich plastische Verzerrungsenergie. Bekanntlich tritt vor Erreichung der Instabilität eines Risses ein langsames, stabiles Rißwachstum auf (unterkritisches Rißwachstum). Der Energiefreisetzungsrates  $\mathcal{G}$  wirkt dabei ein zunehmender Widerstand (herrührend vom Material an der Rißspitze) entgegen, der durch die

sogenannte Rißwiderstandsrate  $R$  charakterisiert ist. In duktilem Material entspricht dies der Arbeit zur Bildung einer neuen plastischen Zone an der Rißspitze. Nach dem allgemeinen Energiekonzept herrscht während des stabilen Rißwachstums stets Gleichheit von freigesetzter und verbrauchter Energie, d. h.  $\mathcal{G} = R$ . Gemäß dem experimentellen Befund wachsen bei zunehmender Rißlänge sowohl die Energiefreisetzungsrates als auch der Rißwiderstand in nichtlinearer Weise an. Die Erreichung der Rißinstabilität ist dann durch die Bedingung

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (8)$$

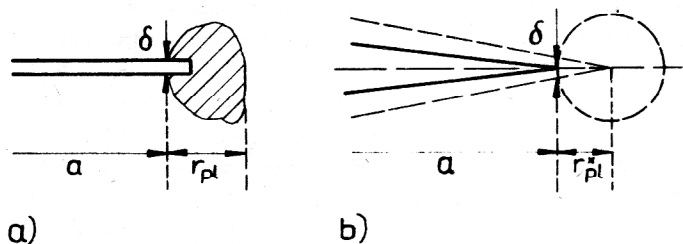
gegeben.

Ursprüngliche Vorschläge über die Abhängigkeit der Größe  $R$  (sog. Rißwiderstandskurve) stammen von Krafft et. al. [10] und Srawley et. al. [11]. Später wurde eine semiempirische Darstellung der R-Kurve von Broek [12] angegeben. Im übrigen kann die R-Kurve jedoch nur aus Experimenten ermittelt werden, es wurden auch Standardtestmethoden der ASTM aufgestellt [13]. Da die Bedeutung der R-Kurve noch nicht völlig klar ist, bestehen heute Zweifel, ob diese für ein bestimmtes Material von der Belastungsart unabhängig ist. Demzufolge scheint eine universelle Anwendbarkeit des R-Konzepts bis heute noch nicht genügend gesichert.

### 2.2. Rißöffnungsverschiebung (CTOD- bzw. COD- oder COS-Konzept)

Das Konzept ist als erster Versuch anzusehen, ein Kriterium für die Brucheinleitung für halb-spröden oder duktilen Bruch, d. h. bei mäßigem bis ausgedehntem Fließen an der Rißspitze, zu gewinnen. Der Bruchbeginn soll unter Bedingungen erfolgen, die zu einem bestimmten Verformungsgrad an der Rißspitze führen. In einem duktilen Material geht im allgemeinen für einen vorhandenen Riß einer weiteren Vergrößerung desselben eine Rißabstumpfung voraus. Der experimentelle Befund zeigt, daß die Öffnung oder Aufweitung eines Risses als ein Maß für die geleistete Arbeit angesehen werden kann, um den Riß voranzutreiben. Diese Idee wurde erstmals 1961 von Wells [14] fußend auf linear-elastischen Betrachtungen formuliert und war gedacht als ein brauchbares Kriterium für den Übergang zu einer Fließbruchmechanik.

In Bild 2 sind der reale Fall und das Modell der Rißspitze dargestellt.



**Bild 2**  
Plastische Zone an einer Rißspitze und formale Definition der Rißöffnungsverschiebung (CTOD): a) tatsächliche Situation, b) Modell

Die formale Definition der Rißöffnungsverschiebung nach Wells lautet

$$\delta = 2\pi r_{pl}^* \frac{\sigma_F}{E} \quad (9)$$

wobei  $r_{pl}^*$  der Irwischen plastischen Rilngenkorrektur [vgl. (6)] entspricht. Unter Verwendung des Spannungsintensitätsfaktors der LEBM gilt dann

$$\delta = \frac{K^2}{E \sigma_F} = \frac{\mathcal{G}}{\sigma_F} \quad (10)$$

Im Gültigkeitsbereich der LEBM besteht ein direkter Zusammenhang zwischen dem COD- und dem  $\mathcal{G}$ - bzw. K-Konzept. Man kann erwarten, daß durch die kritischen Werte  $\mathcal{G}_c$  bzw.  $K_c$  ein kritischer Wert  $\delta_c$  festgelegt ist, der dann dem Zustand bei Beginn der Rißvergrößerung entspricht.

Mit den erweiterten Rimodellen vom Barenblatt-Dugdale-Typ ergibt sich ebenfalls

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{8 \sigma_F a}{\pi E} \ln \sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_F} \\ &\approx \frac{8 \sigma_F a}{\pi E} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_F} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (11)$$

woraus wieder die Beziehung (10) folgt.

Zeitweilig wurde die kritische Rißöffnungsverschiebung als Ergebnis eines technologischen Tests angesehen, der Information über die Duktilität des Materials an einer Rißspitze und damit eine qualitative Aussage über den Widerstand gegen Bruchbeginn liefert.

Das heutige COD-Konzept beruht auf der weitergehenden Annahme

$$\delta = \alpha \frac{\mathcal{G}}{\sigma_F} \quad (12)$$

mit  $0.5 < \alpha < 1.0$

wobei diese Beziehung auch außerhalb des Kleinbereichsfließens gelten soll. Aus neueren Versuchsergebnissen ist zu erkennen, daß  $\delta_c$ -Werte, die für den Beginn der Rißvergrößerung ermittelt werden, als brauchbare Materialkenngröße (mit geringer Probenabhngigkeit) verwendet werden können. Es bestehen jedoch sowohl theoretische als auch experimentelle Schwierigkeiten bei der Anwendung des Konzepts. Zunächst ist unklar, was kritische COD-Werte bedeuten und ob damit der Zustand der instabilen Rißausbreitung im Rahmen einer Fließbruchmechanik erfaßt werden kann. Außerdem ist der Zusammenhang (12) rein empirisch und die Übertragbarkeit von Laborversuchen auf die Wirklichkeit ist keineswegs gesichert.

Die  $\delta$ -Messungen sind (wegen der Kleinheit der Werte) nicht nur sehr schwierig durchzuführen, es ergeben sich auch Probleme bei der Definition der Rißlänge und der Stelle am Riß, wo COD gemessen werden soll. Auch der Dickeneinflu der Proben spielt eine noch ungeklärte Rolle. Neuerdings wird empfohlen, einen kritischen Wert  $\delta_0$  beim Beginn der Rißvergrößerung zu definieren. Der Zustand der völligen Instabilität wird dadurch aber nicht erfaßt. Es kommen immer wieder neue Vorschläge zur Definition und Ermittlung der kritischen Rißöffnungsverschiebung.

Trotz der Zweifel an der physikalischen Realität und des Mangels einer geeigneten Definition gehört das COD-Konzept heute zu den wichtigsten Verfahren in der EPBM und der FBM. Von praktischem Vorteil ist die Möglichkeit, an kleinen Proben messen zu können, und es liegen auch bereits Vorschläge zur Normung der Tests (ASTM-, britische und schweizerische Normen) vor.

### 2.3. Wegunabhngige Integrale (J-Integral Konzepte mit Modifikationen)

Wie wohl ursprünglich für den (linearen oder nichtlinearen) elastischen Fall aufgestellt, liefert das J-Integral-Konzept eine erfolgversprechende Erweiterung der LEBM in den elastisch-plastischen Bereich und auch darüber hinaus. Wichtig für die praktischen Anwendungen ist die Möglichkeit, zur Bestimmung der Rißzähigkeit Versuche an vhm. kleinen Proben vorzunehmen.

Eine ausführliche Übersicht über die Anwendungen in der Bruchmechanik wurde z. B. von Munz [15] gegeben, eine gründliche zusammenfassende Darstellung, die auch die verschiedenen Verallgemeinerungen berücksichtigt, stammt von Michel und Totzauer [16].

Den gemeinsamen Hintergrund der Anwendung wegunabhngiger Integrale bilden Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik in Form von Oberflächenintegralen. Sie lassen sich aus der Translations- und Rotationsinvarianz der kontinuumsmechanischen Bilanz-Gleichungen (Massen- und Energie- und Impulsbilanz) herleiten [17]. Spezielle Erhaltungssätze der Elastizitätstheorie wurden von Eshelby [18] und Günther [19] aufgestellt.

Als Grundlage dafür gilt ein berühmter allgemeiner Satz von Emmy Noether [20], dessen Anwendung auf die Erhaltungssätze der Physik führt. Eine vereinheitlichende Darstellung der verschiedenen Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik stammt von A. Golebiewska-Herrmann [21].

#### 2.3.1. Rice-Integral

Die erstmalige Anwendung eines wegunabhängigen Integrals in der Bruchmechanik kann Rice [22] zugeschrieben werden. Unabhängig von den erwähnten allgemeinen Formulierungen gelangte er zu einer Darstellung der Irwischen Rißausbreitungskraft (Energiefreisetzungsrate) durch ein wegunabhngiges Integral<sup>2)</sup> um die Rißspitze.

Mit Bezug auf Bild 3 gilt, daß das Linienintegral

$$J = \int_{\Gamma_1} (\bar{U} dy - \vec{\sigma} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds) \quad (13)$$

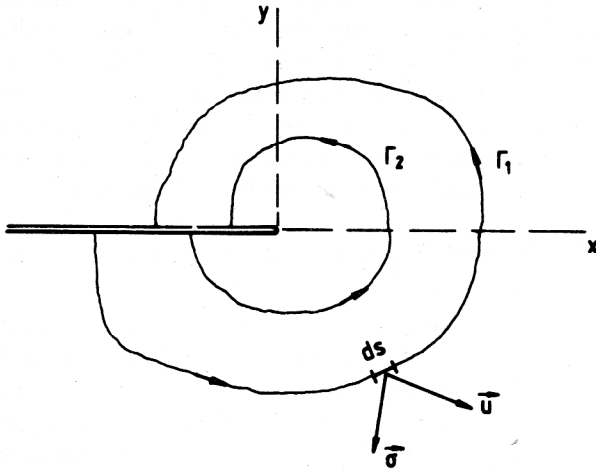
mit  $\vec{\sigma}$  bzw.  $\vec{u}$  als Spannungs- bzw. Verschiebungsvektor und

$$\bar{U} = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (14)$$

als elastischer Energiedichte vom Integrationsweg  $\Gamma_1$  oder  $\Gamma_2$  unabhängig ist. Das derart definierte J-Integral

2) Eine gleichwertige Darstellung wurde von Cherepanov [23] angegeben.





**Bild 3**  
Integrationswege beim Rice-Integral um eine Rispspitze

liefert somit einen Rispspitzenparameter, der auf einem beliebigen Integrationsweg  $\Gamma$  aus den Bedingungen fern der Rispspitze berechenbar ist.

Im linear- oder nichtlinear elastischen Fall ergibt sich der Wert von  $J$  als die Energie, die an der Rispspitze zur Risfausbreitung zur Verfügung steht, d. h. im Rahmen der LEBM gelten

$$J = \mathcal{G} = \left| \frac{\partial U}{\partial a} \right| \quad (15)$$

bzw. für ebenen Spannungszustand

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} \quad (16)$$

Als Bruchkriterium kann damit (für Mode I) gelten

$$J_c = \mathcal{G}_c = \frac{K_c^2}{E} = \delta_c \sigma_F \quad (17)$$

womit der Zusammenhang mit dem K-Konzept und dem COD-Konzept im Rahmen des Kleinbereichsfließens angedeutet ist (vgl. [24] und [25]).

Mit dem J-Integral läßt sich demnach eine verallgemeinerte Beziehung für die Energiefreisetzungsrate bei Risfausbreitung gewinnen. Als mögliches Kriterium spielt dabei  $J$  insbesondere zur Festlegung des Beginns der stabilen Risfausbreitung (durch einen kritischen  $J_c$ -Wert) eine Rolle.

Der Wert von  $J$  ist auch einer (allerdings sehr aufwendigen) experimentellen Bestimmung zugänglich. Damit eröffnet sich eine Möglichkeit, aus Messungen an kleinen Proben (bei denen die LEBM-Testnormen nicht mehr anwendbar sind) über  $J_{Ic}$  auf die Risfzähigkeit  $K_{Ic}$  zu schließen.

Die Wegunabhängigkeit des J-Integrals ist in guter Näherung auch gegeben bei Rispspitzenplastizität (bei Kleinbereichsfließen), bei nicht-linearen Elastizitätsgesetzen (sogenannte Deformationstheorien der Plastizität) und ebenso für ausgedehntes plastisches Fließen (im Rahmen einer Fließtheorie der Plastizität). Obwohl eine gesicherte Grundlage für die Anwendung von  $J$  bei ausgedehntem plastischen Fließen bisher fehlt, gibt es dennoch experimentelle und rechnerische Hinweise für die

Brauchbarkeit. Allerdings ist die physikalische Bedeutung einer Energiefreisetzungsrate (wie im Bereich der LEBM) für das J-Integral bei ausgedehntem plastischen Fließen nicht mehr gegeben. Ohne vollständige Lösungen für Risprobleme im elastisch-plastischen Fall beruhen die derzeitigen Anwendungen des J-Integrals als Bruchparameter nur auf experimentellen Untersuchungen.

Beiläufig sei hier erwähnt, daß auch Näherungsformulierungen zur Ermittlung von  $J$  gegeben sind. Beispielsweise sind in den am Lehrstuhl für Technische Mechanik der Universität Kaiserslautern entwickelten Finite-Element-Programmsystemen NOLIFE [26] und ELADYN [27] bruchmechanische Prozessoren zur numerischen Berechnung des J-Integrals implementiert.

Eine gegenüber (13) allgemeinere Darstellung des J-Integrals liefert für zweidimensionale Probleme den vektoriellen Ausdruck (mit den Vereinbarungen der Tensor Schreibweise)

$$J_k = \int_{\Gamma} (\bar{U} n_k - \sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}) ds \quad (i, k = 1, 2) \quad (18)$$

d. h. für das ursprüngliche J-Integral gilt  $J = J_1$ .

Über die physikalische Interpretation der zweiten Komponente  $J_2$  und deren Wegunabhängigkeit sind zahlreiche Diskussionen noch in Gang (vgl. z. B. [28]).

Wie bei vielen Darstellungen gibt es auch zum J-Integral eine duale Darstellung, ein Linienintegral

$$I = \int [-\bar{U} dx_2 + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} n_j] ds \quad (19)$$

wurde von Bui [29] formuliert und die Wegunabhängigkeit nachgewiesen. Die elastische Energiedichte ist durch die Spannungen ausgedrückt, d. h. es gilt

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (20)$$

Verallgemeinerungen des J-Integrals zu dreidimensionalen Darstellungen wurden ebenfalls angegeben, z. B. [30], [31]. Man erkennt, daß sich weitreichende Erweiterungen des ursprünglichen J-Integralkonzepts ergeben können, die auf eine gewisse Universalität solcher Kriterien schließen lassen und die sich aus den bereits erwähnten Erhaltungssätzen ergibt.

Zunächst sei noch hervorgehoben, daß die Anwendung des J-Integrals für Mode I beschränkt bleibt. In praktischen Anwendungen handelt es sich oftmals um eine Überlagerung von Mode I + II („mixed mode“) und hierbei muß zur Anwendung des J-Integralkonzepts eine entsprechende Aufspaltung vorgenommen werden. Für reine Mode I bzw. Mode II Belastungen ist eine separate Berechnung von  $J_I$  bzw.  $J_{II}$  möglich, beide Integrale erweisen sich als wegunabhängig im linear-elastischen Verformungsfeld eines elastisch-plastischen Materials.

Eine Möglichkeit zur Dekomposition des J-Integrals bei gemischter Mode I + II wurde von Ishikawa et. al. [32] angegeben. Ausgehend von symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Verformungen bei Mode I bzw. Mode II werden die Feldgrößen auf dem Integrationsweg zur Be-

rechnung ebenfalls in Anteile zerlegt, die den Moden entsprechen (z. B.  $\sigma_{ij}^I, \sigma_{ij}^{II}$  etc.).

Es ergibt sich dann als wegunabhängiges Integral

$$J_{MN} = \int [\bar{U}_{MN} dx_2 - \vec{\sigma}^M \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} ds] \quad (M, N = I, II) \quad (21)$$

bzw. die Aufspaltung

$$J = J_{II} + J_{IIII} = J^I + J^{II}. \quad (22)$$

Im linear-elastischen Fall sind die beiden Integrale den entsprechenden Spannungsintensitätsfaktoren

$$J^I = \mathcal{G}_I = \frac{1+\kappa}{8G} K_I^2 \text{ usw.} \quad (23)$$

zugeordnet.<sup>3)</sup>

Die Anwendung dieser Aufteilung erfolgte für statische als auch dynamische Rißprobleme, vgl. [27]. Auf alternative Konzepte zur Behandlung von Problemen bei gemischten Moden wird später (Abschnitt 2.5.) noch einmal eingegangen.

### 2.3.2. Erweiterungen und Modifikationen des J-Integralkonzepts

Es sind inzwischen zahlreiche Modifikationen bekanntgeworden, die Vorteile über die ursprünglichen Formulierungen des J-Konzepts bringen sollen. Sie weichen aber von der einfachen Form eines Linienintegrals ab, es treten zusätzliche Flächenintegrale hinzu. Einige dieser Formulierungen, die zum Teil schon den Konzepten der elastisch-plastischen und der Fließbruchmechanik zuzuschreiben sind, werden hier angeführt.

Hier ist zunächst das wegunabhängige  $\hat{J}_k$ -Integral nach Kishimoto, Aoki, Sakata [33] zu nennen. Es ist eine Größe, die mit Energiefreisetzungsraten bei Verformungen der sogenannten Prozeßzone an einem Riß in elastisch-plastischem Material verknüpft ist. Diese Bruch-Prozeßzone (oder Endzone) an der Rißspitze, die kontinuumsmechanisch nicht erfassbar ist, spielt im Zusammenhang mit dem Autonomieprinzip für eine Rißspitze (vgl. [9]) eine wesentliche Rolle.

Im elastischen Fall stimmt das  $\hat{J}_1$ -Integral mit dem Rice-Integral  $\hat{J}$  überein. Das J-Integral kann auch für ein Thermospannungsfeld angewendet werden [34], und es zeigt sich eine Ähnlichkeit mit dem wegunabhängigen Integral  $\hat{G}$  von Gurtin [35]. Schließlich bestehen auch Zusammenhänge mit den schon früher angegebenen Konzepten des  $J^*$ -Integrals von Blackburn und Hellen [36] für Rißinstabilität bei elastisch-plastischem Material und der verallgemeinerten Rißausbreitungskraft von Strifors [37] bei geeigneter Definition der Prozeßzone am Riß.

Auf die Äquivalenz des  $\hat{J}$ -Integralkonzepts mit der nicht-linearen Energiemethode von Eftis und Liebowitz (sog.  $\hat{G}$ -Konzept) [38] wird in Abschnitt 3. noch einmal Bezug genommen.

3)  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  für ESZ,  $\kappa = 3-4\nu$  für EVZ.

Zur Anwendung wegunabhängiger Integrale bei elastodynamischen Problemen werden ebenfalls zahlreiche Formulierungen angegeben und zwar mit dem  $\hat{J}$ -Integralkonzept [39], auch auf viskoelastische Probleme ausgedehnt [40] sowie mit den wegunabhängigen  $J'$ -Integralen von Atluri, welche die Bedeutung von Energiefreisetzungsraten für dynamische Rißausbreitung haben [41]. Dies Konzept wird auch zur Behandlung dynamischer Probleme bei gemischten Moden angewendet [42]. Formulierungen verschiedener elastodynamischer Rißprobleme mit wegunabhängigen Integralen stammen auch von Nilsson [43] und Bui [44]. Für nicht-lineare Bruchmechanik sind wegunabhängige Integrale von Chang [45] aufgestellt worden.

Für die von Knowles und Sternberg [46] angegebenen allgemeinen Erhaltungssätze und die dabei formulierten Integrale (J, L, M), die von Bui-Dianski und Rice [47] als Energiefreisetzungsraten interpretiert wurden, sind in der Folgezeit verschiedene Verallgemeinerungen vorgenommen worden. Erweiterte Integrale  $\hat{J}, \hat{L}, \hat{M}$  stammen von Aoki et. al. [48] und sind verknüpft mit den Energiefreisetzungsraten bei Verformung der Bruchprozeßzone. Vor allem sind die  $\hat{J}$ -Integrale, wie bereits erwähnt, bei Autonomie der Prozeßzone wichtig. Die Formulierungen liefern dann Linienintegrale und ein Flächenintegral über den Bereich außerhalb der Prozeßzone. Ohne Prozeßzone ergeben sich aus den Integralen wieder die bekannten Integrale von Knowles und Sternberg. In ähnlicher Richtung zielen die Verallgemeinerungen dieser Integrale durch Atluri [49], die endliche Verformungen, elastisch-plastisches Verhalten, elastodynamische Vorgänge, Einbeziehung der Trägheit und beliebige Rißrandbedingungen umfassen können.

Aus all diesen, zum Teil verschiedenen Formulierungen, ergeben sich allgemeine Darstellungen, mit denen viele mögliche Vorgänge in einer Rißspitzenumgebung erfaßt werden können. Es sind allerdings theoretisch und experimentell noch viele Fragen zu klären, bevor solche allgemeinen Kriterien technisch angewendet werden können. Man erkennt, daß die Wege der wegunabhängigen Integralkonzepte heute noch kreuz und quer laufen.

### 2.4. Verzerrungsenergiegedichte- oder S-Konzept

Nach einer anfangs stürmischen Entwicklungsphase der Bruchmechanik traten in den Jahren nach 1970 gewisse Zweifel an den Grundlagen verschiedener Konzepte sowie Unsicherheiten in deren Anwendbarkeit auf. Es waren z. B. keine direkten Aussagen über die Richtung, in der sich ein vorhandener Riß ausbreitet, zu gewinnen.

Ausgehend von der Tatsache, daß die Richtung der Rißausbreitung vom Energiezustand und den Materialeigenschaften im Bereich vor einer Rißspitze abhängen, wurde von Sih ([50], [51]) ein Konzept, zunächst für den elastischen Bereich, später auch für den elastisch-plastischen Bereich, vorgeschlagen. Es fußt auf der Minimierung der Verzerrungsenergiegedichte an der Rißfront und liefert Aussagen über die kritische Belastung sowie die Rißausbreitungsrichtung. Es wird angenommen, daß der Bruch von einem „inneren Werkstoffelement“ nahe der Rißspitze (vergleichbar der bereits erwähnten „Prozeßzone“) ausgeht, vgl. Bild 4. Ein kritischer Wert der ört-

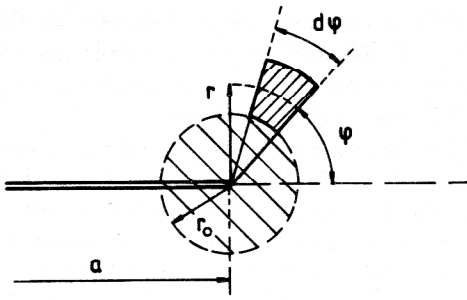


Bild 4  
„Inneres Werkstoffelement“ an einer Risspitze,  $r \ll a$

lichen Verzerrungsenergiedichte wird dabei als ein Kriterium für Rissinstabilität postuliert und soll sich als eine Werkstoffkonstante erweisen. Die Betrachtungen können dabei für den ebenen oder dreidimensionalen Fall durchgeführt werden.

Die Berechnung der elastischen Energiedichte mit den bekannten Nahfeldlösungen an der Risspitze liefert eine  $\frac{1}{r}$ -Singularität gemäß

$$\bar{U} = \frac{S}{r} + \text{nichtsinguläre Terme.} \quad (24)$$

Dabei ist gewissermaßen

$$S = a_{11} K_I^2 + 2 a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \quad (25)$$

als Amplitude eine richtungsabhängige Energiedichtegröße, die sicherlich mehr an Information liefern kann als der skalare Spannungsintensitätsfaktor. Für die Koeffizienten ergeben sich

$$a_{11} = \frac{1}{16G} [(\kappa - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi)]$$

$$a_{12} = \frac{1}{16G} \sin \varphi [2 \cos \varphi - (\kappa - 1)]$$

$$a_{22} = \frac{1}{16G} [(1 + \kappa)(1 - \cos \varphi) + (1 + \cos \varphi)(3 \cos \varphi - 1)]$$

mit der Abkürzung  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  für ESZ,  $\kappa = 3 - 4\nu$  für EVZ.

Die grundlegenden Annahmen des S-Konzepts lauten nun:

– Rißvergrößerung erfolgt in Richtung  $S = S_{\min}$  mit der Bedingung

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \text{ für } \varphi = \varphi_0$$

$$\text{und } \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} > 0. \quad (26)$$

Dies bedeutet, daß ein Riß in Richtung des geringsten Widerstands laufen wird (und somit die Größe  $S$  als eine Art „Rißwiderstandskraft“ angesehen werden kann).

– Instabile Rißverlängerung tritt ein, wenn  $S = S_{\min}$  einen kritischen Wert  $S_c$  erreicht, der als Materialkennwert experimentell bestimmt werden muß. Der Zusammenhang mit dem K-Konzept ist gegeben durch

$$S_c = \frac{\kappa - 1}{8\pi G} K_{Ic}^2$$

Wegen der Richtungsabhängigkeit kann auch das Problem gemischter Moden (z. B. I + II) erfaßt werden (vgl. Abschnitt 2.5.3.).

Anwendbar ist das S-Konzept mit entsprechenden Modifikationen für dynamische Rißprobleme (vgl. [52], [53]), wobei die Richtungsänderung der Rißbewegung durch die Lage von  $S_{\min}$  bestimmt wird und der bewegte Riß seine Richtung in dem Punkt ändert, wo  $S_{\min}$  einen kritischen Wert erreicht. Der Behandlung zugänglich werden auf diese Weise Probleme der Stoßbelastung bei Rissen unter gemischten Moden, ferner Rißverzweigungsprobleme.

Erweiterungen des ursprünglichen S-Konzepts erfolgten durch die Einbeziehung nicht-singulärer Glieder, um damit das vollständige Spannungsfeld an einer Risspitze zu erfassen (z. B. [54], [55]). Auf diese Weise können die Aussagen über die Größe der Kernzone an der Risspitze präzisiert und es kann der Gültigkeitsbereich des linear-elastischen Materialverhaltens dort angegeben werden. Die Ermittlung der Rißausbreitung ergibt sich dann als ein zweidimensionales Extremwertproblem.

Schließlich kann auch noch auf die Möglichkeiten der Erweiterung auf nichtlineare Bruchmechanik und das Rißwachstum bei plastischer Verformung hingewiesen werden. Einerseits ist die Darstellung der Verzerrungsenergiedichte unabhängig vom Materialverhalten, andererseits läßt sich diese Größe (außerhalb des Kleinbereichsfließens) nicht mehr in der angegebenen Weise durch die Spannungsintensitätsfaktoren ausdrücken.

Eine Erweiterung des S-Konzepts scheint möglich für Rißausbreitung in plastischem Material mit einer kritischen Größe der plastischen Verzerrungsenergie (man vgl. hierzu [56] bis [58]).

Gewisse Diskrepanzen in den Aussagen und Anwendungen des S-Konzepts werden von M. H. Wang [59] diskutiert. Dabei geht es ebenfalls um die Präzisierung der sog. Kernzone um eine Risspitze und es zeigen sich Zusammenhänge mit einem neuen sogenannten T-Konzept von Theocaris et. al. [60]. Dies spielt besonders in der Anwendung auf gemischte Moden eine Rolle und wird im nächsten Abschnitt noch einmal erwähnt.

## 2.5. Konzepte zur Behandlung gemischter Moden

Schon mehrfach wurden bisher bruchmechanische Probleme bei überlagerter Beanspruchung, die zu den sogenannten gemischten Moden führen, angesprochen. Man hat es bei den Anwendungen der Bruchmechanik im allgemeinen nicht mit dem reinen Mode I-Fall zu tun, sondern es liegt z. B. häufig Mode I + II vor. Diesem Sachverhalt wird heute viel Aufmerksamkeit gewidmet, da die Rißausbreitungsrichtung nicht von vornherein festgelegt (oder angenommen) ist, sondern vielmehr mittels eines Rißausbreitungskriteriums ermittelt werden muß.

Es ist bisher eine Reihe von Vorschlägen bekannt, die teilweise zu Ergebnissen führen, die mit den Tatsachen nicht verträglich sind und sich außerdem widersprechen. Einige der wichtigsten Konzepte werden im folgenden aufgeführt.

### 2.5.1. Maximale Tangentialspannung vor dem Riß

Das Kriterium geht auf Erdogan und Sih [61] zurück und beinhaltet die Annahmen:

- Instabile Rißausbreitung beginnt an einer Rißspitze in radialer Richtung.
- Rißausbreitung erfolgt in einer Richtung senkrecht zur maximalen Tangentialspannung.
- Instabile Rißvergrößerung tritt ein, wenn die maximale Tangentialspannung einen kritischen Materialgrenzwert erreicht.

### 2.5.2. Maximale Energiefreisetzungsrate vor dem Riß

Dies Kriterium erweist sich als eine konsequente Erweiterung des ursprünglichen Griffith-Konzepts und wurde ebenfalls von Erdogan und Sih erstmalig angewendet (vgl. [61], [62]). Mittlerweile ist eine Reihe von erweiterten und abgewandelten Kriterien zur Bestimmung der Rißablenkungswinkel und des Einsetzens der instabilen Rißausbreitung in der Diskussion. Endgültige Aussagen über die Anwendungen bedürfen aber noch weiterer experimenteller Untersuchungen im Bereich gemischter Moden.

### 2.5.3. Energiedichtekonzepte

Für das in Abschnitt 2.4. erwähnte S-Konzept von Sih wurde auch eine dreidimensionale Formulierung ([63], [64]) angegeben. Es werden Aussagen gewonnen über den Rißablenkungswinkel und über das Einsetzen instabiler Rißvergrößerung. Auch für die Ermüdungsrißausbildung kann das Kriterium angewendet werden.

Eine Erweiterung der Konzepte fußt auf der bekannten Aufteilung der Verzerrungsenergiedichte in die Volumenänderungs- und die Gestaltänderungsenergiedichte. Demgemäß ergibt sich auch eine Separation der Energiedichtefaktoren in zwei Anteile. Ein Kriterium unter Verwendung der Volumenänderungsenergie (oder Dilatationsenergie) wurde erstmals von Radaj und Heib [65] angegeben. Unter ähnlichen Gesichtspunkten ist das bereits erwähnte T-Kriterium eingeführt worden, das auch für duktilen Bruch anwendbar sein soll ([66] bis [68]).

Ein entsprechendes Kriterium beruhend auf der Gestaltänderungsenergie (oder Distorsionsenergie) stammt von Jayatilaka etl. al. [69].

### 2.5.4. Weitere Kriterien für gemischte Moden

Das bereits in Abschnitt 2.3. besprochene J-Integral-Konzept kann auch bei gemischten Moden Anwendung finden, wobei insbesondere die Aufspaltung in  $J_I$  und  $J_{II}$  [32] wichtig ist. Eine alternative Methode zur direkten Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren für Mode I und II stammt von Stern et. al. [70].

Zur Behandlung überlagerter Beanspruchung an Rissen und daraus entstehender gemischter Moden existieren zahlreiche weitere Kriterien sowie empirisch gefundene Regeln. Diese, sowie deren Modifikationen werden derzeit untersucht und befinden sich in der experimentellen Überprüfung. Dabei ist man auf ebene Probleme (außer mit dem Energiedichtekriterium) sowie weitgehend auf den Gültigkeitsbereich der LEBM beschränkt.

Eine ausführliche und kritische Betrachtung der Problematik bei gemischten Moden wurde kürzlich von Richard [71] gegeben.

## 3. Wichtige Konzepte der elastisch-plastischen Bruchmechanik (EPBM)

Alle der wichtigsten Konzepte der LEBM wurden modifiziert und auf Situationen bei mäßigem bis ausgedehnten Fließen an der Rißspitze angewendet. Teilweise werden hierbei die plastischen Effekte innerhalb elastischer Rechnungen simuliert. Bei ausgedehntem Fließen am Riß verlieren jedoch diese Aussagen an Genauigkeit und damit an Gültigkeit. Eine Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten wurde von Rice [72] gegeben.

Bevorzugt werden in der EPBM das J-Konzept sowie das COD-Konzept. Beim J-Integral wird die Wegunabhängigkeit bei ausgedehntem Fließen unter Zugrundelegung verschiedenen Materialverhaltens z. B. für plastische Deformationstheorie (Hencky-sches Gesetz) bzw. für plastische Fließtheorie (Prandtl-Reuß-Gesetz) postuliert bzw. durch numerische Rechnungen verifiziert.

Es liegt allerdings kein theoretischer Beweis für die Wegunabhängigkeit vor. Zu bedenken ist außerdem, daß ein kritischer Wert des J-Integrals als Maß für die Rißzähigkeit unhalbar ist, wenn langsames, stabiles Rißwachstum dem schnellen Bruch vorausgeht. Die physikalische Bedeutung des J-Integrals als Energiefreisetzungsrate ist bei plastischem Materialverhalten nicht mehr gegeben. Einige weitere Konzepte, die für die nichtlineare bzw. die elastisch-plastische Bruchmechanik vorgeschlagen wurden, werden nachfolgend aufgeführt.

### 3.1. Nicht-lineare Energiemethode

Dies Konzept wurde von Liebowitz und Eftis ab 1971 vorgestellt (vgl. [73] bis [76]) und fand ursprünglich Anwendung zur Festlegung der Rißzähigkeit von Zugproben mit Innenriß. Später wurde gezeigt, daß die Methode auch für alle anderen Testanordnungen der Bruchmechanik anwendbar ist.

Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß praktisch allen Brüchen in Metallen plastisches Fließen in unmittelbarer Nähe der Rißfront vorausgeht. Bekanntlich zeigen zähe Materialien einen größeren Widerstand gegen Rißausbreitung als spröde. Dafür entsteht eine stärkere Rißspitzenplastizität und beträchtliches langsames Rißwachstum vor Beginn des instabilen Bruchs.

Aufgrund von Energiebetrachtungen ähnlich dem Vorgehen zur Bestimmung der Rißzähigkeit in der LEBM ergibt sich als Verallgemeinerung die Beziehung

$$\tilde{G}_c = \tilde{C} G_c \quad (27)$$

womit die nicht-lineare Rißzähigkeit  $\tilde{G}_c$  eingeführt wird. Diese Größe gilt als ein Parameter zur Erfassung der Rißspitzenplastizität und des langsamen Rißwachstums. Die Größe  $G_c$  in (27) ist die kritische Energiefreisetzungsrate der LEBM nach Irwin (vgl. Abschn. 2.1.).

Die Nichtlinearität der Last-Verschiebungskurve wird durch  $\tilde{C}$  wiedergegeben,  $\tilde{G}_c$  kann unmittelbar aus Versuchsergebnissen von Bruchtests bestimmt werden. Eine

typische nichtlineare Last-Verschiebungskurve ist in Bild 5 gezeigt. Mit einer nichtlinearen F-v-Beziehung (gemäß dem Ramberg-Osgood-Gesetz)

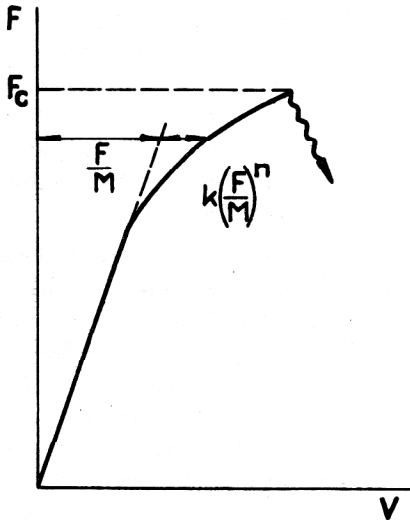
$$v = \frac{F}{M} + k \left( \frac{F}{M} \right)^n \quad (28)$$

folgt

$$\tilde{G} = \left[ 1 + \frac{2kn}{n+1} \left( \frac{F}{M} \right)^{n-1} \right] G = \tilde{C} G \quad (29)$$

Im Punkt der Instabilität  $F = F_c$  wird  $\tilde{G}_c = \tilde{C} G_c$ .

Im Fall der LEBM ist  $k = 0$  und es gilt  $\tilde{G}_c = G_c$ .



**Bild 5**  
Nichtlineare Last-Verschiebungskurve bei der nichtlinearen Energiemethode

Die Größe  $\tilde{G}$  wird auch als totale Energiefreisetzungsrates bezeichnet, ihre physikalische Bedeutung ist aber umstritten.

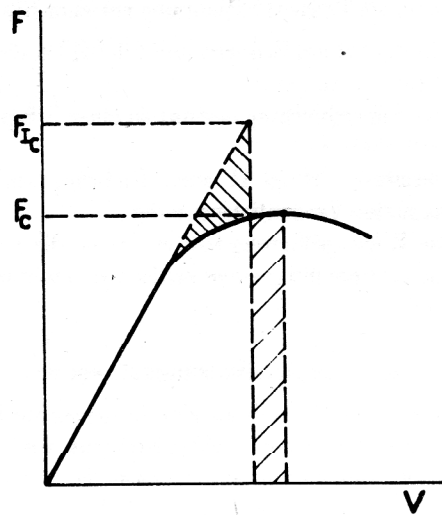
Die Anwendung der nicht-linearen Energiemethode führt auf  $K_{I0}$ -Messungen an kleinen Proben im Bereich des stabilen Rischwachstums. Hierbei können ESZ als auch EVZ zugrundegelegt werden.

Auch für gemischte Moden kann das Konzept eingesetzt werden, es ist dann eine verallgemeinerte  $G$ -K-Beziehung aufzustellen [77].

### 3.2. Äquivalent-Energiehypothese

Das Hauptanliegen mancher Konzepte der Bruchmechanik (wie z. B. der nichtlinearen Energiemethode) ist die Möglichkeit, kritische Kennwerte an kleinen Proben zu messen, deren Abmessungen wesentlich geringer sind als sie für LEBM-Standardtests gefordert werden.

Hierfür wurde auch die Äquivalent-Energiehypothese von Witt [78], [79] vorgeschlagen. Sie wurde entwickelt, noch bevor das J-Integralkonzept allgemein in der EPBM eingesetzt wurde. Es handelt sich hier auch um eine Erweiterung der Konzepte der LEBM auf elastisch-plastisches Bruchverhalten. Verglichen wird der Energieverbrauch bis zum Bruch in geometrisch ähnlichen Proben, vgl. Bild 6. (Betrachtet ist die volumetrische Energie in proportionalen Proben).



**Bild 6**  
Last-Verschiebungskurven bei der Äquivalent-Energiehypothese zur Ermittlung von  $K_{Ic}$

Unter echten  $K_{Ic}$ -Bedingungen würde der Bruch bei  $F = F_{Ic}$  eintreten. Aus der Gleichheit der schraffierten Flächen kann  $F_c$  ermittelt werden. Sinnvoll ist hierbei, unter  $F_c$  die Kraft bei Beginn des Rischwachstums zu verstehen.

Die Äquivalent-Energiemethode ist im wesentlichen ein empirisches Konzept, fraglich ist die Erfassung des langsamen Rischwachstums (wie bei vielen anderen Testmethoden). Die Methode ist ähnlich dem elastisch-plastischen J-Integralkonzept, die Genauigkeit der Übereinstimmung kann nur durch weitere Versuche festgestellt werden. Vergleiche der beiden Konzepte sind von Begley und Landes [80] angestellt worden. Im linear-elastischen Fall sind die beiden Konzepte identisch. Der Anwendungsbereich der Äquivalent-Energiemethode im Bereich der EPBM ist schwer anzugeben.

### 3.3. Zwei-Parameterkonzept von Newman ([81], [82])

Es handelt sich um ein Verfahren zur Behandlung elastisch-plastischer Bruchvorgänge, fußend auf einer Beziehung von Neuber [83] für plastische Kerbfaktoren

$$\alpha_{el}^2 = \alpha_\sigma \alpha_\epsilon \quad (30)$$

Hierbei bedeutet  $\alpha_{el}$  den elastischen Kerbfaktor („Formzahl“), während  $\alpha_\sigma$  bzw.  $\alpha_\epsilon$  der plastische Spannungskonzentrationsfaktor bzw. der plastische Dehnungskonzentrationsfaktor sind. Die Beziehung (30) ist hergeleitet für nichtebenen Schubspannungszustand („anti-plane shear“, entspricht Mode III in der Bruchmechanik) und ein nichtlineares Spannungs-Dehnungsgesetz gemäß

$$\gamma = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (\tau/\tau^*)^2}}$$

mit  $\gamma$  als Schubverformung,  $\tau$  als Schubspannung und  $\tau^*$  als einer Grenzschubspannung.

In Analogie zu (30) wird dem Konzept von Newman eine Beziehung zwischen dem linear-elastischen Spannungsintensitätsfaktor, der wirkenden Spannung und zwei Materialparametern zugrundegelegt. Dabei wird eine Risfzähigkeit  $K_f$  eingeführt gemäß



$$K_f = \frac{K_I}{1 - m(\sigma_{nc}/\sigma_g)} \quad (32)$$

mit

- $\sigma_{nc}$  – Nennspannung im Restquerschnitt der Probe bei Bruch (diese ist kleiner als  $\sigma_{np}$ )
- $\sigma_{np}$  – zur Plastizierung des Restquerschnitts erforderliche Spannung
- $\sigma_g$  – plastische Grenzspannung (entspricht  $\sigma_{np}$  bei ideal plastischem Verhalten)

Es wird dann  $\sigma_g = \sigma_B$  (Zugfestigkeit) und  $\sigma_{np} = \sigma_F$  (Fließspannung) gesetzt.

Die zwei Parameter  $K_f$  und  $m$  sollen als Werkstoffkonstanten angesehen werden, die nur vom Spannungszustand und der Probendicke abhängen. Sie können mit guter Genauigkeit auch ohne Berücksichtigung des unterkritischen Riswwachstums experimentell bestimmt werden.

Das Newmansche Konzept stellt eine brauchbare Methode zur Ermittlung der Versagensspannung angerissener Bauteile im elastisch-plastischen Bereich dar. Im weitesten Sinn kann das Konzept mit dem J-Integralkonzept und dem COD-Konzept verknüpft werden.

Dem Fall  $m = 0$  entspricht gemäß (32)  $K_f = K_I$ , d. h. das Bruchkriterium der LEBM. Somit sollte das Newmansche Konzept das Bruchgeschehen vom linear-elastischen bis zum vollplastischen Zustand beschreiben können. Einige kritische Bemerkungen hierüber finden sich in [84].

### 3.4. Final-Stretch-Konzept von Wnuk ([85] bis [88])

Es handelt sich um ein Konzept zur Erfassung der stabilen (unterkritischen) Riswwachstum bei Brucherscheinungen in teilweise oder vollplastischen Proben. Bei nicht ideal-elastischem Material geht bekanntlich dem instabilen Bruch immer eine quasi-statische Riswwachstum voraus. Diese wird als eine Aufeinanderfolge „örtlicher“ Instabilitätszustände angesehen. Dies kann zum „globalen“ Stabilitätsverlust führen, woraus sich der Übergang zur instabilen Riswwachstum (d. h. Bruch) ergibt.

Zugrundegelegt wird, daß als wesentliche Brucharbeit die „plastische Energie“ maßgebend ist, die in einem extrem kleinen Volumenbereich an der Riswwachstum (vergleichbar der Prozeßzone) dissipiert wird und die bei der duktilen Riswwachstum invariant bleibt, mithin als ein bruchmechanischer Parameter gelten kann. Als Kriterium wird eine Größe eingeführt, die als „final stretch“ bezeichnet wird und die innerhalb der Prozeßzone „gerade vor dem Bruch“ einen kritischen Betrag erreicht. Es besteht eine gewisse Analogie zur kritischen Riswwachstumverschiebung.

Ursprünglich war das Konzept von Wnuk vorgesehen, um die Riswwachstum beim Kleinbereichsfließen zu beschreiben, wurde dann aber für ausgedehntes Fließen erweitert. Die mathematische Behandlung erfolgt mit einem Linienplastizitätsmodell vom Dugdale-Bilby-Cottrell-Swinden-Typ (vgl. [7], [8]).

Im Gegensatz zu den COD- oder J-Integralkonzepten ist das Final-Stretch-Konzept inkrementeller Natur. Es wird gezeigt, daß bei bewegter Riswwachstum die sich einstellende

Riswwachstum von der Belastungsgeschichte sowie der Belastungsgeschwindigkeit abhängig ist. Nur im Grenzfall der stationären Riswwachstum, d. h. ohne zeitliche Änderung der plastischen Zone am Riswwachstum, führen Final-Stretch-, COD- und J-Integralkonzept zu gleichen Ergebnissen. Es läßt sich übrigens auch eine Übereinstimmung mit einem von Mc Clintock [89] postulierten Kriterium einer kritischen Verzerrung über einen kleinen Bereich an der Riswwachstum (mitunter als Neuberscher Bereich bezeichnet) herstellen.

Anwendung findet das Konzept von Wnuk wie erwähnt bei belastungsgeschwindigkeitsabhängigem Materialverhalten, ferner bei Riswwachstum in visko-elastisch plastischen Festkörpern [90] sowie auch bei Kombination von Ermüdung und Kriechen.

## 4. Ausblick und Schluß

Wie der Überblick zeigt, sind seit der Einführung der ersten Konzepte der Bruchmechanik von Irwin die Wege und Ziele der Methoden weitgehenden Wandlungen und Modifizierungen unterworfen worden. Das Hauptproblem der Bruchmechanik und das Endziel aller Konzepte betrifft die Klärung des Bruchvorgangs. Er besteht aus folgenden Stufen:

- Riswwachstum (Belastung vor der Riswwachstum),
- langsames stabiles Riswwachstum,
- instabile Riswwachstumvergrößerung (Trennung und Bruch).

Dazwischen liegen bestimmte kritische Übergänge, die das Einsetzen des stabilen Riswwachstums und das Einsetzen des Bruchs, also die endgültige Instabilität, kennzeichnen.

Die hauptsächliche Anwendung der Bruchmechanik liegt heute bei den Verfahren zur experimentellen Bestimmung von  $K_{Ic}$ -Werten, aber zunehmend auch von kritischen K-Werten bei den übrigen Moden und bei gemischten Moden. Besonders erwünscht sind Prüfmethode mit kleinen Proben.

Die weitere Entwicklung wird zum einen in Richtung verallgemeinerter Konzepte liegen, von denen man sich eine solide theoretische Fundierung aller in der Bruchmechanik angewendeten Methoden erhoffen kann.

Zum anderen wird der Begriff der Prozeßzone an einer Riswwachstum, in welcher der physikalische Trennvorgang abläuft, eine wichtige Rolle bei der erforderlichen Korrelation der kontinuumsmechanischen mit den metallphysikalischen Aspekten des gesamten Bruchvorgangs spielen müssen.

Die zukünftige Klärung dieser noch offenen Fragen wird dann wiederum der praktischen Anwendung der Bruchmechanik in der Technik zugutekommen.

## LITERATUR

- [1] H. G. Hahn: Bruchmechanik. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik Bd. 30. Stuttgart 1976.
- [2] H. Blumenauer, G. Pusch: Technische Bruchmechanik. Leipzig 1982.
- [3] I. N. Sneddon: The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. Proc. Roy. Soc. A 187 (1946) 229 – 260.

- [ 4 ] M. L. Williams: On the stress-distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.* 24 (1957) 109 – 114.
- [ 5 ] G. R. Irwin: *Fracture. Handb. d. Physik Bd. VI*, 558 – 590. Berlin 1958.
- [ 6 ] G. I. Barenblatt: The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.* 7 (1962) 55 – 129.
- [ 7 ] D. S. Dugdale: Yielding of steel-sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids* 8 (1960) 100 – 104.
- [ 8 ] B. A. Bilby, A. H. Cottrell, K. H. Swinden: The spread of plastic yield from a notch. *Proc. Roy. Soc. A* 272 (1963) 304 – 314.
- [ 9 ] K. B. Broberg: The foundations of fracture mechanics. *Eng. fract. Mech.* 16 (1982) 497 – 515.
- [ 10 ] J. M. Krafft, A. M. Sullivan, R. W. Boyle: Effect of dimensions on fast fracture instability of notched sheets. *Proc. Crack Propagation Symposium, Cranfield 1961. Vol. I*, 8 – 28.
- [ 11 ] J. E. Srawley, W. F. Brown: Fracture toughness testing methods. *ASTM, STP 381* (1965) 133 – 195.
- [ 12 ] D. Broek: The energy criterion for fracture of sheets. *Appl. Materials Res.* (1965), 188 – 189.
- [ 13 ] Fracture toughness evaluation by R-curve methods. *ASTM, STP 527* (1973).
- [ 14 ] A. A. Wells: Unstable crack propagation in metals, cleavage and fast fracture. *Proc. Crack Propagation Symposium, Cranfield 1961. Vol. I*, 210 – 230.
- [ 15 ] D. Munz: Das J-Integral, ein neues Bruchkriterium. *Z. f. Werkstofftechnik*, 7 (1976) 111 – 120.
- [ 16 ] B. Michel, W. Totzauer: Das J-Integral und seine Verallgemeinerungen, aktuelle Trends in der Bruchmechanik. *Techn. Mechanik* 5 (1984) 5 – 14.
- [ 17 ] H. Buggisch, D. Groß, K.-H. Krüger: Einige Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik vom J-Integral-Typ. *Ing. Arch.* 50 (1981) 105 – 111.
- [ 18 ] J. D. Eshelby: The force on an elastic singularity. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 244 (1951) 87 – 112.
- [ 19 ] W. Günther: Über einige Randintegrale der Elastomechanik. *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.* 14 (1962) 53 – 72.
- [ 20 ] E. Noether: Invariante Variationsprobleme. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, (1918) 235 – 257.
- [ 21 ] A. Golebiewska-Herrmann: On conservation laws of continuum mechanics. *Int. J. Solids Struct.* 17 (1981) 1 – 9.
- [ 22 ] J. R. Rice: A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 35 (1968) 379 – 386.
- [ 23 ] G. P. Cherepanov: Crack propagation in continuous media. *P. M. M.* 31 (1967) 476 – 485.
- [ 24 ] G. R. Egan: Compatibility of linear elastic ( $K_{Ic}$ ) and general yielding (COD) fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.* 5 (1973) 167 – 185.
- [ 25 ] Y. G. Xiao, G. H. Huang: On the compatibility between J-integral and crack opening displacement. *Eng. Fract. Mech.* 16 (1982) 83 – 94.
- [ 26 ] P. J. M. Firro: Numerische Berechnung von bruchmechanischen Größen für elastisches und elastisch-plastisches Materialverhalten, insbesondere bei gemischter Belastung. *Dr.-Ing. Dissertation, Universität Kaiserslautern 1986.*
- [ 27 ] W. Kraft: Untersuchung zweidimensionaler elastodynamischer Spannungskonzentrations- und Rißprobleme. *Dr.-Ing. Dissertation, Universität Kaiserslautern 1986.*
- [ 28 ] A. Golebiewska-Herrmann, G. Herrmann: On energy-release rates for a plane crack. *J. Appl. Mech.* 48 (1981) 525 – 528.
- [ 29 ] H. D. Bui: Dual path-independent integrals in the boundary-value problems of cracks. *Eng. Fract. Mech.* 6 (1974) 287 – 296.
- [ 30 ] J. Eftis, H. Liebowitz: On fracture toughness evaluation for semibrittle fracture. *Eng. Fract. Mech.* 7 (1975) 101 – 135.
- [ 31 ] H. Miyamoto, M. Kikuchi: Three-dimensional J-integral. *Theor. Appl. Mech.* 28 (1980) 195 – 204.
- [ 32 ] H. Ishikawa, H. Kitagawa, H. Okamura: J-Integral of a mixed mode crack and its applications. *Preprints for JSME meetings 760 – 13* (1976) 46 – 49, 780 – 4 (1978) 52 – 55. *Ferner ICM Conf. 3, Cambridge 1979, Vol. 3*, 447 – 455.
- [ 33 ] K. Kishimoto, S. Aoki, M. Sakata: On the path-independent Integral. *J. Eng. Fract. Mech.* 13 (1980) 841 – 850.
- [ 34 ] S. Aoki, K. Kishimoto, M. Sakata: Elastic-plastic analysis of crack in thermally-loaded structures. *Eng. Fract. Mech.* 16 (1982) 405 – 413.
- [ 35 ] M. E. Gurtin: On a path-independent integral for thermo-elasticity. *Int. J. Fract.* 15 (1979) 169 – 170.
- [ 36 ] W. S. Blackburn: Path-independent integrals to predict onset of crack instability in an elastic-plastic material. *Int. J. Fract. Mech.* 8 (1982) 343 – 346.
- [ 37 ] H. C. Strifors: A generalized force measure of conditions at crack tips. *Int. J. Sol. Struct.* 10 (1976) 1389 – 1404.
- [ 38 ] H. Liebowitz, J. Eftis: On non-linear effects in fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.* 3 (1971) 267 – 281.
- [ 39 ] K. Kishimoto, S. Aoki, M. Sakata: Dynamic stress intensity factors using J-integral and finite element method. *Eng. Fract. Mech.* 13 (1980) 387 – 394.
- [ 40 ] K. Kishimoto, S. Aoki, M. Sakata: Use of J-integral in dynamic analysis of cracked linear viscoelastic solids by finite element method. *J. Appl. Mech.* 49 (1982) 75 – 80.
- [ 41 ] T. Nishioka, S. N. Atluri: A numerical study of the use of path-independent integral in elasto-dynamic crack propagation. *Eng. Fract. Mech.* 18 (1983) 23 – 35.
- [ 42 ] T. Nishioka, S. N. Atluri: Path-independent integrals, energy release rates, and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture Mechanics. *Eng. Fract. Mech.* 18 (1983) 1 – 22.
- [ 43 ] F. Nilsson: A path-independent integral for transient crack problems. *Int. J. Sol. Struct.* 9 (1973) 1107 – 1115.
- [ 44 ] H. D. Bui: Stress and crack-displacement intensity factor in elastodynamics. *Fracture ICF 4 Waterloo* (1977), Vol. 3, 91 – 95.
- [ 45 ] Ouyang Chan: On path-independent integrals and fracture criteria in nonlinear fracture dynamics. *Appl. Math. and Mech.* (engl. Übersetzung), 3 (1982) 335 – 343. (*Int. J. Nonl. Mech.* 18 (1983) 79 – 86).
- [ 46 ] J. K. Knowles, E. Sternberg: On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 44 (1972) 187 – 211.
- [ 47 ] B. Budiansky, J. R. Rice: Conservation laws and energy release rates. *J. Appl. Mech.* 40 (1973) 201 – 203.
- [ 48 ] S. Aoki, K. Kishimoto, M. Sakata: Energy release rate in elastic-plastic fracture problems. *J. Appl. Mech.* 48 (1981) 825 – 829.
- [ 49 ] S. Atluri: Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia, and arbitrary crack face conditions. *Eng. Fract. Mech.* 16 (1982) 341 – 364.
- [ 50 ] G. C. Sih: Some basic problems in fracture mechanics and new concepts. *Eng. Fract. Mech.* 5 (1973) 365 – 377.
- [ 51 ] G. C. Sih: A special theory of crack propagation. *Mech. of Fracture I, Leyden 1973*, 21 – 45.
- [ 52 ] R. J. Hartranft, G. C. Sih: Application of the strain energy density fracture criterion to dynamic crack problems. *Prospects of Fracture Mechanics, Leyden 1974*, 281 – 297.
- [ 53 ] G. C. Sih: Dynamic crack problems – strain energy density fracture theory. *Mech. Of Fracture IV, Leyden 1977*, 17 – 47.
- [ 54 ] K. F. Fischer: Zur Erweiterung des Bruchkriteriums von Sih. *ZAMM* 58 (1978) 331 – 336.
- [ 55 ] H. Liebowitz, J. Lee, N. Subramonian: Effects of plasticity and crack geometry on fracture, 1979. *Intern. Symp. Fract. Mech. Bangalore, I – II.*

- [56] G. C. Sih: The analytical aspects of macrostructure mechanics. Rom Conference (1980), 3 – 15.
- [57] G. C. Sih, E. Madenci: Fracture initiation under gross yielding: strain energy density criterion. *Eng. Fract. Mech.* 18 (1983) 667 – 677.
- [58] G. C. Sih, P. Matic: A pseudo-linear analysis of yielding and crack growth. *Proc. of Defects, Fracture and Fatigue* (1983) 223 – 232.
- [59] M. H. Wang: A modified S-theory. *Eng. Fract. Mech.* 22 (1985) 579 – 584.
- [60] P. S. Theocaris, N. P. Andrianopoulos: The Mises elastic-plastic boundary as the core region in fracture criteria. *Eng. Fract. Mech.* 16 (1982) 425 – 432.
- [61] F. Erdogan, G. C. Sih: On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Engineering* 85 (1963) 519 – 527.
- [62] C. H. Wu: Fracture under combined loads by maximum-energy-release-rate criterion. *J. Appl. Mech.* 45 (1978) 553 – 558.
- [63] G. C. Sih, B. C. H. Cha: A fracture criterion for three-dimensional crack problems. *Eng. Fract. Mech.* 6 (1974) 699 – 723.
- [64] G. C. Sih: A three-dimensional strain energy density factor theory of crack propagation. *Mech. of Fracture II*, Leyden 1975, 15 – 53.
- [65] D. Radaj, M. Heib: Energy density fracture criteria for cracks under mixed-mode loading. *Materialprüfung* 20 (1978) 256 – 262.
- [66] P. S. Theocaris, N. P. Andrianopoulos: The T-criterion applied to ductile fracture. *Int. J. Fracture* 20 (1982) R 125 – R 129.
- [67] P. S. Theocaris, G. A. Kardomateas, N. P. Andrianopoulos: Experimental study of the T-criterion in ductile fractures. *Eng. Fract. Mech.* 17 (1982) 439 – 447.
- [68] N. A. B. Yehia: On the use of the T-criterion in fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.* 22 (1985) 189 – 199.
- [69] S. Jayatilaka, I. J. Jenkins, S. V. Prasad: Determination of crack growth in mixed mode loading systems. *ICF 4, Waterloo, 1977, Vol 3 a*, 15 – 23.
- [70] M. Stern, E. B. Becker, R. S. Dunham: A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *Int. J. Fract.* 12 (1976) 359 – 368.
- [71] H. A. Richard: Bruchvorhersagen bei überlagerter Normal- und Schubbeanspruchung von Rissen. *VDI-Forschungsheft* 631 (1985).
- [72] J. R. Rice: Elastic plastic fracture mechanics. *Mechanics of Fracture* (ed. F. Erdogan) ASME 1976. S. 23 – 53.
- [73] H. Liebowitz, J. Eftis: On non-linear effects in fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.* 3 (1971) 267 – 281.
- [74] D. L. Jones, H. Liebowitz, J. Eftis: Fracture toughness characterization of several aluminum alloys in semi-brittle fracture. *Eng. Fract. Mech.* 6 (1974) 639 – 652.
- [75] J. Eftis, H. Liebowitz: On fracture toughness evaluation for semi-brittle fracture. *Eng. Fract. Mech.* 7 (1975) 101 – 135.
- [76] H. Liebowitz, D. L. Jones, P. K. Poulouse: Development of the non-linear energy method for determination of fracture toughness values. *Proc. Prospects of Fracture Mechanics Delft* (1974), S. 103 – 123.
- [77] W. Shen, J. D. Lee: The non-linear energy method for mixed mode fracture. *Eng. Fract. Mech.* 16 (1982) 783 – 798.
- [78] F. J. Witt: Equivalent energy procedures for predicting gross plastic fracture. *Fourth Nat. Symp. on Fract. Mech., Carnegie Mellon Univ.* 1970.
- [79] F. J. Witt, T. R. Mager: Fracture toughness values at temperatures up to 550°F for ASTM A-553 grade B class 1 steel. *Nucl. Engng. and Design*, 17 (1971) 91 – 103.
- [80] J. A. Begley, J. D. Landes: A comparison of the J-Integral fracture criterion with the equivalent energy concept. *ASTM, STP 536* (1973) 246 – 263.
- [81] J. C. Newman Jr.: Fracture analysis of surface and through-cracked sheets and plates. *Eng. Fract. Mech.* 5 (1973) 667 – 689.
- [82] J. C. Newman Jr.: Fracture analysis of various cracked configurations in sheet and plate materials. *ASTM, STP 605* (1976) 104 – 123.
- [83] H. Neuber: Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary non-linear stress strain law. *J. Appl. Mech.* 28 (1961) 544 – 550.
- [84] C. E. Turner: Methods for post-yield fracture safety assessment. In *Post-yield fracture mechanics* (ed. D. G. H. Latzko) London 1979.
- [85] M. P. Wnuk: Accelerating crack in a viscoelastic solid subject to subcritical stress intensity. *Proc. Int. Conf. Dynamic Crack Propagation, 1972 Lehigh Univ.*, 273 – 280.
- [86] M. P. Wnuk: Prior to failure extension of flaws in a rate sensitive TRESKA-solid. *ASTM, STP 536* (1973) 64 – 75.
- [87] M. P. Wnuk: Slow growth of cracks in a rate-sensitive TRESKA-solid. *Eng. Fract. Mech.* 5 (1973) 605 – 626.
- [88] M. P. Wnuk: Initial stages of crack extension in time-dependent and/or ductile solids. *ICF 4 Waterloo* (1977), Vol. 3, S. 54 – 62.
- [89] F. A. Mc. Clintock: Ductile fracture instability in shear. *J. Appl. Mech.* 25 (1958) 582 – 588.
- [90] M. P. Wnuk: Quasi-static extension of a tensile crack contained in a viscoelastic-plastic solid. *J. Appl. Mech.* 41 (1974) 234 – 242.