

Die Prismenmethode - eine quasidreidimensionale Finite-Elemente-Methode

Georgi Kolarow, Walter Weese

0. Einleitung

Bei Festigkeitsuntersuchungen von Stäben ist es oft möglich, die Spannungen nach der Stabwerkstheorie zu ermitteln. Um örtliche Kräfteinflüsse berücksichtigen zu können, muß jedoch von einer Näherungslösung ausgegangen werden. Das Differenzenverfahren ist in Verbindung mit der Plattentheorie nur für dünnwandige Profile geeignet. Die Anwendung der FEM erfordert für diese Problematik einen dreidimensionalen Ansatz, deren Realisierung einen unverhältnismäßig hohen Aufwand zur Folge hätte. Eine brauchbare Lösung wird in [1] vorgestellt. Nach dieser Vorgehensweise wird die Querschnittsebene in zweidimensionale finite Elemente geteilt, und in Stabachsenrichtung erfolgt eine Reihenentwicklung.

Sehr oft ist es ausreichend, das gesamte Stabsystem nach den üblichen Stabwerkslösungen (z. B. Kraft- oder Deformationsgrößenverfahren) zu behandeln und nachträglich an ausgewählten Stellen den örtlichen Kräfteinfluß zu untersuchen.

Für die Lösung der vorliegenden Aufgabe wird die Prismenmethode angeboten.

1. Theoretische Grundlagen

Die Prismenmethode wird für einen geraden Balken auf zwei Stützen, der als ein dreidimensionaler Körper angesehen wird, angewandt (Bild 1). Die Querschnittsfläche sei konstant sowie ein idealelastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Es erfolgt eine Reihenentwicklung in z-Richtung nach den Eigenfunktionen und ein ebener FEM-Ansatz in der x-y-Querschnittsebene.

Es wird von folgendem Ansatz für die Verschiebungen ausgegangen [1]:

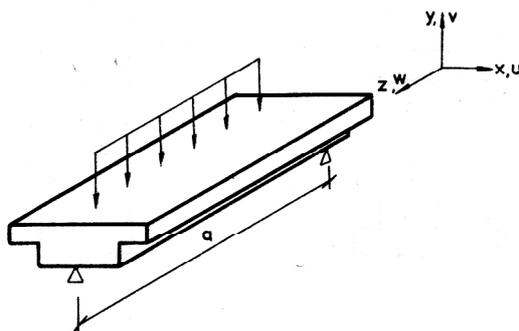


Bild 1
Das Prismenmodell

$$\underline{v}(x, y, z) = \sum_m \underline{P}_m(z) \underline{v}_m(x, y), \quad (1)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Hierin bedeuten:

$$\underline{P}_m = \begin{bmatrix} s_m & 0 \\ 0 & s_m \\ 0 & c_m \end{bmatrix},$$

$$\underline{v}(x, y, z) = [u(x, y, z); w(x, y, z)]^T,$$

$$\underline{v}_m(x, y) = [u_m(x, y); v_m(x, y); w_m(x, y)]^T,$$

$$s_m = \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right), \quad c_m = \cos\left(\frac{m\pi}{a}\right),$$

Die Randbedingungen

$$u(z=0) = u(z=a) = 0;$$

$$v(z=0) = v(z=a) = 0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z=0) = \frac{\partial w}{\partial z}(z=a) = 0.$$

werden automatisch erfüllt.

Entsprechend erhält man für die Verzerrungen:

$$\underline{\epsilon}(x, y, z) = \sum_m \underline{Q}_m(z) \underline{\epsilon}_m(x, y) \quad (2)$$

mit

$$\underline{\epsilon}(x, y, z) = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T,$$

$$\underline{\epsilon}_m = \left[\frac{\partial u_m}{\partial x}; \frac{\partial v_m}{\partial y}; -k_m w_m; \frac{\partial u_m}{\partial y}; \frac{\partial v_m}{\partial x}; \right.$$

$$\left. k_m v_m + \frac{\partial w}{\partial y}; \frac{\partial w}{\partial x} + k_m u_m \right]^T,$$

$$\underline{Q}_m = \begin{bmatrix} s_m & s_m & s_m & s_m & 0 \\ 0 & s_m & s_m & c_m & c_m \end{bmatrix}, \quad k_m = \frac{m\pi}{a}.$$

Unter Berücksichtigung des Hookeschen Gesetzes ergeben sich die Spannungen zu:

$$\underline{s}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & & & & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & & & & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & & & & 0 \\ & & & h_{44} & & & \\ & & & & h_{55} & & \\ 0 & & & & & & h_{66} \end{bmatrix} = \underline{H} \underline{e}(x,y,z).$$

Somit folgt aus (2)

$$\begin{aligned} \underline{s}(x,y,z) &= \sum_m \underline{H} \underline{Q}_m(z) \underline{e}_m(x,y) \\ &= \sum_m \underline{Q}_m(z) \underline{H} \underline{e}_m(x,y) \\ &= \sum_m \underline{Q}_m(z) \underline{s}_m(x,y). \end{aligned}$$

Die Belastungen werden ebenfalls in eine Reihe entwickelt:

$$\underline{q}(x,y,z) = \sum_m \underline{P}_m(z) \underline{q}_m(x,y). \quad (4)$$

Werden die entsprechenden Größen in das elastische Potential

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{(v)} \underline{e}^T \underline{s} \, dV - \int_{(0)} \tilde{v}^T \underline{q} \, d0 \implies \text{Minimum} \quad (5)$$

eingesetzt, so entsteht:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \int_{(v)} (\sum_m \underline{e}_m^T \underline{Q}_m^T) (\sum_m \underline{H} \underline{Q}_m \underline{e}_m) \, dV - \\ &\quad - \int_{(0)} (\sum_m \underline{e}_m^T \underline{Q}_m^T) (\sum_m \underline{H} \underline{Q}_m \underline{e}_m) \, dV \\ &\quad - \int_{(0)} (\sum_m \tilde{v}_m^T \underline{P}_m^T) (\sum_m \underline{P}_m \underline{q}_m) \, d0 \end{aligned} \quad (6)$$

Ersetzt man in (6) das Summenprodukt durch eine Doppelsumme und vertauscht die Integration und die Summation, dann folgt:

$$\pi = \sum_m \sum_n \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{(v)} \underline{e}_m^T \underline{Q}_m^T \underline{H} \underline{Q}_n \underline{e}_n \, dV}_{(a)} - \underbrace{\int_{(0)} \tilde{v}_m^T \underline{P}_m^T \underline{P}_n \underline{q}_n \, d0}_{(b)} \right\} \quad (7)$$

Nach Lösung von Teilintegralen, die nur von der Koordinate z abhängen, erhält man für das elastische Potential:

$$\pi = \frac{a}{2} \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \int_{(A)} \underline{e}_m^T(x,y) \underline{H} \underline{e}_m(x,y) \, dA - \int_{(s)} \tilde{v}_m^T(x,y) \underline{q}_m(x,y) \, ds \right\} \quad (8)$$

Das Gesamtpotential besteht aus einer Summe von einzelnen Potentialen, die nur von x und y abhängig sind. Damit ist das dreidimensionale Problem auf eine Anzahl von quasiebene Aufgaben zurückgeführt. Hier-

für wird ein ebener FEM-Ansatz gemacht, der einer Scheibenlösung mit isoparametrischen Elementen 2. Ordnung (Bild 2) entspricht [2].

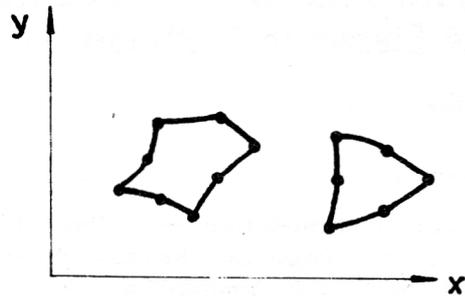


Bild 2
Isoparametrische Elemente 2. Ordnung

Nach Ausführung aller Umformungen entsteht ein lineares Gleichungssystem in der Form

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{f}, \quad (9)$$

das für jedes Reihenglied gelöst werden muß. Somit sind Verschiebungen \underline{u} für jeden Knoten bekannt. Die entsprechenden Spannungen lassen sich aus den Gleichungen (2) und (3) ermitteln.

2. Anwendungsmöglichkeiten

Das Prismenmodell der FEM hat den Nachteil, daß man nur einen Balken auf zwei Stützen simulieren kann. Zur Analyse örtlicher Kräfteverhältnisse sind Biege- und Wölbspannungen zu überlagern. Folgende zwei Lösungsmöglichkeiten gibt es:

1. Ermittlung der Biege- und Wölbspannungen nach der Stabwerkstheorie und Subtraktion von den Gesamtspannungen;
2. Vermindern der Verformungen über die gesamte Balkenlänge (Bild 3), die zu Biege- und Wölbspannungen führen.

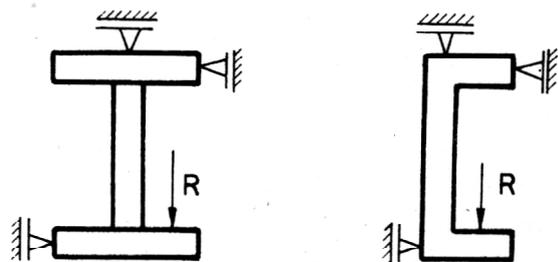


Bild 3
Beispiel für Lagerung zur Verhinderung der Verschiebung und Verdrehung der Profile

Im ersten Fall vermischt man verschiedene Ansätze der eindimensionalen und der dreidimensionalen Elastizitätstheorie, was bei einigen Problemen mit ausreichender Genauigkeit zum Ziel führen kann.

Beim zweiten Fall ist es notwendig, den örtlichen Einfluß der angebrachten Lagerung einzuschätzen, z. B. treten Scheibenwirkungen im Steg und in den Flanschen auf (Bild 3).

Welche von beiden Möglichkeiten angewendet werden, hängt im wesentlichen von den konkreten Problemen ab. Bei einigen Konstruktionen (z. B. Brückenkrane) ist die Prismenmethode direkt anwendbar.

3. Ergebnisse

Aufbauend auf die theoretischen Grundlagen von [1] und [2], wurde das FEM-Programm PRISMA für den Rechner EC1040 geschrieben und getestet. In [3] wurden einige praktische Rechnungen mit PRISMA durchgeführt. Die Aufgabe bestand darin, die örtlichen Spannungen infolge von Laufrollen in einem I- und einem U-Profil zu ermitteln (Flanschbiegung). Im Bild 4 sind die Abmessungen der Profile und die Einteilung in finite

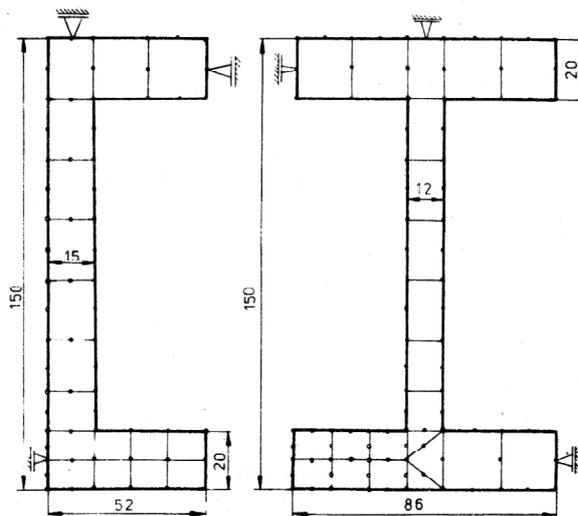


Bild 4
Querschnittsabmessungen und Vernetzungen der Profile

Elemente dargestellt. Die Radlastkräfte $R_1 = 33756 \text{ N}$ für das I-Profil und $R_2 = 23940 \text{ N}$ für das U-Profil wurden als Flächenlasten simuliert. In der Tabelle 1 sind Ergebnisse nach 59 Reihengliedern zusammengestellt. Bei einer Vergleichsrechnung nach [4] wurde für das I-Profil eine Spannung von 133 N/mm^2 ermittelt. Die Ursachen für den großen Unterschied sind in den relativ dickwandigen Profilen zu suchen, da bei der Platten-theorie die Querkraftwirkung unberücksichtigt bleibt. Durch die hier angewandte Prismenmethode konnten die realen Verhältnisse besser erfaßt werden.

Tabelle 1
Maximale Vergleichsspannungen in N/mm^2

	I-Profil	U-Profil
untere Flanschseite	88,4	76,2
obere Flanschseite	91,8	74,8

LITERATUR

- [1] Cheung, Y. K.: Finite Strip Method in Structural Analysis. Pergamon Press Oxford – New York – Toronto – Sydney – Paris – Frankfurt. First edition 1976.
- [2] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1975.
- [3] Kolarow, G.: Spannungsuntersuchungen an Gabelstaplerhubgerüsten. Diplomarbeit, TH Magdeburg 1985.
- [4] Maisch, E.: Zur Beanspruchung der Hubgerüste von Gabelstaplern. Dissertation Uni Stuttgart 1980.