

Kinematik und Dynamik von Koppelgetrieben nach dem Gliedergruppenkonzept

(Teil 1: Kinematik)

Thomas Thümmel

0. Einleitung

Der arbeitszeitintensive Entwurf von Koppelgetrieben für Textil- und Verarbeitungsmaschinen konnte bisher durch komplexe universelle Großrechnerprogramme unterstützt werden, wie KOGEOP, KOEBILD und DAM [1].

Mit der breiten Verfügbarkeit von Personalcomputern am Arbeitsplatz der Konstrukteure wird auch der rechnerunterstützte Koppelgetriebeentwurf nicht mehr wenigen Spezialisten vorbehalten sein. Daraus ergeben sich qualitativ neue Anforderungen an Koppelgetriebeprogramme, z. B.

- Anwenderfreundlichkeit, Bedienerführung, im alphanumerischen und grafischen Dialog
- Robustheit, Fehlerbehandlung
- Erweiterbarkeit des Leistungsumfangs bei spezifischen neuen praktischen Anwendungen, Transparenz der Programme, Modularität, Schnittstellen, Einfache Algorithmen.

Mit diesem Beitrag sollen Grundlagen und Algorithmen für Software zum Koppelgetriebeentwurf vorgestellt werden. Das verwendete Gliedergruppenkonzept überzeugt durch seine Einfachheit, die guten Erweiterungsmöglichkeiten und die dem Entwurfsprozess ähnliche Vorgehensweise des schrittweisen Zusammenbaus eines Koppelgetriebes [2] bis [4].

Dieser Beitrag behandelt die Struktur und Kinematik von Koppelgetrieben, während die Dynamik (einschließlich Coulombscher Reibung) in einem späteren Beitrag in dieser Zeitschrift logisch angereicht werden soll. Ein darauf aufbauendes Programm für Personalcomputer befindet sich in Erprobung.

1. Strukturbeschreibung

Koppelgetriebe können beginnend beim Antrieb in logischer Reihenfolge aus Gliedergruppen (ASSUR-Gruppen) zusammengesetzt werden (Bild 1).

Eine Gliedergruppe besitzt folgende Merkmale:

1. Sie besteht aus mindestens zwei starren Gliedern, die gelenkig miteinander verbunden sind. Die „inneren“ Gelenke werden als Koppelpunkte bezeichnet.
2. Entsprechend der Montagereihenfolge wird eine Gliedergruppe über „äußere“ Gelenke (Anschlußpunkte) an vorher vorhandene Gliedergruppen angeschlossen. „Äußere“ Gelenke zu nachfolgenden Gliedergruppen sollen Folgepunkte heißen.

3. Bei Festhalten der Anschlußpunkte ist der Bewegungsfreiheitsgrad einer Gliedergruppe gleich Null.
4. Bei gleicher Lage der Anschlußpunkte existieren mehrere mögliche Lagen der Gliedergruppe (Montagevarianten).
5. Die Montagevariante ändert sich nicht während eines Bewegungszyklus des Koppelgetriebes; die Ausnahme sind Koppelgetriebe mit Sonderabmessungen („durchschlagende“ Getriebe).
6. Bei bekannten eingepprägten äußeren Kräften, bekannten Gelenkreaktionen in den Folgepunkten und gegebenen d'Alembertschen Kräften sind die Gelenkreaktionen in den Koppelpunkten aus den statischen Gleichgewichtsgleichungen bestimmbar; **statische Bestimmtheit**.

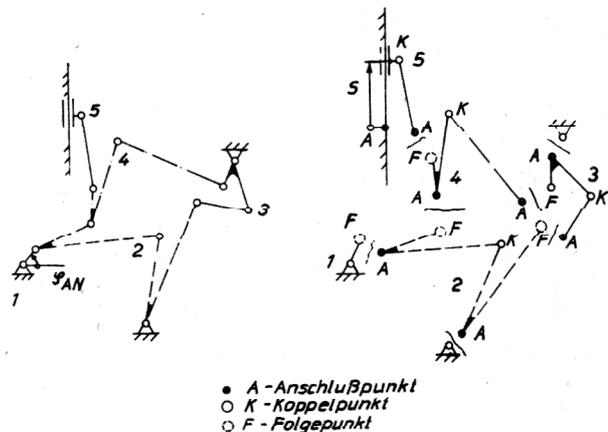


Bild 1
Zusammenbau eines Koppelgetriebes aus Gliedergruppen

Im Bild 1 sind die Gliedergruppen entsprechend der Montagereihenfolge numeriert sowie Anschluß-, Folge- und Koppelpunkte gekennzeichnet.

Neben Gliedergruppen mit Dreh- oder Schubgelenken können auch Baugruppen mit Rädern, Kurvengelenken, Ketten, Riemen u. a. hinzugefügt werden, wenn diese die Merkmale der Gliedergruppen sinngemäß erfüllen. Auch nicht in einer Ebene bewegte, räumliche Gliedergruppen sind denkbar. Hier deutet sich die Erweiterbarkeit des Konzepts an.

Bei Einschränkung auf Gliedergruppen aus zwei Gliedern, Zweischläge oder Dyaden genannt, ist die Bewegungsanalyse (Kinematik) geschlossen lösbar; denn die geome-

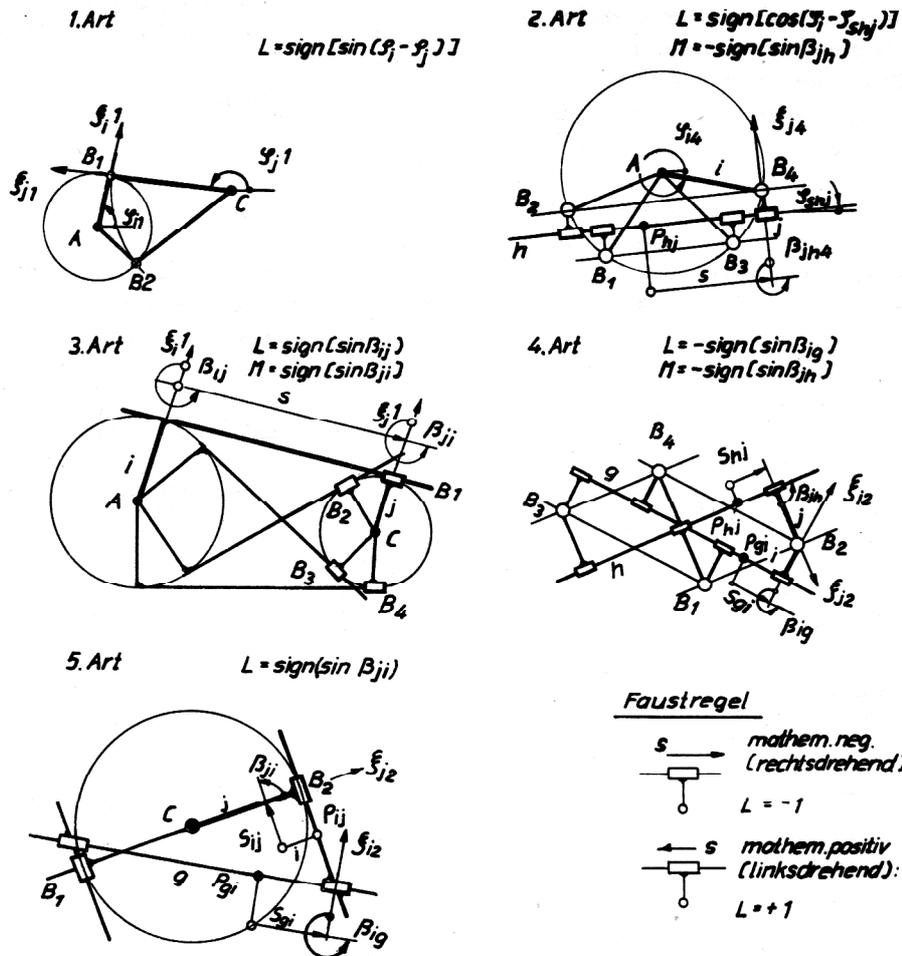


Bild 2
Dyaden 1. bis 5. Art mit Montagevarianten

trischen Zwangsbedingungen (transzendente Gleichungen) können auf quadratische oder lineare Gleichungen zurückgeführt werden.

Im Bild 2 sind die fünf Dyadenarten mit ihren möglichen Montagevarianten dargestellt.

Eine geometrische Deutung der Montagevarianten wird sichtbar:

- Dyade 1. Art: 2 Schnittpunkte von 2 Kreisen
- Dyade 2. Art: 4 Schnittpunkte von einem Kreis und 2 Geraden, d. h. den 2 Parallelen zur Schubgeraden mit dem Abstand der Schieberexzentrizität
- Dyade 3. Art: 4 Tangenten an 2 Kreise
- Dyade 4. Art: 4 Schnittpunkte der je 2 Parallelen zu den 2 Schubgeraden im Abstand der Schieberexzentrizitäten
- Dyade 5. Art: 2 Tangenten an einen Kreis bei vorgegebenem Winkel der Tangenten zur Schubgeraden.

Die Nummer n einer Montagevariante (vgl. Koppel­punkt B_n im Bild 2) wird

für Dyaden 1. und 5. Art nach $n = (L + 3)/2$ und

für Dyaden 2., 3. und 4. Art nach $n = (L + 5)/2 + M$ berechnet.

Mit L und M, die nur die Werte +1 oder -1 annehmen, werden in den mathematischen Beziehungen zur Kine­matik die Montagevarianten unterschieden.

Spezielle Bezeichnungen und Definitionen sind außer­dem aus den Bildern der Tabellen 1 bis 5 entnehmbar, dabei werden weitestgehend folgende Grundsätze eingehalten:

- (1) Die Dyade besteht aus den Gliedern i und j
- (2) Das Gelenk (i, j) ist der Koppel­punkt B
 Gelenk (g, i) ist der Anschluß­punkt A am Dyaden­glied i
 Gelenk (h, j) ist der Anschluß­punkt C am Dyaden­glied j
- (3) Die gliedfesten ξ - η -Koordinatensysteme haben ihren Ursprung in den Anschluß­punkten A bzw. C, und die ξ -Achse verläuft durch den Koppel­punkt B.
- (4) Die Winkel φ_i sind von der raumfesten x-Achse zur gliedfesten ξ -Achse zu messen.
- (5) Schubgelenke (i, j) werden beschrieben durch
 - einen Punkt P_{ij} auf der Schubgeraden im Glied i
 - einen Punkt P_{ji} auf der Schubgeraden im Glied j
 - den Schubweg s_{ij} von P_{ij} zu P_{ji} (Schubweg führt vom Punkt mit niedrigerem ersten Index, z. B. P_{ij} zum Punkt mit höherem ersten Index, z. B. P_{ji}),
 - den Winkel β_{ij} von ξ_i zur Schubrichtung s_{ij} und den Winkel β_{ji} von ξ_j zur Schubrichtung s_{ji}
 - für das Getriebeglied mit Schieber liegt P in Schiebermitte

Zeitableitungen der Variablen x werden durch \dot{x} bzw. \ddot{x} gekennzeichnet.

2. Kinematische Analyse der Dyaden

Bei der kinematischen Analyse der Dyaden sind neben den geometrischen Größen stets die Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Anschlußpunkte gegeben. Nach Vorgabe der Montagevariante kann dann die Bewegung der Dyade exakt bestimmt werden. In den Tabellen 1 bis 5 sind die Beziehungen für alle fünf Dyadenarten zusammengestellt. Bei Beachtung der Gelenkzuordnung (Anschlußpunkte und Folgepunkte vgl. Bild 1) können damit Koppelgetriebe, die aus Dyaden beliebig zusammengesetzt sind, auf einfache Weise analysiert werden.

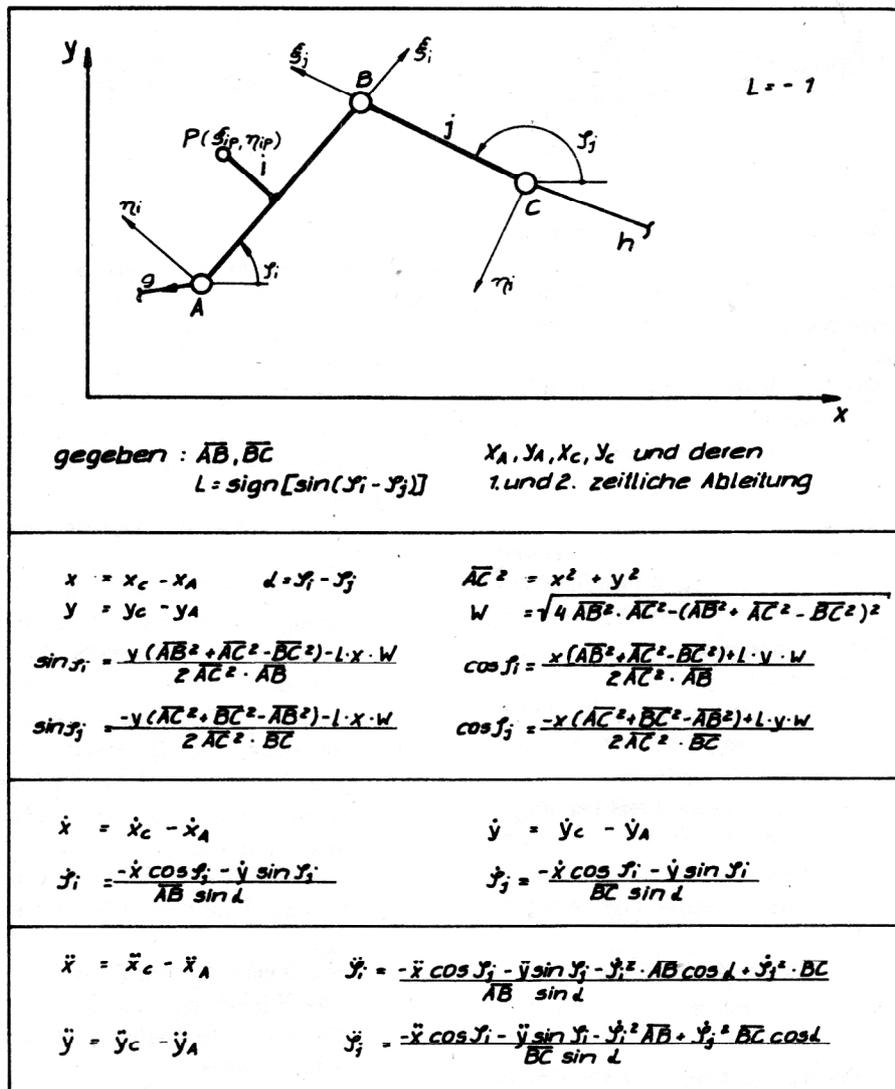
Die Bewegung eines beliebigen gliedfesten Punktes P (ξ_{iP}, η_{iP}), z. B. Folgepunkt, Koppelpunkt oder Massenschwerpunkt, im raumfesten x-y-Koordinatensystem kann wie folgt berechnet werden (vgl. Bild in Tabelle 1):

$$z_1 = \xi_{iP} \sin \varphi_1 + \eta_{iP} \cos \varphi_1 \quad z_2 = \eta_{iP} \sin \varphi_1 - \xi_{iP} \cos \varphi_1$$

$$x_P = x_A - z_2 \quad \dot{x}_P = \dot{x}_A - \dot{\varphi}_1 z_1 \quad \ddot{x}_P = \ddot{x}_A - \ddot{\varphi}_1 z_1 + \dot{\varphi}_1^2 z_2$$

$$y_P = y_A + z_1 \quad \dot{y}_P = \dot{y}_A - \dot{\varphi}_1 z_2 \quad \ddot{y}_P = \ddot{y}_A - \ddot{\varphi}_1 z_2 - \dot{\varphi}_1^2 z_1$$

Tabelle 1
Kinematik der Dyade 1. Art



Beachtenswert bei den Beziehungen für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den Tabellen 1 bis 5 ist die Plausibilität der Terme im Nenner. Die Nenner werden nur genau dann Null, wenn für die 1., 2. und 3. Dyade eine Sperrlage (Deck- oder Strecklage) bzw. für die 3. und 4. Dyade eine freie Bewegung auftritt.

3. Ausblick

Neben den modernen Methoden der Mechanismenanalyse, wie dem Maschenkonzept [1], [5] oder der FEM [6], wo Zwangsgleichungen automatisch aufgestellt und mit Näherungsverfahren iterativ gelöst werden, erweist sich gerade für Personalcomputer niedrigerer Leistungsfähigkeit (8-bit-Technik) das Gliedergruppenkonzept als vorteilhaft.

Im zweiten Teil zur Dynamik soll der Vorteil der Einschränkung auf Dyaden neben der Kinetostatik auch bei der Einbeziehung Coulombscher Reibung nachgewiesen werden.

Tabelle 2
Kinematik der Dyade 2. Art

$L = +1$
 $M = +1$

$\beta_{ji} \in (90^\circ, 270^\circ)$

gegeben: AB, BC, β_{ij} $x_A, y_A, x_{nj}, y_{nj}, \dot{s}_n$ und deren 1. und 2. zeitliche Ableitung
 $M = \text{sign}(\sin \beta_{ji})$
 $L = \text{sign}[\cos(\beta_i - \beta_{snj})]$

$\dot{s}_{snj} = \dot{s}_n + \beta_{snj}$ $s_{nj} = -z + L \sqrt{z^2 - x^2 - y^2 + AB^2}$
 $\dot{s}_j = \dot{s}_{snj} + M \cdot \frac{z}{s_j}$ $\cos \beta_i = (x + s_{nj} \cos \beta_{snj}) / AB$
 $x = x_{nj} - x_A + BC \cos \beta_j$ $\sin \beta_i = (y + s_{nj} \sin \beta_{snj}) / AB$
 $y = y_{nj} - y_A + BC \sin \beta_j$ $d = \beta_i - \beta_{snj}$
 $z = x \cos \beta_{snj} + y \sin \beta_{snj}$

$\dot{y}_{nj} = \dot{y}_j = \dot{y}_n$ $\dot{\beta}_{nj} = \frac{-\dot{x} \cos \beta_i - \dot{y} \sin \beta_i - s_{nj} \dot{\beta}_i \sin d}{\cos d}$
 $\dot{x} = \dot{x}_{nj} - \dot{x}_A - BC \dot{\beta}_j \sin \beta_j$ $\dot{y}_i = \frac{-\dot{x} \sin \beta_{snj} + \dot{y} \cos \beta_{snj} + s_{nj} \dot{\beta}_j}{AB \cos d}$
 $\dot{y} = \dot{y}_{nj} - \dot{y}_A + BC \dot{\beta}_j \cos \beta_j$

$\ddot{x} = \ddot{x}_{nj} - \ddot{x}_A - BC \ddot{\beta}_j \sin \beta_j - BC \dot{\beta}_j^2 \cos \beta_j$ $\ddot{s}_{snj} = \ddot{y}_j = \ddot{y}_n$
 $\ddot{y} = \ddot{y}_{nj} - \ddot{y}_A + BC \ddot{\beta}_j \cos \beta_j - BC \dot{\beta}_j^2 \sin \beta_j$
 $\ddot{s}_{nj} = \frac{-AB \dot{\beta}_i^2 - \dot{x} \cos \beta_i - \dot{y} \sin \beta_i - 2 s_{nj} \sin d - s_{nj} (\ddot{y}_i \sin d - \dot{\beta}_i^2 \cos d)}{\cos d}$
 $\ddot{\beta}_j = \frac{AB \dot{\beta}_i^2 \sin d - \dot{x} \sin \beta_{snj} + \dot{y} \cos \beta_{snj} + 2 s_{nj} \dot{\beta}_i + s_{nj} \ddot{\beta}_i}{AB \cos d}$

Tabelle 3
Kinematik der Dyade 3. Art

$L = -1$
 $M = +1$

gegeben: $\beta_{ji}, \beta_{ij} \in (90^\circ, 270^\circ)$ x_A, y_A, x_C, y_C und deren 1. und 2. zeitliche Ableitung (es gilt $s_{ij} > 0$)
 $M = \text{sign}(\sin \beta_{ji})$
 $L = \text{sign}(\sin \beta_{ij})$

$x = x_C - x_A$ $\sin \beta_i = \frac{E - y - L \cdot x \sqrt{x^2 + y^2 - E^2}}{x^2 + y^2}$
 $y = y_C - y_A$ $\cos \beta_i = \frac{E \cdot x + L \cdot y \sqrt{x^2 + y^2 - E^2}}{x^2 + y^2}$
 $E = AP_{ij} - BC \cdot M \cdot L$
 $\dot{s}_j = \dot{s}_i + \frac{z}{s_j} (L - M)$ $\dot{s}_{ij} = -L (x \sin \beta_i - y \cos \beta_i)$

$\dot{y}_i = \dot{y}_j + \frac{-L}{s_{ij}} (\dot{x} \cos \beta_i + \dot{y} \sin \beta_i)$ $\ddot{x} = \ddot{x}_C - \ddot{x}_A$
 $\dot{s}_{ij} = -L [(\dot{x} + y \dot{\beta}_i) \sin \beta_i - (\dot{y} - x \dot{\beta}_i) \cos \beta_i]$ $\ddot{y} = \ddot{y}_C - \ddot{y}_A$

$\ddot{\beta}_i = \ddot{\beta}_j = \frac{-L}{s_{ij}^2} (\ddot{x} \cos \beta_i + \dot{y} \sin \beta_i + E \dot{\beta}_i^2) - \frac{2 s_{ij} \dot{\beta}_i}{s_{ij}}$
 $\ddot{s}_{ij} = -L [(L \ddot{x} - 2 \dot{y} \dot{\beta}_i - x \dot{\beta}_i^2 + y \ddot{\beta}_i) \sin \beta_i - (\ddot{y} - 2 \dot{x} \dot{\beta}_i - x \dot{\beta}_i^2 - y \ddot{\beta}_i) \cos \beta_i]$
 mit $\ddot{x} = \ddot{x}_C - \ddot{x}_A$ $\ddot{y} = \ddot{y}_C - \ddot{y}_A$

Tabelle 4
Kinematik der Dyade 4. Art

$L = +7$
 $M = -7$

gegeben: $\beta_{ig}, \beta_{jn} \in (90^\circ, 270^\circ)$
 $AB, BC, \beta_{gi}, \beta_{hj}$
 $L = -\text{sign}(\sin \beta_{ig})$
 $M = -\text{sign}(\sin \beta_{jn})$

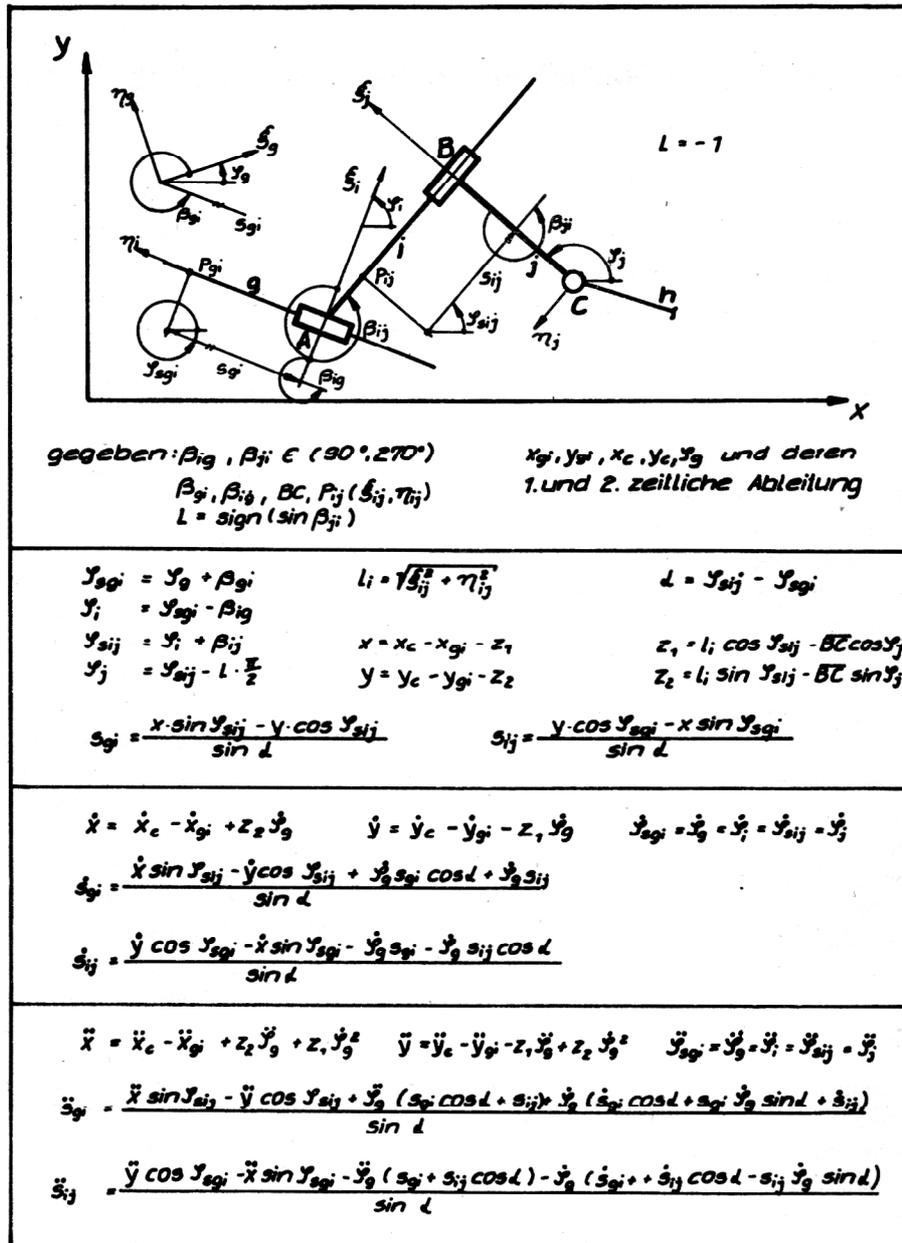
$x_{gi}, y_{gi}, x_{nj}, y_{nj}, y_g, y_n$
und deren 1. und 2. zeitliche Ableitung

$y_{s_{gi}} = y_g + \beta_{gi} \quad y_i = y_{s_{gi}} + L \cdot \frac{\pi}{2} \quad x = x_{nj} - x_{gi} - AB \cos \gamma_i + BC \cos \gamma_j$
 $y_{s_{nj}} = y_n + \beta_{nj} \quad y_j = y_{s_{nj}} + M \cdot \frac{\pi}{2} \quad y = y_{nj} - y_{gi} - AB \sin \gamma_i + BC \sin \gamma_j$
 $s_{gi} = \frac{-x \sin \gamma_{s_{gi}} + y \cos \gamma_{s_{gi}}}{\sin \delta} \quad s_{nj} = \frac{-x \sin \gamma_{s_{nj}} + y \cos \gamma_{s_{nj}}}{\sin \delta} \quad \delta = \gamma_{s_{gi}} - \gamma_{s_{nj}}$

$\dot{x} = \dot{x}_{nj} - \dot{x}_{gi} + AB \dot{\gamma}_i \sin \gamma_i - BC \dot{\gamma}_j \sin \gamma_j \quad \dot{y} = \dot{y}_{nj} - \dot{y}_{gi} - AB \dot{\gamma}_i \cos \gamma_i + BC \dot{\gamma}_j \cos \gamma_j$
 $\dot{s}_{gi} = \frac{-\dot{x} \sin \gamma_{s_{gi}} - s_{gi} \dot{\gamma}_g \cos \delta + s_{nj} \dot{\gamma}_n + \dot{y} \cos \gamma_{s_{gi}}}{\sin \delta} \quad \dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}_{s_{gi}} = \dot{\gamma}_g$
 $\dot{s}_{nj} = \frac{-\dot{x} \sin \gamma_{s_{nj}} + s_{nj} \dot{\gamma}_n \cos \delta - s_{gi} \dot{\gamma}_g + \dot{y} \cos \gamma_{s_{nj}}}{\sin \delta} \quad \dot{\gamma}_j = \dot{\gamma}_{s_{nj}} = \dot{\gamma}_n$

$\ddot{x} = \ddot{x}_{nj} - \ddot{x}_{gi} + AB \dot{\gamma}_i^2 \sin \gamma_i + AB \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_i \cos \gamma_i - BC \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_j \sin \gamma_j - BC \dot{\gamma}_j^2 \cos \gamma_j \quad \ddot{\gamma}_i = \ddot{\gamma}_{s_{gi}} = \ddot{\gamma}_g$
 $\ddot{y} = \ddot{y}_{nj} - \ddot{y}_{gi} - AB \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_i \cos \gamma_i + AB \dot{\gamma}_i^2 \sin \gamma_i + BC \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_j \cos \gamma_j - BC \dot{\gamma}_j^2 \sin \gamma_j \quad \ddot{\gamma}_j = \ddot{\gamma}_{s_{nj}} = \ddot{\gamma}_n$
 $\ddot{s}_{gi} = \frac{-\ddot{x} \sin \gamma_{s_{gi}} - (2\dot{s}_{gi} \dot{\gamma}_g + s_{gi} \ddot{\gamma}_g) \cos \delta + s_{gi} \dot{\gamma}_g^2 \sin \delta + 2\dot{s}_{nj} \dot{\gamma}_n + s_{nj} \ddot{\gamma}_n + \ddot{y} \cos \gamma_{s_{gi}}}{\sin \delta}$
 $\ddot{s}_{nj} = \frac{-\ddot{x} \sin \gamma_{s_{nj}} + (2\dot{s}_{nj} \dot{\gamma}_n + s_{nj} \ddot{\gamma}_n) \cos \delta - s_{nj} \dot{\gamma}_n^2 \sin \delta - 2\dot{s}_{gi} \dot{\gamma}_g - s_{gi} \ddot{\gamma}_g + \ddot{y} \cos \gamma_{s_{nj}}}{\sin \delta}$

Tabelle 5
Kinematik der Dyade 5. Art



LITERATUR

- [1] Autorenkollektiv (Leitung Dresig, H.): Anwenderbeschreibung zum Programm DAM (Dynamische Analyse ebener Mechanismen). Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion Maschinen-Bauelemente, Teil 1 1979, Teil 2 1982.
- [2] Peisach, E. E.: Algorithmus zur kinematischen Analyse ebener Koppeltriebe. Technische Mechanik 3 (1982) Heft 1, S. 61 – 66.
- [3] Thümmel, T.: Algorithmen und Programme zum dynamischen Ausgleich von Mechanismen. Dissertation TH Karl-Marx-Stadt 1985.
- [4] Kagan, V. M.; Andreev, A. F.: Algorithmen zur kinematischen und dynamischen Analyse von Gliedergruppen mit zwei und drei Anlenkpunkten (russ.). Sbornik „Algoritmy proektirovanija Schem mekhanizmov“, Izd. Nauka, Moskva 1979, S. 102 – 125.
- [5] Pausch, E.: Zur Analyse und Optimierung von dynamischen Kräften und Momenten in ebenen Mechanismen. Dissertation TH Karl-Marx-Stadt 1976.
- [6] Klein, B.: Ein Beitrag zur rechnerunterstützten Analyse und Synthese ebener Gelenktriebe unter besonderer Berücksichtigung mathematischer Optimierungsstrategien und der Finite-Elemente-Methode. ARK-Schriftenreihe (Diss.) Nr. 1 – 1977, Institut für Konstruktionstechnik, Ruhruniversität Bochum.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Thomas Thümmel
 VEB TISORA Karl-Marx-Stadt
 Rationalisierung Textilmaschinenbau
 Abt. OTK
 PSF 818
 Karl-Marx-Stadt
 9010